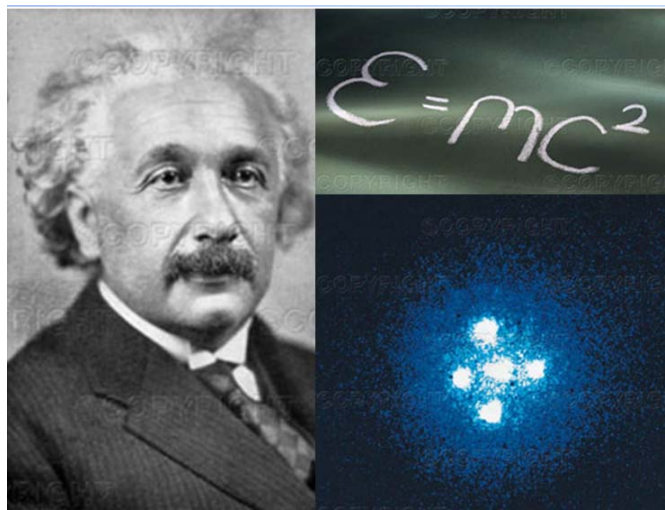


ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ



Παναγιώτης Κόκκας

Αναπληρωτής Καθηγητής , Τμήμα Φυσικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Ιωάννινα 2008

Εισαγωγή:

Οι σημειώσεις αυτές απευθύνονται στους δευτεροετείς φοιτητές του Τμήματος Φυσικής στα πλαίσια του μαθήματος “Σύγχρονη Φυσική Ι” του χειμερινού εξαμήνου. Παρέχουν ένα σημαντικό βοήθημα για το μέρος του μαθήματος που αφορά στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας. Καλύπτουν ένα μέρος της θεωρίας η οποία δεν περιλαμβάνεται στο διδακτικό βιβλίο και περιέχουν έναν μεγάλο αριθμό λυμένων και άλυτων προβλημάτων που έχουν στόχο να βοηθήσουν τον φοιτητή στη μελέτη του. Σημειώνουμε πως σε καμιά περίπτωση δεν αντικαθιστούν το διδακτικό σύγγραμμα ούτε αντικαθιστούν τις παραδόσεις του μαθήματος.

Αναλυτικότερα στο Κεφάλαιο 1 περιλαμβάνονται προβλήματα που αφορούν τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου ενώ στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η Αρχή της Σχετικότητας του Einstein.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται οι συνέπειες της αρχής της Σχετικότητας που αφορούν στη Διαστολή του Χρόνου και στη Συστολή του Μήκους ενώ στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται οι μετασχηματισμοί Lorentz.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται προβλήματα που αφορούν στο φαινόμενο Doppler, τα Διαστήματα, το Χωρόχρονο και τις Κοσμικές γραμμές. Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται προβλήματα που αφορούν στην Σχετικιστική μάζα, ενέργεια και ορμή. Τέλος στο Κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται στοιχεία που αφορούν τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το μάθημα μπορείτε να απευθυνθείτε στην ηλεκτρονική σελίδα http://alpha.physics.uoi.gr/web_kokkas_rel/relativity.htm

Σεπτέμβριος 2008

Π. Κόκκας

Κεφάλαιο 1 :

Μετασχηματισμοί Γαλιλαίου.

1.1 Γεγονότα, συστήματα αναφοράς και η αρχή της Νευτώνειας Σχετικότητας.

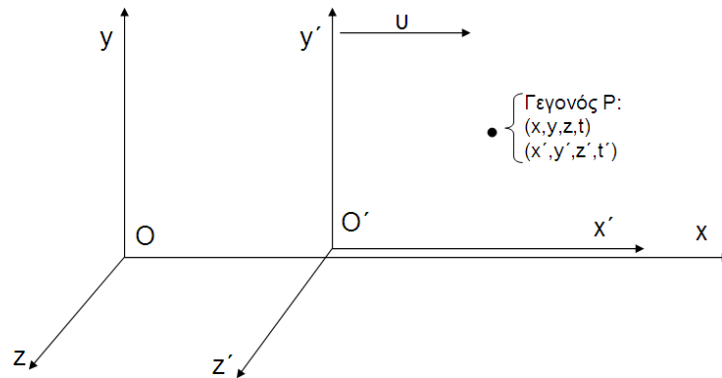
Ως **φυσικό γεγονός** ορίζεται ένα συμβάν το οποίο λαμβάνει χώρα σε ένα σημείο του χώρου μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Το γεγονός καθορίζεται πλήρως από ένα παρατηρητή, ο οποίος βρίσκεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων, με τέσσερις συντεταγμένες: τρεις χωρικές συντεταγμένες της θέσης (x, y, z) που μετράνε την απόσταση του γεγονότος από την αρχή των αξόνων και μία χρονική συντεταγμένη t την οποία ο παρατηρητής καταγράφει με το ρολόι του.

Ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων (x, y, z, t) βάσει του οποίου περιγράφουμε ένα φυσικό γεγονός ονομάζεται **Σύστημα Αναφοράς**. Ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο ισχύει ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα ονομάζεται **Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς**.

Σύμφωνα με την αρχή της **Νευτώνειας Σχετικότητας** (αρχή της σχετικότητας του Γαλιλαίου), όλοι οι νόμοι της μηχανικής είναι ίδιοι (αναλλοίωτοι) σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

1.2 Οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου

Θεωρείστε δύο παρατηρητές τον O και τον O' ο οποίος ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα v ως προς τον O κατά μήκος του κοινού τους άξονα $x-x'$, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1. Και οι δύο παρατηρητές είναι εφοδιασμένοι με ένα μέτρο ώστε να μετρούν αποστάσεις και ένα ρολόι ώστε να μετρούν τον χρόνο. Υποθέτουμε πως οι δύο παρατηρητές ρυθμίζουν τα ρολόγια τους έτσι ώστε όταν ο ένας περνά δίπλα από τον άλλον για $x = x' = 0$ τα ρολόγια τους να δείχνουν $t = t' = 0$. Τότε ένα φυσικό γεγονός P θα περιγράφεται από τις συντεταγμένες (x, y, z, t) ως προς τον O και από τις συντεταγμένες (x', y', z', t') ως προς τον O' .



Σχήμα 1.1

Οι συντεταγμένες-μετρήσεις (x, y, z, t) και (x', y', z', t') συνδέονται μεταξύ τους με τον Μετασχηματισμό Συντεταγμένων του Γαλιλαίου.

$$\begin{aligned} x &= x' + vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \quad (1.1)$$

Διαφορίζοντας τους παραπάνω μετασχηματισμούς ως προς τον χρόνο προκύπτουν οι παρακάτω Μετασχηματισμοί Ταχύτητας του Γαλιλαίου:

$$\begin{aligned} u_x &= u'_x + v \\ u_y &= u'_y \\ u_z &= u'_z \end{aligned} \quad (1.2)$$

Διαφορίζοντας τους μετασχηματισμούς ταχύτητας ως προς τον χρόνο προκύπτουν οι παρακάτω Μετασχηματισμοί Επιτάχυνσης του Γαλιλαίου:

$$\begin{aligned} a_x &= a'_x \\ a_y &= a'_y \\ a_z &= a'_z \end{aligned} \quad (1.3)$$

Η χωρική και χρονική απόσταση μεταξύ δύο γεγονότων μπορεί να δηλωθεί με $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$, όπου $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, κτλ. Οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου που συνδέουν τις αποστάσεις δύο γεγονότων είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \Delta x' + v\Delta t \\
\Delta y &= \Delta y' \\
\Delta z &= \Delta z' \\
\Delta t &= \Delta t'
\end{aligned}
\tag{1.4}$$

Αν και οι εξισώσεις (1.4) μοιάζουν πολύ με τις εξισώσεις (1.1) στην πραγματικότητα είναι κάπως πιο γενικές. Απαιτούν μονάχα ότι οι x , y και z άξονες είναι παράλληλοι προς τους x' , y' και z' άξονες αντίστοιχα, και ότι η σχετική κίνηση των συστημάτων αναφοράς είναι κατά την x διεύθυνση. Οι άξονες x και x' δεν χρειάζεται να βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Ούτε και είναι αναγκαίο οι αρχές των δύο συστημάτων συντεταγμένων να περάσουν η μία από την άλλη κατά μία ορισμένη στιγμή.

1.3 Το αναλλοίωτο μιας εξίσωσης

Το αναλλοίωτο μιας εξίσωσης η οποία περιγράφει έναν φυσικό νόμο σημαίνει πως η εξίσωση έχει την ίδια μορφή (μαθηματικό τύπο) όταν καθορίζεται από δύο διαφορετικούς παρατηρητές. Στην κλασική θεωρία οι χωρικές και χρονικές μετρήσεις δύο παρατηρητών συσχετίζονται μέσω των μετασχηματισμών του Γαλιλαίου. Έτσι εάν μια εξίσωση καθορίζεται με ένα συγκεκριμένο μαθηματικό τύπο από ένα παρατηρητή, μπορούμε να εφαρμόσουμε τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου και να υπολογίσουμε τον μαθηματικό της τύπο για τον άλλο παρατηρητή. Εάν οι δύο μαθηματικοί τύποι έχουν την ίδια μορφή τότε λέμε πως η εξίσωση είναι αναλλοίωτη (και κατά συνέπεια ο φυσικός νόμος που εκφράζει είναι αντίστοιχα αναλλοίωτος) κάτω από τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου.

Για παράδειγμα ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα γράφεται για τον πρώτο παρατηρητή ως: $\vec{F} = m\vec{a}$ ενώ για τον δεύτερο ως: $\vec{F}' = m\vec{a}'$, κατά συνέπεια είναι αναλλοίωτος κάτω από τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου. Όλοι οι νόμοι της μηχανικής είναι αναλλοίωτοι κάτω από τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου (για παράδειγμα δες τα προβλήματα 1.4.4, 1.4.5, 1.5.3 και 1.5.5). Δεν ισχύει όμως το ίδιο για τον ηλεκτρομαγνητισμό (για παράδειγμα πρόβλημα 1.5.6).

1.4 Λυμένα Προβλήματα

1.4.1 Ένας κυνηγός στο έδαφος πυροβολεί προς την βορειοανατολική κατεύθυνση και χτυπάει ένα ελάφι 350m μακριά του. Η σφαίρα ταξιδεύει με ταχύτητα 700m/sec. Τη στιγμή που η σφαίρα φεύγει από το όπλο του κυνηγού ένα αεροπλάνο πετάει ακριβώς από πάνω του σε ύψος 5km και κατευθύνεται ανατολικά με ταχύτητα 170m/sec. Όταν η σφαίρα χτυπά το ελάφι, ποιες είναι οι συντεταγμένες όπως προσδιορίζονται από ένα παρατηρητή στο αεροπλάνο;

Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου έχουμε:

$$\begin{aligned}t' &= t = \frac{350 \text{ m}}{700 \text{ m/sec}} = 0.5 \text{ sec} \\x' &= x - vt = (350\text{m}) \cdot \cos(45^\circ) - (170\text{m/sec}) \cdot 0.5 \text{ sec} = 162.48\text{m} \\y' &= y = (350\text{m}) \cdot \sin(45^\circ) = 247.48\text{m} \\z' &= z - h = 0 - 5000\text{m} = -5000\text{m}\end{aligned}$$

1.4.2 Ένα ραδιενεργό υλικό, το οποίο βρίσκεται σε ηρεμία στο σύστημα του εργαστηρίου, εκπέμπει δύο ηλεκτρόνια σε αντίθετες διευθύνσεις. Το ένα ηλεκτρόνιο κινείται με ταχύτητα 0.6c και το άλλο με ταχύτητα 0.7c ως προς έναν παρατηρητή ακίνητο στο σύστημα του εργαστηρίου. Ποια θα είναι η ταχύτητα του ενός ηλεκτρονίου ως προς το άλλο σύμφωνα με τους κλασικούς μετασχηματισμούς της ταχύτητας;

Ας υποθέσουμε ότι ο παρατηρητής Ο είναι ο ακίνητος παρατηρητής στο σύστημα του εργαστηρίου και ο παρατηρητής Ο' είναι ακίνητος ως προς το ηλεκτρόνιο το οποίο κινείται προς την θετική κατεύθυνση με ταχύτητα 0.6c. Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς ταχύτητας του Γαλιλαίου έχουμε:

$$u'_x = u_x - v = -0.7c - 0.6c = -1.3c$$

Αυτό το πρόβλημα αποδεικνύει ότι σύμφωνα με τους κλασικούς μετασχηματισμούς της ταχύτητας είναι δυνατές ταχύτητες μεγαλύτερες από αυτή του φωτός, πράγμα το οποίο δεν είναι σύμφωνο με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας.

1.4.3 Ένα βαγόνι μήκους L κινείται κατά την διεύθυνση του άξονα των x με ταχύτητα v. Ένας άνθρωπος περπατά από το μπροστινό μέρος του βαγονιού στο πίσω μέσα σε χρόνο T. Ποια είναι η μέση ταχύτητά του στο σύστημα αναφοράς του τραίνου και ποια στο σύστημα αναφοράς του εδάφους; Ποια απόσταση έχει διανύσει ως προς το σύστημα του εδάφους;

Στο σύστημα αναφοράς του τραίνου μπορούμε να γράψουμε:

$$x'_1 = L, \quad x'_2 = 0, \quad \Delta x = -L, \\ t'_1 = 0, \quad t'_2 = T, \quad \Delta t' = T$$

Στο σύστημα του τραίνου η μέση συνιστώσα της ταχύτητας του ανθρώπου είναι:

$$\bar{v}'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = -\frac{L}{T}$$

Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου βρίσκουμε για το σύστημα αναφοράς του εδάφους:

$$\Delta x = \Delta x' + v\Delta t' = -L + vT$$

$$\Delta t = \Delta t' = T$$

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\left(\frac{L}{T}\right) + v$$

1.4.4 Δύο σώματα κινούνται και συγκρούονται μετωπικά κατά τον άξονα των x . Το πρώτο σώμα έχει μάζα $m_1 = 3\text{kg}$ και ταχύτητα $v_1 = 4\text{m/sec}$ ενώ το δεύτερο έχει μάζα $m_2 = 1\text{kg}$ και ταχύτητα $v_2 = -3\text{m/sec}$. Μετά την σύγκρουση ένας παρατηρητής ακίνητος ως προς το έδαφος βρίσκει πως το δεύτερο σώμα κινείται με ταχύτητα $v_2^* = 3\text{m/sec}$. (α) Υπολογίστε την ταχύτητα v_1^* του πρώτου σώματος μετά την σύγκρουση καθώς και την αρχική και τελική ορμή του συστήματος. (β) Ένας δεύτερος παρατηρητής κινείται με ταχύτητα $v = 2\text{m/sec}$ ως προς το έδαφος. Πόση είναι η ορμή σύμφωνα με αυτόν πριν και μετά την σύγκρουση;

(α) Λόγω της αρχής διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$\text{Αρχική Ορμή Συστήματος} = \text{Τελική Ορμή Συστήματος}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1^* + m_2 v_2^*$$

Με αντικατάσταση των τιμών βρίσκουμε ότι : $v_1^* = 2\text{m/sec}$ και $p_{ολ} = 9\text{kg} \cdot \text{m/sec}$

(β) Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου βρίσκουμε:

$$v'_1 = v_1 - v = 4\text{m/sec} - 2\text{m/sec} = 2\text{m/sec}$$

$$v'_2 = v_2 - v = -3\text{m/sec} - 2\text{m/sec} = -5\text{m/sec}$$

$$v'^*_1 = v_1^* - v = 2\text{m/sec} - 2\text{m/sec} = 0\text{m/sec}$$

$$v'^*_2 = v_2^* - v = 3\text{m/sec} - 2\text{m/sec} = 1\text{m/sec}$$

$$(\text{Αρχική Ορμή})' = m_1 v_1' + m_2 v_2' = 1 \text{ kgr} \cdot \text{m/s}$$

$$(\text{Τελική Ορμή})' = m_1 v_1'^* + m_2 v_2'^* = 1 \text{ kgr} \cdot \text{m/s}$$

Παρατηρούμε πως ο δεύτερος παρατηρητής μετρά διαφορετική ολική ορμή αλλά και γιαυτόν ισχύει ο νόμος της διατήρησης της ορμής.

1.4.5 Θεωρείστε ένα σώμα με μάζα m το οποίο είναι προσδεμένο σε ένα ελατήριο σταθεράς k . Το σώμα κινείται σε μια οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Να δείξετε ότι οι εξισώσεις κίνησής του είναι οι ίδιες όσον αφορά ένα παρατηρητή ο οποίος είναι ακίνητος σε σχέση με την επιφάνεια και έναν παρατηρητή ο οποίος κινείται με ταχύτητα v κατά μήκος της διεύθυνσης του ελατηρίου.

Η εξίσωση κίνησης του σώματος για τον ακίνητο παρατηρητή είναι $F = ma$, ή

$$-k(x - x_0) = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1)$$

Για να υπολογίσουμε την εξίσωση κίνησης του σώματος για τον κινούμενο παρατηρητή χρησιμοποιούμε τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου από τους οποίους έχουμε:

$$x = x' + vt' \quad x_0 = x'_0 + vt' \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x'}{dt'^2}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω στην (1) έχουμε:

$$-k(x' - x'_0) = m \frac{d^2 x'}{dt'^2} \quad (2)$$

Οι εξισώσεις (1) και (2) έχουν την ίδια μορφή, πράγμα που σημαίνει πως η εξίσωση κίνησης είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου.

1.5 Προβλήματα

1.5.1 Γενικεύστε τις εξισώσεις μετασχηματισμού του Γαλιλαίου, ώστε να συμπεριλάβετε την περίπτωση μιας αυθαίρετης διεύθυνσης κίνησης του κινούμενου συστήματος αναφοράς και επίσης την δυνατότητα ότι οι δύο αρχές συντεταγμένων δεν συμπίπτουν για $t=0$. Συμπύξτε τρεις από τις εξισώσεις αυτές σε μια ανυσματική εξίσωση.

1.5.2 Ένας παρατηρητής βρίσκεται μέσα σε μια βάρκα και κινείται ανατολικά με ταχύτητα 5 m/sec. Την στιγμή κατά την οποία η βάρκα περνάει μπροστά από έναν ακίνητο παρατηρητή ο οποίος βρίσκεται στην όχθη, αυτός ρίχνει μια πέτρα με κατεύθυνση τον βορά. Η πέτρα πέφτει στο νερό 6 sec αργότερα σε απόσταση 30 m από την όχθη. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της πτώσης της πέτρας στο νερό σύμφωνα με τον παρατηρητή πάνω στη βάρκα. (Απάντηση: $(x,y,z,t)=(-30\text{ m}, 30\text{ m}, 0\text{ m}, 6\text{ sec})$).

1.5.3 Μία μπάλα βάρους 1 kgρ κινείται προς τον βορά με ταχύτητα 3 m/sec και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με μια δεύτερη ίδια μπάλα η οποία βρίσκεται σε ηρεμία. Υπολογίστε (α) στο σύστημα του εργαστηρίου και (β) ως προς ένα παρατηρητή ο οποίος κινείται βόρεια με ταχύτητα 1.5 m/sec, την ορμή και την ολική κινητική ενέργεια του συστήματος πριν και μετά την σύγκρουση.

(Απάντηση: (α) $p_{\text{tot}} = 3\text{kg}\cdot\text{m/sec}$ $E_{\text{κιν}} = 4.5\text{J}$ (β) $p_{\text{tot}} = 0\text{kg}\cdot\text{m/sec}$ $E_{\text{κιν}} = 2.25\text{J}$)

1.5.4 Ένα καμπριολέ αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 30m/sec. Ένα αγόρι μέσα στο αυτοκίνητο ρίχνει μια μπάλα προς τα πάνω με ταχύτητα 7m/sec. Να γράψετε την εξίσωση κίνησης της μπάλας σύμφωνα με τον (α) με το αγόρι και (β) με έναν ακίνητο ως προς τον δρόμο παρατηρητή. Δίνεται $g=10\text{m/sec}^2$.

(Απάντηση: (α) $y' = 7t' - 5t'^2$ $x' = z' = 0$, (β) $y = 7t - 5t^2$ $x = 30t$ $z = 0$)

1.5.5 Το σωματίο 1 έλκεται από το σωματίο 2 με μια δύναμη $\vec{F}_1$ η οποία εξαρτάται μόνο από την μετατόπιση $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ μεταξύ των δύο σωματίων. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα εφαρμοζόμενος στο σωματίο 1 μπορεί να γραφεί ως:

$$\vec{F}_1(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = m_1 \vec{a}_1$$

Δείξτε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.

1.5.6 Δείξτε ότι η ηλεκτρομαγνητική κυματική εξίσωση,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.

1.5.7 Ένα σύστημα αναφοράς με καρτεσιανούς άξονες x, y, z είναι ακίνητο. Ένα άλλο σύστημα με καρτεσιανούς άξονες x', y', z' κινείται κατά την θετική κατεύθυνση του x με σταθερή επιτάχυνση a_0 . Κατά την χρονική στιγμή $t = 0$, οι άξονες των δύο συστημάτων συμπίπτουν και η ταχύτητα του δευτέρου συστήματος σε σχέση με το πρώτο είναι v_0 . Να γράψετε εξισώσεις μετασχηματισμού ανάλογες με αυτές του μετασχηματισμού του Γαλιλαίου για τη θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση.

Κεφάλαιο 2 :

Η Αρχή της Σχετικότητας του Einstein.

2.1 Ο απόλυτος χώρος και ο αιθέρας.

Ας υποθέσουμε ότι ένας παρατηρητής μετρά την ταχύτητα ενός φωτεινού σήματος και την βρίσκει ίση με $c = 3 \times 10^8$ m/sec. Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς ταχύτητας του Γαλιλαίου κάθε διαφορετικός παρατηρητής ο οποίος κινείται σε σχέση με τον πρώτο παρατηρητή μετρά διαφορετική ταχύτητα διάδοσης για το ίδιο φωτεινό σήμα. Το ερώτημα που τίθεται είναι τι καθορίζει το συγκεκριμένο σύστημα στο οποίο οι ακίνητοι προς αυτό παρατηρητές μετρούν την ταχύτητα διάδοσης των φωτεινών σημάτων ίση ακριβώς με $c = 3 \times 10^8$ m/sec.

Πριν τον Einstein υπήρχε γενικά η πεποίθηση πως μόνο για τον παραπάνω προνομιούχο παρατηρητή ίσχυαν οι εξισώσεις του Maxwell. Οι εξισώσεις του Maxwell περιγράφουν την θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού και προβλέπουν πως τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ταξιδεύουν με ταχύτητα $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 3 \times 10^8$ m/sec. Ο χώρος σε σχέση με τον οποίο ο παραπάνω προνομιούχος παρατηρητής βρίσκεται σε ακινησία ονομαζόταν “απόλυτος χώρος” και υπήρχε η πεποίθηση πως διαχέεται από ένα μέσο με εξαιρετικά μικρή συμπιεστότητα και άπειρη σκληρότητα τον “αιθέρα”.

Εάν υπήρχε ο αιθέρας, τότε ένας παρατηρητής πάνω στη Γη κινούμενος μαζί της διαμέσου του αιθέρα, θα έπρεπε να αντιλαμβάνεται την ύπαρξή του. Το 1887 οι Michelson και Morley πραγματοποιώντας ένα ιστορικό πείραμα δεν βρήκαν καμία ένδειξη για την ύπαρξη του υποτιθέμενου αιθέρα.

2.2 Η Αρχή της Σχετικότητας.

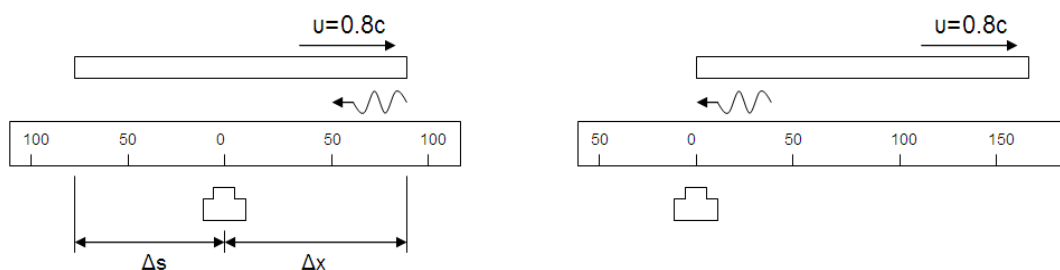
Ο Einstein απέρριψε την ιδέα της ύπαρξης του αιθέρα. Στην πρώτη του δημοσίευση για την σχετικότητα το 1905, έγραψε: “Η εισαγωγή ενός ‘φωτοβόλου αιθέρα’ θα αποδειχθεί περιττή διότι η άποψη που θα αναπτυχθεί εδώ δεν χρειάζεται ένα απόλυτα ακίνητο χώρο που να έχει ειδικές ιδιότητες”.

Η πρωτοποριακή ιδέα του Einstein, την οποία ο ίδιος αποκάλεσε Αρχή της Σχετικότητας, είναι ότι όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς πρέπει να είναι ισοδύναμα. Τα δύο αξιώματα της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας είναι τα ακόλουθα:

- Όλοι οι νόμοι της φυσικής είναι οι ίδιοι (αναλλοίωτοι) σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.
- Η ταχύτητα του φωτός έχει την ίδια τιμή, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 3 \times 10^8 \text{ m/sec}$, σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

2.3 Λυμένα Προβλήματα

2.3.1 Μία ράβδος κινείται από τα αριστερά προς τα δεξιά. Όταν το αριστερό άκρο της ράβδου περνάει μπροστά από μια φωτογραφική μηχανή, γίνεται η λήψη μιας φωτογραφίας της ράβδου μαζί με έναν ακίνητο χάρακα που μετρά αποστάσεις. Στη φωτογραφία φαίνεται πως το αριστερό άκρο της ράβδου βρίσκεται στην ίδια ευθεία με το μηδέν του χάρακα ενώ το δεξί της άκρο στα 0.90 m. Εάν η ράβδος κινείται με ταχύτητα 0.8c σε σχέση με την φωτογραφική μηχανή, υπολογίστε το πραγματικό μήκος της ράβδου.



Σχήμα 2.1

Για να αποτυπωθεί το οπτικό σήμα το οποίο προέρχεται από το δεξί άκρο της ράβδου στην φωτογραφία πρέπει να ξεκινήσει από το σημείο 0.90m του χάρακα σε πρώιμο χρόνο ίσο με:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c} = \frac{0.90\text{m}}{3 \times 10^8 \text{ m/sec}} = 3 \times 10^{-9} \text{ sec}$$

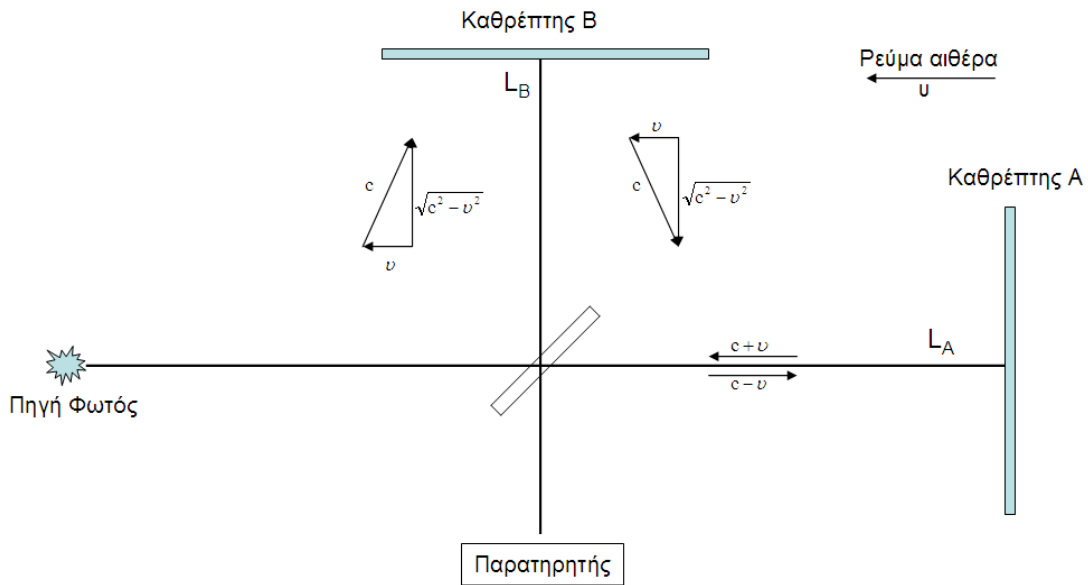
Κατά την διάρκεια αυτού του χρονικού διαστήματος το αριστερό άκρο της ράβδου προωθήθηκε κατά διάστημα ίσο με (Σχήμα 2.1):

$$\Delta s = v\Delta t = (0.8 \times 3 \times 10^8 \text{ m/sec}) \cdot (3 \times 10^{-9} \text{ sec}) = 0.72\text{m}$$

Έτσι το φυσικό μήκος της ράβδου θα είναι $L = 0.90\text{m} + 0.72\text{m} = 1.62\text{m}$. Αυτό το απλό παράδειγμα δείχνει πως μια φωτογραφία ενός κινούμενου αντικείμενου δεν δίνει το σωστό του μήκος. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι ως ένας ακίνητος παρατηρητής στη θέση της φωτογραφικής μηχανής να μετρά μικρότερο μήκος για την κινούμενη ράβδο.

2.3.2 Στο παρακάτω σχήμα 2.2 εικονίζεται ένα συμβολόμετρο Michelson-Morley προσανατολισμένο έτσι ώστε ο ένας βραχίονάς του (L_A) να είναι παράλληλος με την διεύθυνση κίνησης του υποτιθέμενου αιθέρα. Δείξτε ότι εάν η διάταξη στραφεί κατά 90° , θα έχουμε μετατόπιση ΔN κροσσών συμβολής, όπου ο αριθμός ΔN σε πρώτη τάξη ως προς $(v/c)^2$ θα είναι:

$$\Delta N = \frac{v^2}{\lambda c^2} (L_A + L_B)$$



Σχήμα 2.2

Στον βραχίονα L_A , ο χρόνος που χρειάζεται η φωτεινή δέσμη να πάει από το ημιδιαπερατό κάτοπτρο στον καθρέπτη A και πίσω είναι:

$$t_A = \frac{L_A}{c-v} + \frac{L_A}{c+v} = \frac{2L_A/c}{1-(v^2/c^2)} \quad (1)$$

Στον βραχίονα L_B η ταχύτητα διάδοσης του φωτεινού σήματος προκύπτει από την διανυσματική πρόσθεση της ταχύτητας του φωτός με την ταχύτητα κίνησης του αιθέρα και είναι ίση με $\sqrt{c^2 - v^2}$. Έτσι ο χρόνος που χρειάζεται η φωτεινή δέσμη να πάει από το ημιδιαπερατό κάτοπτρο στον καθρέπτη B και πίσω είναι:

$$t_B = \frac{2L_B}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L_B/c}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (2)$$

Υποθέτοντας πως $v/c \ll 1$, οι χρόνοι t_A και t_B αναπτύσσονται σε όρους πρώτης τάξης ως προς $(v/c)^2$ ως εξής:

$$t_A \approx \frac{2L_A}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right), \quad t_B \approx \frac{2L_B}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (3)$$

και

$$\Delta t = t_A - t_B \approx \frac{2(L_A - L_B)}{c} + \frac{2L_A v^2}{c^3} - \frac{2L_B v^2}{c^3} \quad (4)$$

Εάν η διάταξη στραφεί κατά 90° οι βραχίονες L_A και L_B εναλλάσσονται και η νέα χρονική διαφορά $\Delta t'$ θα είναι:

$$\Delta t' = t'_A - t'_B \approx \frac{2(L_B - L_A)}{c} + \frac{2L_B v^2}{c^3} - \frac{2L_A v^2}{c^3} \quad (5)$$

Έτσι θα παρατηρήσουμε μετατόπιση ΔN κροσσών συμβολής με:

$$\Delta N = \frac{\Delta t - \Delta t'}{T} = \frac{c(\Delta t - \Delta t')}{\lambda} = \frac{(L_A + L_B)v^2}{\lambda c^2} \quad (6)$$

2.4 Προβλήματα

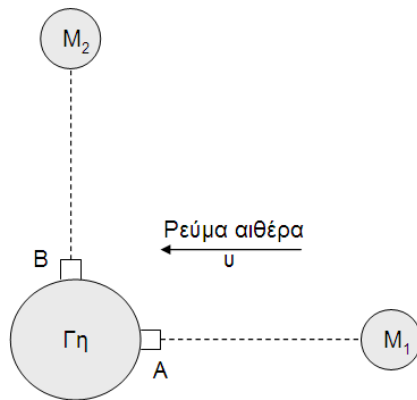
2.4.1 Υποθέστε ότι η ταχύτητα της Γης μέσα στον αιθέρα είναι ίση την ταχύτητα περιφοράς της γύρω από τον Ήλιο, δηλαδή $v = 10^{-4} c$. Θεωρήστε μια διάταξη Michelson-Morley με μήκος βραχιόνων 10m, όπου ο ένας βραχίονας είναι παράλληλος με την διεύθυνση κίνησης της Γης μέσα στον αιθέρα. Υπολογίστε την χρονική διαφορά των δύο φωτεινών δεσμών.

(Απάντηση: $\Delta t = 3.33 \times 10^{-16}$ sec)

2.4.2 Στο πείραμα των Michelson-Morley χρησιμοποιήθηκε ένα συμβολόμετρο με μήκος βραχιόνων 11m και φωτεινή πηγή Νατρίου με $\lambda = 590\text{nm}$. Το πείραμα είχε την ικανότητα να διακρίνει μετατοπίσεις κροσσών ίσες με 0.005 κροσσούς. Ποιο είναι το άνω όριο που θέτει στην ταχύτητα της Γης μέσα στον αιθέρα ένα αρνητικό αποτέλεσμα στο πείραμα;

(Απάντηση: $v = 3.47 \times 10^3 \text{ m/sec} = 1.16 \times 10^{-5} c$).

2.4.3 Ένας πειραματικός αποφασίζει να χρησιμοποιήσει φως laser που ανακλάται από το φεγγάρι για να ελέγξει για μια επίδραση του “άνεμου του αιθέρα”. Όταν το τηλεσκόπιο είναι στη θέση A και το φεγγάρι στη θέση M_1 (βλέπε παρακάτω σχήμα), μετρά με ακρίβεια το χρόνο του μετ’ επιστροφής ταξιδιού ενός παλμού φωτός laser. Περίπου μια εβδομάδα αργότερα, όταν το τηλεσκόπιο είναι στο B και το φεγγάρι στο M_2 , μετρά πάλι το χρόνο του μετ’ επιστροφής ταξιδιού. Υποθέστε πως ο φανταστικός άνεμος του αιθέρα κινείται κατά την διεύθυνση που δείχνεται με ταχύτητα $v = 10^{-4} c$. Για ευκολία υποθέστε ότι οι αποστάσεις M_1 και M_2 είναι ίδιες. (α) Ποιος είναι κατά προσέγγιση ο χρόνος του μετ’ επιστροφής ταξιδιού για το φως που ανακλάται από το φεγγάρι; (β) Ποια είναι κατά προσέγγιση η διαφορά στους χρόνους των ταξιδιών μετ’ επιστροφής για τις δύο μετρήσεις;



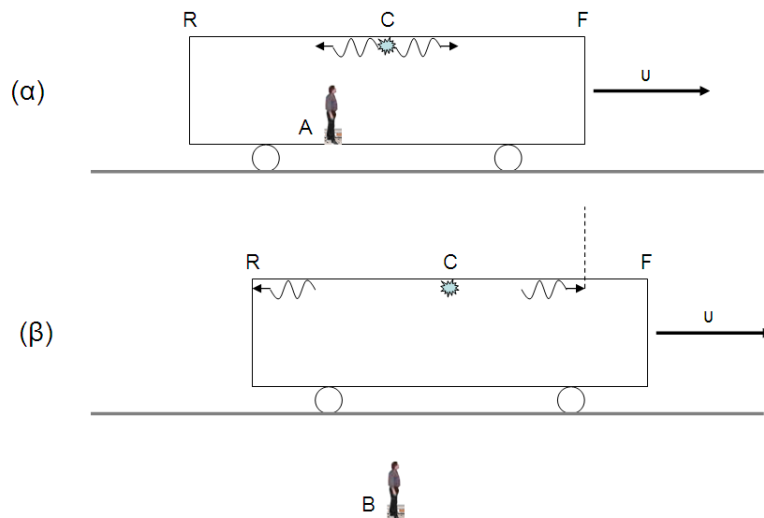
Κεφάλαιο 3 :

Διαστολή Χρόνου και Συστολή Μήκους.

3.1 Η σχετικότητα του χρόνου.

Κατά την Νευτώνειο Μηχανική ο χρόνος είναι απόλυτος, ίδιος και ανεξάρτητος από το σύστημα αναφοράς. Σύμφωνα όμως με το δεύτερο αξίωμα του Einstein η ταχύτητα του φωτός έχει την ίδια τιμή, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 3 \times 10^8$ m/sec, σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Αυτό έχει σαν άμεσο αποτέλεσμα πως ο χρόνος πρέπει να είναι σχετικός: διαφορετικοί παρατηρητές σε καταστάσεις σχετικής κίνησης πρέπει να έχουν διαφορετικές ιδέες ως προς τη μέτρηση του χρόνου και του χρονικού διαστήματος μεταξύ γεγονότων.

Θεωρήστε το ιδεατό πείραμα το οποίο εικονίζεται στο σχήμα 3.1. Σε μια στιγμή το κεντρικό φως C στο κινούμενο βαγόνι ανάβει. Λίγο χρόνο αργότερα σύμφωνα με τον παρατηρητή B που βρίσκεται στην αποβάθρα, το φως έχει φτάσει στο πίσω σημείο R του βαγονιού αλλά δεν έχει φτάσει ακόμα στο μπροστινό σημείο F. Σύμφωνα με τον παρατηρητή A ο οποίος είναι μέσα στο βαγόνι, το φως φτάνει στα σημεία R και F, που απέχουν το ίδιο από το C ταυτόχρονα.



Σχήμα 3.1

Δύο γεγονότα (η άφιξη του φωτός στο εμπρός και πίσω μέρος του αυτοκινήτου) κρίνονται από τον Α ότι συμβαίνουν ταυτόχρονα και από τον Β ότι συμβαίνουν σε διαφορετικούς χρόνους. Προφανώς πρέπει να υπάρχει μια διαφορά ως προς τον ίδιο τον χρόνο για τους δύο παρατηρητές. Δύο συμβάντα τα οποία είναι ταυτόχρονα σε ένα σύστημα αναφοράς, δεν είναι ένα γένει ταυτόχρονα σε ένα δεύτερο σύστημα το οποίο κινείται ως προς το πρώτο. Αυτό σημαίνει πως ο ταυτοχρονισμός δεν είναι απόλυτη έννοια.

3.2 Η Διαστολή του Χρόνου.

Θεωρείστε δύο παρατηρητές, τον Ο και τον Ο' ο οποίος ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα v ως προς τον Ο κατά μήκους του κοινού τους άξονα $x-x'$. Ας υποθέσουμε πως ο Ο' παρατηρεί δύο γεγονότα Α και Β τα οποία συμβαίνουν στην ίδια θέση ($\Delta x' = 0$). Το χρονικό διάστημα $\Delta t' = t'_B - t'_A$ μεταξύ των δύο γεγονότων ονομάζεται *ιδιοχρόνος* ή *χρόνος ηρεμίας*.

Θεωρείστε ότι τα ίδια δύο γεγονότα Α και Β παρατηρούνται από το παρατηρητή Ο. Αυτός αναγκαστικά θα προσδιορίσει πως τα δύο αυτά γεγονότα λαμβάνουν χώρα σε διαφορετικές θέσεις ($\Delta x \neq 0$) ενώ το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_B - t_A$ το οποίο μετρά σχετίζεται με το $\Delta t'$ ως:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t' \quad \text{με } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (3.1)$$

Σύμφωνα λοιπόν με τον ακίνητο παρατηρητή Ο το κινούμενο ρολόι του Ο' είναι πιο αργό από το δικό του κατά έναν παράγοντα γ^{-1} . Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως *διαστολή χρόνου*.

Στο παραπάνω παράδειγμα θεωρήσαμε πως τα γεγονότα Α και Β συμβαίνουν στην ίδια θέση ($\Delta x' = 0$) για τον παρατηρητή Ο'. Εάν θεωρήσουμε πως τα γεγονότα Α και Β γίνονται στην ίδια θέση ($\Delta x = 0$) για τον παρατηρητή Ο τότε θα καταλήξουμε σε αντίστοιχα αποτελέσματα: ότι δηλαδή $\Delta x' \neq 0$ και $\Delta t' = \gamma \Delta t$. Δηλαδή με απλά λόγια η διαστολή του χρόνου ισχύει και προς τις δύο κατευθύνσεις υπό παρόμοιες συνθήκες.

Το παραπάνω αποτελεί απόρροια της **Αρχής της Αμοιβαιότητας** η οποία προκύπτει από την ισοδυναμία των Αδρανειακών Συστημάτων (πρώτο αξίωμα του Einstein). Την Αρχή της Αμοιβαιότητας μπορούμε να την εκφράσουμε ως εξής: «Εάν δύο αδρανειακοί παρατηρητές Ο και Ο' εκτελέσουν το ίδιο πείραμα τότε η περιγραφή του Ο για το πείραμα του Ο' είναι η ίδια με την περιγραφή του Ο' για το πείραμα του Ο». Οι συνέπειες της Αρχής της Αμοιβαιότητας είναι οι ακόλουθες:

- Οι αποστάσεις οι οποίες είναι κάθετες στη διεύθυνση της κίνησης παραμένουν οι ίδιες.
- Οι δύο παρατηρητές συμφωνούν για τη σχετική τους ταχύτητα (εκτός του διαφορετικού προσήμου).
- Γεγονότα τα οποία συμπίπτουν στο χώρο και τον χρόνο σε ένα αδρανειακό σύστημα οφείλουν να συμπίπτουν σε όλα. Δηλαδή εάν $\Delta x = 0$, $\Delta t = 0$ τότε θα έχουμε και $\Delta x' = 0$, $\Delta t' = 0$. Θεωρήστε για παράδειγμα την διάσπαση ενός πιονίου σε ένα μιονίο και ένα νετρίνο του μιονίου. Όλοι οι παρατηρητές θα συμφωνήσουν πως τα φαινόμενα της καταστροφής του πιονίου και της δημιουργίας των νέων σωματίων συνέβησαν στην ίδια θέση ταυτόχρονα. Ένα τέτοιο γεγονός μπορούμε να πούμε πως είναι ένα μοναδικό γεγονός.

3.3 Η Συστολή του Μήκους.

Σε αναλογία με τον ιδιοχρόνο μπορούμε να ορίσουμε το *ιδιομήκος* ενός αντικειμένου ως το μήκος που έχει στο σύστημα αναφοράς στο οποίο ηρεμεί. Θεωρείστε δύο παρατηρητές, τον Ο και τον Ο' ο οποίος ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα v ως προς τον Ο κατά μήκος του κοινού τους άξονα $x-x'$. Θεωρήστε επίσης έναν χάρακα ο οποίος είναι τοποθετημένος παράλληλα στον κοινό άξονα $x-x'$ και βρίσκεται σε ακινησία ως προς τον κινούμενο παρατηρητή Ο'. Αυτό σημαίνει πως το ιδιομήκος του χάρακα είναι L' . Το μήκος L του χάρακα που μετρά ο παρατηρητής Ο δίνεται από την:

$$L = L' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L'}{\gamma} \quad \text{με } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (3.2)$$

Από την παραπάνω συμπεραίνουμε πως όταν ένα αντικείμενο κινείται με ταχύτητα v έχει μετρούμενο μήκος μικρότερο από το ιδιομήκος του κατά έναν παράγοντα $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται *συστολή του μήκους* (συστολή Lorentz) και συμβαίνει μόνο κατά την διεύθυνση της κίνησης.

3.4 Λυμένα Προβλήματα

3.4.1 Ο μέσος χρόνος ζωής μιονίων τα οποία κινούνται με ταχύτητα $v = 0.95c$ είναι $6 \times 10^{-6} \text{ sec}$. Υπολογίστε το μέσο χρόνο ζωής των μιονίων στο σύστημα αναφοράς τους.

Ο μέσος χρόνος ζωής των μιονίων στο σύστημα αναφοράς τους είναι ο ιδιοχρόνος τους, άρα έχουμε:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \Rightarrow \Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (6 \times 10^{-6}) \cdot \sqrt{1 - (0.95)^2} \text{ sec} = 1.87 \times 10^{-6} \text{ sec}$$

3.4.2 Τα πιόνια έχουν χρόνο ημίσειας ζωής $t_{1/2} = 1.8 \times 10^{-8} \text{ sec}$. Μια δέσμη πιονίων βγαίνει από έναν επιταχυντή με ταχύτητα $v = 0.8c$. (α) Υπολογίστε κλασικά το διάστημα που απαιτείται να διασπαστούν τα μισά πιόνια. (β) Υπολογίστε το ίδιο διάστημα εφαρμόζοντας την θεωρία της σχετικότητας.

(α) Στην κλασική φυσική έχουμε:

$$s = v \cdot t_{1/2} = (0.8 \times 3 \times 10^8 \text{ m/sec}) (1.8 \times 10^{-8} \text{ sec}) = 4.32 \text{ m}$$

(β) Ο χρόνος ημίσειας ζωής $t_{1/2}$ ορίζεται στο σύστημα ηρεμίας των πιονίων. Στο σύστημα του εργαστηρίου τα πιόνια κινούνται με $v = 0.8c$. Για έναν ακίνητο παρατηρητή στο σύστημα του εργαστηρίου ο χρόνος ημίσειας ζωής των πιονίων πρέπει να είναι αυξημένος λόγω του φαινομένου της διαστολής του χρόνου και δίνεται από την:

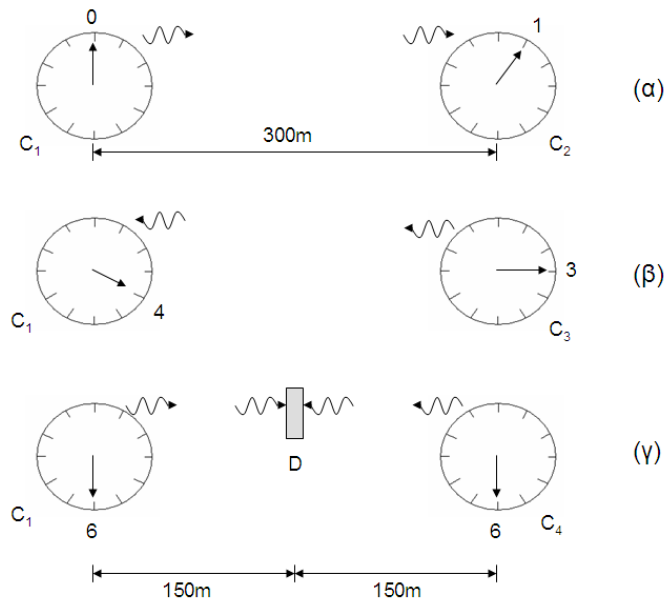
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_{1/2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1.8 \times 10^{-8}}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} \text{ sec} = 3 \times 10^{-8} \text{ sec}$$

Έτσι στο σύστημα του εργαστηρίου τα πιόνια διανύουν απόσταση ίση με:

$$d = v \cdot \Delta t = (0.8 \times 3 \times 10^8 \text{ m/sec}) (3 \times 10^{-8} \text{ sec}) = 7.20 \text{ m}$$

3.4.3 Μια και τα ρολόγια που κινούνται το ένα σε σχέση με το άλλο δείχνουν διαφορετικούς χρόνους, εισάγεται το εξής πρόβλημα: Πως μπορεί κάποιος να ισχυριστεί πως τα ρολόγια τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικές θέσεις στο ίδιο σύστημα αναφοράς είναι συγχρονισμένα, δηλαδή δείχνουν την ίδια ένδειξη στον ίδιο χρόνο; Σκεφτείτε έναν τρόπο να συγχρονίζετε τα ρολόγια.

Η θεωρία της σχετικότητας προσφέρει ένα πρακτικό ορισμό του συγχρονισμού, χρησιμοποιώντας παλμούς φωτός για να συνδέσει τα διάφορα ρολόγια. Θεωρήστε για παράδειγμα, ένα ρολόι C_1 που έχει ρυθμιστεί να εκπέμπει ένα φωτόνιο κατά την στιγμή που δείχνει μηδέν (Σχήμα 3.2 (α)). Ένα άλλο ρολόι C_2 , πανομοιότυπης κατασκευής, βρίσκεται σε ηρεμία σχετικά με το C_1 σε μια απόσταση $d=300\text{m}$. Το ρολόι C_2 έχει τεθεί να δείχνει $t=1\mu\text{sec}$ όταν δεχθεί το φωτόνιο. Με αυτόν τον τρόπο, αφού το φωτόνιο έχει μεταφέρει το “μήνυμα” του από το C_1 στο C_2 , λέμε, εξ’ ορισμού πως τα δύο ρολόγια είναι συγχρονισμένα.



Σχήμα 3.2

Η συνέπεια του παραπάνω ορισμού μπορεί να ελεγχθεί με διάφορους τρόπους. Ένας τρόπος φαίνεται Σχήμα 3.2(β): Αν το ρολόι C_2 εκπέμπει ένα φωτόνιο σε $t=3\mu\text{sec}$, το ρολόι C_1 θα πρέπει να δείχνει $t=4\mu\text{sec}$ όταν δεχθεί το φωτόνιο. Ένας άλλος τρόπος ελέγχου φαίνεται στο Σχήμα 3.2(γ): Ο ανιχνευτής D δέχεται ταυτόχρονα δύο φωτόνια. Τα ρολόγια είναι σύγχρονα εάν έδειχναν τις ίδιες ενδείξεις όταν εξέπεμψαν τα φωτόνια.

Με τον παραπάνω τρόπο είναι δυνατόν σε ένα σύστημα αναφοράς να συγχρονιστεί οποιοσδήποτε αριθμός ρολογιών. Ο συγχρονισμός των ρολογιών είναι μια σχετική αρχή. Αποτελεί θέμα *συμφωνίας* για παρατηρητές ακίνητους μεταξύ τους και θέμα *διαφωνίας* για παρατηρητές που κινούνται ο ένας σε σχέση με τον άλλο.

3.4.4 Θεωρείστε δύο παρατηρητές, τον O και τον O' ο οποίος ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα v ως προς τον O κατά μήκος του κοινού τους άξονα $x-x'$. Ένας χάρακας σύμφωνα με τον παρατηρητή O' σχηματίζει γωνία 30° με τον άξονα x' . Σύμφωνα με το παρατηρητή O ο ίδιος χάρακας σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x . Ποια είναι η ταχύτητα v ;

Έστω L' το μήκος του χάρακα στο σύστημα του παρατηρητή O' . Έχουμε:

$$\begin{aligned} L'_y &= L' \cdot \sin(\theta') \\ L'_x &= L' \cdot \cos(\theta') \end{aligned} \quad (1)$$

Για τον παρατηρητή O έχουμε:

$$\begin{aligned} L_y &= L'_y \\ L_x &= L'_x \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned} \quad (2)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη τις (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{L_y}{L_x} = \frac{L'_y}{L'_x \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{L' \cdot \sin(\theta')}{L' \cdot \cos(\theta') \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \tan(\theta') \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \\ \tan(\theta) &= \tan(\theta') \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \tan(45^\circ) = \tan(30^\circ) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v = 0.816c \end{aligned}$$

3.4.5 Ένα διαστημόπλοιο με ιδιομήκος 300m κάνει 0.750μsec για να προσπεράσει έναν ακίνητο παρατηρητή πάνω στη Γη. Υπολογίστε την ταχύτητα του διαστημοπλοίου σύμφωνα με τον παρατηρητή πάνω στη Γη.

Στο κινούμενο σύστημα του διαστημοπλοίου το μήκος του είναι $L' = 300m$.

Για τον ακίνητο παρατηρητή στη Γη έχουμε: $L = \frac{L'}{\gamma}$ και $\Delta t = 0.750 \mu sec$. Είναι όμως:

$$\Delta t = \frac{L}{v} \Rightarrow \Delta t = \frac{L'}{\gamma v} \Rightarrow \gamma v = \frac{L'}{\Delta t} \Rightarrow \gamma \beta c = \frac{L'}{\Delta t} \Rightarrow \beta c = \frac{L'}{\Delta t} \sqrt{1 - \beta^2}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε:

$$\begin{aligned} \beta^2 c^2 &= \left(\frac{L'}{\Delta t} \right)^2 (1 - \beta^2) \Rightarrow \beta^2 = \frac{(L' / \Delta t)^2}{c^2 + (L' / \Delta t)^2} = \frac{(4 \times 10^8)^2}{(3 \times 10^8)^2 + (4 \times 10^8)^2} = 0.64 \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta &= 0.8 \Rightarrow v = 0.8c \end{aligned}$$

3.4.6 Ένα ατομικό ρολόι κινείται με ταχύτητα $v = 1000 \text{ Km/h}$ για μία 1.00h ώρα όπως αυτή μετριέται με ένα ολόιδιο ρολόι που βρίσκεται ακίνητο στην επιφάνεια της Γης. Εάν μετά το τέλος του ταξιδιού τα δύο ρολόγια συγκριθούν ποια θα είναι η διαφορά τους; Ποιο θα πηγαίνει πίσω;

Το ατομικό ρολόι κινείται με ταχύτητα $v = 1000 \text{ Km/h} = 277.8 \text{ m/sec}$ άρα :

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{277.8 \text{ m/sec}}{3 \times 10^8 \text{ m/sec}} = 9.26 \times 10^{-7} \quad (1)$$

Για έναν παρατηρητή πάνω στη Γη $\Delta t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ sec}$. Ισχύει όμως πως:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} \quad (2)$$

Σε περιπτώσεις όπου $\beta \ll 1$ είναι πολύ χρήσιμα τα παρακάτω αναπτύγματα:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \beta^2} &\cong 1 - \frac{1}{2} \beta^2 \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} &\cong 1 + \frac{1}{2} \beta^2 \end{aligned}$$

Έτσι η (2) γίνεται:

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} = \Delta t \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Delta t - \Delta t' = \frac{1}{2} \beta^2 \Delta t = 0.5 (9.26 \times 10^{-7})^2 (3600 \text{ sec}) = 0.5 (85.74 \times 10^{-14}) (3600 \times 10^9) \text{ nsec} \Rightarrow$$

$$\Delta t - \Delta t' = 1.54 \text{ nsec}$$

Το ρολόι που κινείται θα πηγαίνει 1.54 nsec πίσω σε σχέση με το ρολόι πάνω στη Γη.

3.5 Προβλήματα

3.5.1 Πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα ενός διαστημοπλοίου το οποίο απομακρύνεται από την Γη έτσι ώστε οι αστροναύτες του να γερνούν στο μισό ρυθμό από ότι οι άνθρωποι πάνω στη Γη;

(Απάντηση: $v = 0.866c$)

3.5.2 Ένα σωματίδιο κινείται στο σύστημα του εργαστηρίου με ταχύτητα $v = 0.8c$ και διασπάται αφού διανύσει 3m. Ποιος είναι ο χρόνος ζωής του στο σύστημα ηρεμίας του;

(Απάντηση: $0.75 \times 10^{-8} \text{ sec}$).

3.5.3 Ένας κύβος στο σύστημα ηρεμίας του έχει όγκο $V = 1000 \text{ cm}^3$. Ένας παρατηρητής O' κινείται με ταχύτητα $v = 0.8c$ κατά την διεύθυνση μιας ακμής του κύβου. (α) Πόσος είναι ο όγκος του κύβου σύμφωνα με τον παρατηρητή O' . (β) Πόσος είναι ο όγκος του κύβου σύμφωνα με τον παρατηρητή O' εάν αυτός κινείται με την ίδια ταχύτητα παράλληλα σε μια διαγώνιο μιας έδρας του κύβου.

(Απάντηση: $V' = 600 \text{ cm}^3$).

3.5.4 Ένα διαστημόπλοιο προσπερνά την Γη με ταχύτητα v . Ένας αστροναύτης μέσα στο διαστημόπλοιο βλέπει πως η Γη έχει ελλειπτικό σχήμα με τον μέγιστο άξονα της έλλειψης έξι φορές μεγαλύτερο από τον μικρό. Ποια η ταχύτητα v του διαστημοπλοίου;

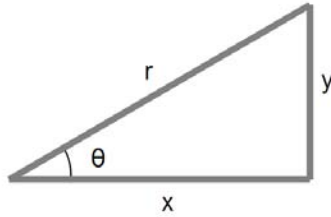
(Απάντηση: $v = 0.986c$).

3.5.5 Το ορθογώνιο τρίγωνο το οποίο εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα βρίσκεται σε ηρεμία. Για έναν παρατηρητή ο οποίος κινείται παράλληλα προς την πλευρά x με ταχύτητα $v = \beta c$ το τρίγωνο έχει πλευρές x' και y' , υποτείνουσα r' και εσωτερική γωνία θ' . (α) Γιατί ο κινούμενος παρατηρητής συμφωνεί με έναν ακίνητο ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο; (β) Αποδείξτε πως οι γωνίες θ και θ' συνδέονται με την σχέση:

$$\tan(\theta') = \frac{\tan(\theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

(γ) Αποδείξτε πως τα r και r' συνδέονται με την σχέση:

$$r' = r \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2(\theta)}$$



3.5.6 Ο οδηγός ενός νοικιασμένου σχετικιστικού αυτοκινήτου επιστρέφει το αυτοκίνητό του μετά από μία ώρα οδήγηση κατά την άποψη του. Ο πράκτορας που του το νοίκιασε λέει πως το αυτοκίνητο οδηγήθηκε επί δύο ώρες. Με ποια ταχύτητα έτρεχε το αυτοκίνητο;
(Απάντηση: $v = 0.866c$).

3.5.7 Ένα τετράγωνο στο σύστημα ηρεμίας του έχει εμβαδόν $E = 400\text{cm}^2$. Ένας παρατηρητής κινείται παράλληλα σε μια διαγώνιό του με ταχύτητα $v = 0.8c$. Πόσο είναι το εμβαδό του τετραγώνου σύμφωνα με αυτόν τον παρατηρητή;
(Απάντηση: $E' = 240\text{cm}^2$).

3.5.8 Ένα μιονίο δημιουργείται, από την αλληλεπίδραση ενός κοσμικού πρωτονίου με την ατμόσφαιρα, σε ύψος 10Km από την επιφάνεια της Γης. Πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα του μιονίου ώστε να φτάσει μέχρι την επιφάνεια της Γης; Ο χρόνος ζωής των μιονίων στο σύστημα ηρεμίας τους είναι $2.2\mu\text{sec}$.
(Απάντηση: $v = 0.9978c$).

3.5.9 Ο Πέτρος και ο Παύλος είναι δίδυμοι. Σε ηλικία 20 ετών ο Πέτρος μπαίνει σε ένα διαστημόπλοιο το οποίο κινείται με ταχύτητα $v = 0.8c$ και πηγαίνει σε ένα κοντινό άστρο. Μόλις φτάνει σε αυτό αμέσως ξεκινάει το ταξίδι της επιστροφής. Φτάνει στη Γη σε ηλικία 28 ετών. (α) Ποια είναι η ηλικία του Παύλου την στιγμή της επιστροφής του Πέτρου (β) Σε ποια απόσταση από την Γη βρίσκεται ο αστέρας που επισκέφθηκε ο Πέτρος;
(Απάντηση: α) 13.3γ β) $4.964 \times 10^{16}\text{ m}$).

3.5.10 Δύο παρατηρητές Α και Β στέκονται ο ένας σε απόσταση 50cm από τον άλλο. Καθώς μια ράβδος μήκους 1m περνά δίπλα τους, βρίσκουν ότι είναι απέναντι στα δύο άκρα της ράβδου συγχρόνως. (α) ποια η ταχύτητα της ράβδου; (β) Για έναν παρατηρητή στο σύστημα αναφοράς της ράβδου πόσο απέχουν οι Α και Β;
(Απάντηση: α) $v = 0.886c$ β) 25cm).

3.5.11 Ένα διαστημόπλοιο εκτοξεύεται από την Γη. Μετά από μια μικρή περίοδο επιτάχυνσης αποκτά σταθερή ταχύτητα ίση με $v = 0.7c$. Οι πυρηνικές μπαταρίες του παρέχουν αρκετή ενέργεια ώστε να έχει συνεχώς σε λειτουργία τον πομπό με το οποίο στέλνει δεδομένα στη Γη. Οι μπαταρίες του έχουν χρόνο ζωής 15 γ μετρημένο στο σύστημα αναφοράς του. (α) Πόση είναι η διάρκεια ζωής των μπαταριών του σύμφωνα με έναν παρατηρητή πάνω στη Γη. (β) Σύμφωνα με έναν παρατηρητή πάνω στη Γη πόσο μακριά θα βρίσκεται το διαστημόπλοιο όταν οι μπαταρίες του τελειώσουν. (γ) Σύμφωνα με έναν παρατηρητή μέσα στο διαστημόπλοιο πόσο μακριά θα βρίσκεται αυτό από την Γη όταν οι μπαταρίες του τελειώσουν. (δ) Για πόσο συνολικά χρόνο μετά την εκτόξευση του διαστημοπλοίου το κέντρο ελέγχου θα λαμβάνει δεδομένα από αυτό;

(Απάντηση: α) 21y β) 14.7ℓy γ) 10.5ℓy δ) 35.7y).

3.5.12 Τα ταξί ρουκέτες του μέλλοντος κινούνται στο ηλιακό σύστημα με ταχύτητα ίση με το μισό της ταχύτητας του φωτός. Οι οδηγοί παίρνουν 100€ την ώρα όπως την μετρούν τα ταξίμετρα. Η ομοσπονδία των οδηγών ταξί ζητά όπως η πληρωμή να γίνεται με βάση τον χρόνο της Γης και όχι τον χρόνο του ταξί. Αν γίνει δεκτό το αίτημά τους πόσο θα αυξηθεί το κόμιστρο;

3.5.13 Ένα μιονίο με ενέργεια 10 GeV επιδέχεται ένα παράγοντα διαστολής χρόνου 95. Πόσο διαφέρει η ταχύτητα του μιονίου από την ταχύτητα του φωτός.

(Απάντηση: $c - v = 5.54 \times 10^{-5} c$).

3.5.14 Τα ηλεκτρόνια σε μία τηλεόραση παλιάς τεχνολογίας επιταχύνονται στον καθοδικό της σωλήνα σε μια ταχύτητα $10^8 \text{ m/sec} = 1/3 c$. Όπως το μετράμε μέσα στο δωμάτιο, το μήκος του σωλήνα είναι 30 cm. Ποιο το μήκος του σε ένα σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται μαζί με το ηλεκτρόνιο με την τελική του ταχύτητα;

(Απάντηση: 28.28 cm).

3.5.15 Ακίνητα φορτισμένα πιόνια έχουν ένα μέσο χρόνο ζωής ίσο με $2.6 \times 10^{-8} \text{ sec}$. Τα φορτισμένα πιόνια που αναδύονται από ένα ορισμένο επιταχυντή έχουν ταχύτητα $2.4 \times 10^8 \text{ m/sec}$ (0.8 c). α) Πόσος είναι ο μέσος χρόνος ζωής των κινούμενων πιονίων που μετράμε στο σύστημα του εργαστηρίου; β) Πόση είναι η μέση απόσταση που διάνυσαν τα πιόνια στο εργαστήριο πριν διασπαστούν; γ) Πόση είναι η μέση απόσταση από τον επιταχυντή μέχρι τα σημεία διάσπασης στο σύστημα ηρεμίας των πιονίων;

(Απάντηση: α) $4.33 \times 10^{-8} \text{ sec}$ β) 10.4m γ) 6.24m).

3.5.16 Ενώ ο Πέτρος παραμένει στη Γη, η δίδυμη αδελφή του Βαρβάρα ταξιδεύει με 60% της ταχύτητας του φωτός μέχρι ένα γειτονικό άστρο και επιστρέφει πάλι στη Γη. Και οι δύο ήταν 20 χρονών όταν άρχισε το ταξίδι και ο Πέτρος είναι 40 χρονών όταν τελειώνει. α) Πόσων χρονών ήταν η Βαρβάρα όταν το διαστημόπλοιο της αντέστρεψε την πορεία του και κατευθύνθηκε προς τη Γη; β) Πόσων χρονών είναι στο τέλος του ταξιδιού;

Κεφάλαιο 4 :

Οι μετασχηματισμοί Lorentz.

4.1 Οι μετασχηματισμοί Lorentz – Περιγραφή ενός γεγονότος.

Θεωρείστε δύο παρατηρητές, τον Ο και τον Ο' ο οποίος ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα v ως προς τον Ο κατά μήκος του κοινού τους άξονα $x-x'$. Έστω Ρ ένα γεγονός με συντεταγμένες (x, y, z, t) στο σύστημα S (όπου ο Ο είναι ακίνητος) και με συντεταγμένες (x', y', z', t') στο σύστημα S' (όπου ο Ο' είναι ακίνητος). Οι συντεταγμένες (x, y, z, t) και (x', y', z', t') συνδέονται μεταξύ τους με τον Μετασχηματισμό Συντεταγμένων Lorentz:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{aligned} \right\} S' \rightarrow S \quad (4.1)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Lorentz που συνδέει τις συντεταγμένες (x', y', z', t') με τις (x, y, z, t) είναι:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned} \right\} S \rightarrow S' \quad (4.2)$$

4.2 Οι μετασχηματισμοί Lorentz – Περιγραφή ζεύγους γεγονότων.

Έστω ένα γεγονός P_1 με συντεταγμένες (x_1, y_1, z_1, t_1) στο σύστημα S και με συντεταγμένες (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) στο σύστημα S' και ένα δεύτερο ξεχωριστό γεγονός P_2 με συντεταγμένες (x_2, y_2, z_2, t_2) και (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) αντίστοιχα. Μπορούμε να ορίσουμε την απόσταση των δύο γεγονότων ως $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta x' = x'_2 - x'_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ κτλ. Τα $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$ και $(\Delta x', \Delta y', \Delta z', \Delta t')$ συνδέονται μεταξύ τους με τον Μετασχηματισμό Lorentz ως:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ \Delta y &= \Delta y' \\ \Delta z &= \Delta z' \\ \Delta t &= \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) \end{aligned} \right\} S' \rightarrow S \quad (4.3)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Lorentz που συνδέει τα $(\Delta x', \Delta y', \Delta z', \Delta t')$ με τα $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$ είναι:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x' &= \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta y' &= \Delta y \\ \Delta z' &= \Delta z \\ \Delta t' &= \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) \end{aligned} \right\} S \rightarrow S' \quad (4.4)$$

4.3 Ο μετασχηματισμός Lorentz ταχυτήτων.

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο τις σχέσεις (4.1) και (4.2) προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις μετασχηματισμών ταχύτητας κατά Lorentz.

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \\ u_y &= \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right)} \\ u_z &= \frac{u'_z}{\gamma \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right)} \end{aligned} \right\} S' \rightarrow S \quad (4.5)$$

Και ο αντίστροφος μετασχηματισμός:

$$\left. \begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ u'_y &= \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)} \\ u'_z &= \frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)} \end{aligned} \right\} S \rightarrow S' \quad (4.6)$$

Προσοχή: Σε προβλήματα τα οποία αφορούν ταχύτητες υπάρχουν τρία αντικείμενα τα οποία εμπλέκονται: οι δύο παρατηρητές O και O' και ένα σώμα Σ . Το σώμα Σ έχει τις εξής δύο ταχύτητες: την ταχύτητα (u_x, u_y, u_z) ως προς τον παρατηρητή O και την ταχύτητα (u'_x, u'_y, u'_z) ως προς τον παρατηρητή O' . Η ποσότητα v η οποία εμφανίζεται στις παραπάνω σχέσεις αναφέρεται στην ταχύτητα του O' ως προς τον O .

Μερικές άμεσες συνέπειες των Μετασχηματισμών Lorentz είναι οι ακόλουθες:

- Ορίζουν ως φυσικό όριο στην ταχύτητα το c . Για $v > c$ ο όρος $\sqrt{1 - (v^2 / c^2)}$ γίνεται φανταστικός αριθμός.
- Εισάγουν μία νέα έννοια: την ανάμειξη του χώρου με τον χρόνο. Αυτό οδηγεί αυτόματα στην ιδέα του τετραδιάστατου χωροχρόνου.

- Στην περίπτωση όπου $v \ll c$ οι μετασχηματισμοί Lorentz ταυτίζονται με τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου. Υπακούουν δηλαδή την Αρχή της Αντιστοιχίας σύμφωνα με την οποία κάθε νέα θεωρία της Φυσικής οφείλει να επαληθεύει τα αποτελέσματα στο κλασικό όριο.

4.4 Λυμένα Προβλήματα

4.4.1 Η διαστολή του χρόνου και η συστολή του μήκους που εξετάσαμε στο κεφάλαιο 3 αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της γενικής σχέσης των μετρήσεων χώρου και χρόνου μεταξύ δύο αδρανειακών παρατηρητών και προέρχονται από το δεύτερο αξίωμα του Einstein που απαιτεί c =σταθερή. Να δείξετε πως η διαστολή του χρόνου και η συστολή του μήκους μπορούν να προκύψουν από τις εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz.

Η διαστολή του χρόνου:

Στο κινούμενο σύστημα S' έχουμε πως $\Delta x' = 0$. Από τις εξισώσεις (4.3) βρίσκουμε πως:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) = \gamma \Delta t'$$

Η οποία εκφράζει την σχέση για την διαστολή του χρόνου (εξίσωση 3.1).

Η συστολή του μήκους:

Στο ακίνητο σύστημα S έχουμε πως $\Delta t = 0$. Από τις εξισώσεις (4.3) βρίσκουμε πως:

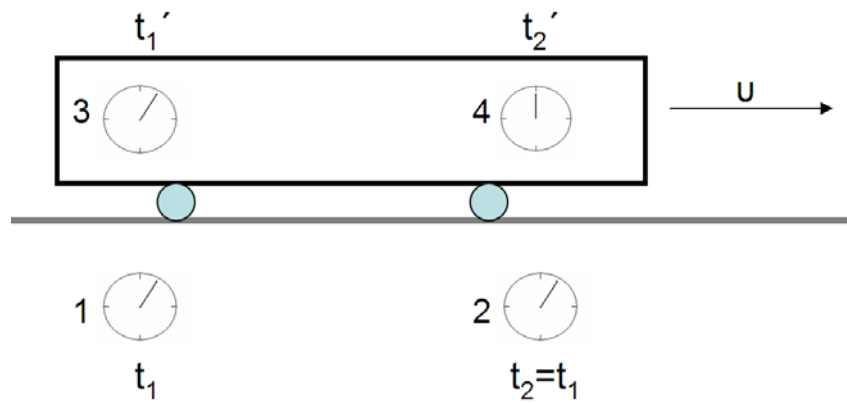
$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma (\Delta x - v \Delta t) = \gamma \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$$

Η οποία εκφράζει την σχέση για την συστολή των μηκών (εξίσωση 3.2).

4.4.2 Δείξτε με ένα απλό παράδειγμα πως με βάση τους μετασχηματισμούς Lorentz προκύπτει άμεσα η σχετικότητα του ταυτόχρονου.

Θεωρήστε ένα τραίνο το οποίο κινείται με ταχύτητα v όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 4.1. Θεωρήστε τα ρολόγια 1 και 2 ακίνητα ως προς το έδαφος και τα ρολόγια 3 και 4 ακίνητα στο σύστημα του τραίνου. Το πέρασμα του ρολογιού 3 δίπλα από το ρολόι 1 και του ρολογιού 4 δίπλα από το ρολόι 2 είναι ταυτόχρονα γεγονότα σύμφωνα με τον παρατηρητή του εδάφους και άρα $\Delta t = 0$. Σύμφωνα με την τελευταία εξίσωση των σχέσεων (4.3) έχουμε:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) = 0 \Rightarrow \Delta t' = -\frac{v}{c^2} \Delta x' \quad (1)$$



Σχήμα 4.1

Το τελευταίο αποτέλεσμα ορίζει την σχετικότητα του ταυτόχρονου. Γεγονότα τα οποία οι παρατηρητές του εδάφους κρίνουν πως συμβαίνουν ταυτόχρονα ($\Delta t = 0$), οι παρατηρητές του τραίνου κρίνουν ότι συμβαίνουν με μια διαφορά χρόνου $\Delta t'$ η οποία εξαρτάται από την απόστασή τους στο χώρο.

Το αρνητικό πρόσημο στην παραπάνω σχέση (1) σημαίνει πως από τα δύο γεγονότα τα οποία ο εξωτερικός παρατηρητής έκρινε πως ήταν ταυτόχρονα, το ένα που συμβαίνει στο μπροστινό μέρος του τραίνου συμβαίνει νωρίτερα σύμφωνα με τα ρολόγια του τραίνου, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1. Είναι επίσης φανερό από το παραπάνω σχήμα πως οι παρατηρητές του εδάφους θεωρούν πως τα ρολόγια του τραίνου όχι μόνο προχωρούν αργά αλλά είναι επίσης και ασυγχρόνιστα.

Τέλος σημειώνουμε σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz, γεγονότα τα οποία συμπίπτουν και ως προς τον χώρο και τον χρόνο σε ένα σύστημα αναφοράς ($\Delta x = \Delta t = 0$) συμπίπτουν επίσης ως προς τον χώρο και τον χρόνο σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα αναφοράς ($\Delta x' = \Delta t' = 0$).

4.4.3 Δείξτε ότι οι εξισώσεις του αντίστροφου μετασχηματισμού Lorentz δίνουν επίσης το αποτέλεσμα $\Delta t' = -\frac{v}{c^2} \Delta x'$ στο προηγούμενο πρόβλημα.

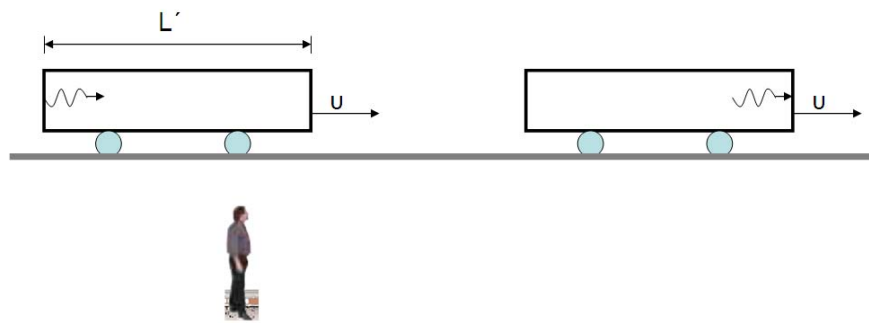
Στο σχήμα 4.1 το πέρασμα του ρολογιού 3 δίπλα από το ρολόι 1 και του ρολογιού 4 δίπλα από το ρολόι 2 είναι ταυτόχρονα γεγονότα σύμφωνα με τον παρατηρητή του εδάφους και άρα $\Delta t = 0$. Έτσι η πρώτη και η τέταρτη εξίσωση των σχέσεων (4.4) γίνονται:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \Rightarrow \Delta x' = \gamma\Delta x$$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) \Rightarrow \Delta t' = -\gamma\frac{v}{c^2}\Delta x$$

Εάν απαλείψουμε από τις παραπάνω δύο σχέσεις το Δx έχουμε το αποτέλεσμα $\Delta t' = -\frac{v}{c^2} \Delta x'$.

4.4.4 Ένα τρένο κινείται όπως στο παρακάτω σχήμα 4.2 με ταχύτητα v . Ένα φωτόνιο ξεκινά από το πίσω μέρος του βαγονιού και φτάνει στο μπροστινό. (α) Υπολογίστε και συγκρίνετε τους χρόνους πτήσης του φωτονίου για έναν παρατηρητή πάνω στο τρένο και έναν παρατηρητή που βρίσκεται ακίνητος στην αποβάθρα. (β) Κάντε τους υπολογισμούς σας και για την περίπτωση που το φωτόνιο ξεκινά από το μπροστινό μέρος του τρένου και καταλήγει στο πίσω.



Σχήμα 4.2

(α) Σύμφωνα με τον παρατηρητή στο τρένο είναι:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= x'_2 - x'_1 = L' \\ \Delta t' &= \frac{\Delta x'}{c} = \frac{L'}{c}\end{aligned}\quad (1)$$

Σύμφωνα με τον παρατηρητή στην αποβάθρα είναι:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{L'}{c} + \frac{\beta}{c} L'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\frac{L'}{c}(1 + \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{L'}{c} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει πως $\Delta t > \Delta t'$.

(β) Σύμφωνα με τον παρατηρητή στο τρένο είναι:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= x'_2 - x'_1 = -L' \\ \Delta t' &= \frac{|\Delta x'|}{c} = \frac{L'}{c}\end{aligned}\quad (3)$$

Σύμφωνα με τον παρατηρητή στην αποβάθρα είναι:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{L'}{c} - \frac{\beta}{c} L'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\frac{L'}{c}(1 - \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{L'}{c} \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) προκύπτει πως $\Delta t < \Delta t'$. Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (α) και (β) συμπεραίνουμε πως η διάρκεια ενός ανισότοπου φαινομένου εξαρτάται από την αρχική και την τελική θέση του φαινομένου.

4.4.5 Ένας αστροναύτης από το πίσω μέρος του διαστημοπλοίου του ρίχνει μια σφαίρα προς ένα στόχο που βρίσκεται στο μπροστινό μέρος. Το διαστημόπλοιο έχει μήκος $L=60\text{m}$ και η σφαίρα κινείται με ταχύτητα $u = 0.8c$ όπως αυτά μετρούνται από τον αστροναύτη. (α) Βρείτε τον χρόνο που χρειάζεται η σφαίρα να φτάσει στο στόχο όπως τον μετράει ο αστροναύτης. (β) Εάν το διαστημόπλοιο κινείται με ταχύτητα $v = 0.6c$ σε σχέση με την Γη βρείτε τον χρόνο πτήσης της σφαίρας σύμφωνα με έναν παρατηρητή πάνω στη Γη. (γ) Ποια η ταχύτητα της σφαίρας σύμφωνα με τον παρατηρητή πάνω στη Γη;

(α) Σύμφωνα με τον αστροναύτη είναι:

$$\Delta t' = \frac{L}{u} = \frac{60\text{ m}}{0.8 \times 3 \times 10^8\text{ m/sec}} = 2.5 \times 10^{-7}\text{ sec}$$

(β) Σύμφωνα με τον παρατηρητή στη Γη είναι:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2.5 \times 10^{-7} \text{ sec} + \frac{(0.6)(60 \text{ m})}{3 \times 10^8 \text{ m/sec}}}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = 4.63 \times 10^{-7} \text{ sec}$$

(γ) Σύμφωνα με τον παρατηρητή στη Γη είναι:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = \frac{0.8c + 0.6c}{1 + \frac{0.8c \cdot 0.6c}{c^2}} = 0.946c$$

4.4.6 Υποθέστε ότι ένας παρατηρητής Ο προσδιορίζει ότι δύο γεγονότα απέχουν χωρικά $3.6 \times 10^8 \text{ m}$ και συμβαίνουν σε χρονική διαφορά 2 sec. Ποιος είναι ο ιδιοχρόνος μεταξύ των δύο αυτών γεγονότων;

Υπάρχει ένας δεύτερος παρατηρητής Ο', ο οποίος κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με τον Ο, και που παρατηρεί πως τα δύο γεγονότα λαμβάνουν χώρα στην ίδια χωρική θέση, δηλαδή $\Delta x' = 0$. Τότε ο ιδιοχρόνος μεταξύ των δύο γεγονότων είναι το χρονικό διάστημα $\Delta t'$ σύμφωνα με τον Ο'. Έχουμε:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 0 = \frac{(3.6 \times 10^8 \text{ m}) - v(2 \text{ sec})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v = 1.8 \times 10^8 \text{ m/sec} = 0.6c$$

και

$$\Delta t' = \frac{\Delta t + \frac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(2 \text{ sec}) + \frac{0.6 \times 3.6 \times 10^8 \text{ msec}}{3 \times 10^8 \text{ m/sec}}}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = 1.6 \text{ sec}$$

4.4.7 Η ταχύτητα ενός διαστημοπλοίου σε σχέση με ένα διαστημικό σταθμό είναι $v = 0.8c$, και οι παρατηρητές Ο' και Ο στο διαστημόπλοιο και τον διαστημικό σταθμό, αντίστοιχα, συγχρονίζουν τα ρολόγια τους έτσι ώστε $t = t' = 0$ όταν $x = x' = 0$. Υποθέστε ότι ο Ο παρατηρεί το ρολόι του Ο' με ένα τηλεσκόπιο. Τι ώρα βλέπει σε αυτό όταν το δικό του δείχνει 30 sec;

Ας ορίσουμε το γεγονός Α ως την εκπομπή ενός φωτεινού σήματος από τον παρατηρητή Ο' και ως γεγονός Β την λήψη του φωτεινού σήματος από τον παρατηρητή Ο. Το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό του χρόνου t'_A . Από τις εξισώσεις (4.1) έχουμε:

$$t_A = \frac{t'_A + \frac{v}{c^2} x'_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t'_A + \frac{v}{c^2} (0)}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = \frac{t'_A}{0.6} \quad (1)$$

$$x_A = \frac{x'_A + vt'_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0 + (0.8 \times 3 \times 10^8 \text{ m/sec}) t'_A}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = (4 \times 10^8 \text{ m/sec}) t'_A$$

Το φωτεινό σήμα ταξιδεύει προς την αρνητική διεύθυνση με ταχύτητα c , έτσι έχουμε:

$$x_B - x_A = -c(t_B - t_A) \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τις (1) στην (2) έχουμε:

$$0 - (4 \times 10^8 \text{ m/sec}) t'_A = -(3 \times 10^8) \left(30 \text{ sec} - \frac{t'_A}{0.6} \right) \Rightarrow t'_A = 10 \text{ sec}$$

Προσοχή: Το πρόβλημα αυτό δείχνει την διαφορά μεταξύ του παρατηρώ ένα γεγονός και του υπολογίζω τις συντεταγμένες του ίδιου γεγονότος. Με υπόδειγμα το παραπάνω προσπαθήστε να λύσετε το πρόβλημα 4.5.7.

4.4.8 Το διαστημόπλοιο Α ταξιδεύει προς τα δεξιά και το διαστημόπλοιο Β προς τα αριστερά με ταχύτητες $0.8c$ και $0.6c$ ως προς τη Γη, αντίστοιχα. Ποια η ταχύτητα του διαστημοπλοίου Α σε σχέση με το Β;

Θεωρούμε την εξής αντιστοιχία: ο παρατηρητής Ο αντιστοιχεί στην Γη, ο παρατηρητής Ο' στο διαστημόπλοιο Β και στο κινούμενο σώμα αντιστοιχεί στο διαστημόπλοιο Α. Έχουμε:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{(0.8c) - (-0.6c)}{1 - \frac{(-0.6c)(0.8c)}{c^2}} = 0.946c$$

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε την εξής αντιστοιχία: ο παρατηρητής Ο αντιστοιχεί στο διαστημόπλοιο Α, ο παρατηρητής Ο' στο διαστημόπλοιο Β και στο κινούμενο σώμα αντιστοιχεί η Γη. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \Rightarrow 0.6c = \frac{-(0.8c) - v}{1 - (v/c^2)(-0.8c)} \Rightarrow v = -0.946c$$

Η τελευταία απάντηση συμφωνεί με την πρώτη. Το αρνητικό πρόσημο εμφανίζεται γιατί η ταχύτητα v είναι η ταχύτητα του O' σε σχέση με τον O , δηλαδή η ταχύτητα του B ως προς το A .

4.4.9 Λύστε το προηγούμενο πρόβλημα θεωρώντας πως το διαστημόπλοιο A ταξιδεύει με ταχύτητα $0.8c$ στην διεύθυνση $+y$ σε σχέση με την Γ . (Το διαστημόπλοιο B ταξιδεύει πάντα με ταχύτητα $0.6c$ στην διεύθυνση $-x$ σε σχέση με την Γ).

Θεωρούμε την εξής αντιστοιχία: Ο παρατηρητής O αντιστοιχεί στην Γ , ο παρατηρητής O' στο διαστημόπλοιο B και στο κινούμενο σώμα αντιστοιχεί στο διαστημόπλοιο A . Έχουμε:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (v/c^2)u_x} = \frac{(0) - (-0.6c)}{1 - 0} = 0.6c$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{1 - (v/c^2)u_x} = \frac{(0.8c)\sqrt{1 - (0.6)^2}}{1 - 0} = 0.64c$$

Άρα:

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{(0.6c)^2 + (0.64c)^2} = 0.88c$$

και

$$\tan(\varphi') = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{0.64c}{0.6c} = 1.07 \Rightarrow \varphi' = 46.8^\circ$$

4.4.10 Δείξτε ότι η ποσότητα:

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz.

Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Lorentz έχουμε:

$$\Delta x^2 = \left[\frac{\Delta x' + v \Delta t'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right]^2 = \frac{1}{1 - (v^2/c^2)} (\Delta x'^2 + v^2 \Delta t'^2 + 2v \Delta x' \Delta t')$$

$$\Delta y^2 = \Delta y'^2$$

$$\Delta z^2 = \Delta z'^2$$

$$\Delta t^2 = \left[\frac{\Delta t' + (v/c^2) \Delta x'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right]^2 = \frac{1}{1 - (v^2/c^2)} \left(\frac{v^2}{c^4} \Delta x'^2 + \Delta t'^2 + \frac{2v}{c^2} \Delta x' \Delta t' \right)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω στην ποσότητα βρίσκουμε πως:

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$$

4.5 Προβλήματα

4.5.1 Το τραίνο που εικονίζεται στο σχήμα 4.1 συνεχίζει την πορεία του προς τα μπροστά. Τη στιγμή που το ρολόι 3 στο πίσω μέρος του βαγονιού περνά μπροστά από το ρολόι 2 του εδάφους, βρείτε τι δείχνουν τα δύο αυτά ρολόγια. Θεωρείστε L την απόσταση των ρολογιών 1 και 2.

(Απάντηση: Ένδειξη ρολογιού 2 = $t_1 + \frac{L}{v}$, Ένδειξη ρολογιού 3 = $t_1 + \frac{L}{v} \sqrt{1 - \beta^2}$)

4.5.2 Ένας παρατηρητής Ο παρατηρεί πως δύο γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα και σε χωρική απόσταση 600 Km. Ένας δεύτερος παρατηρητής Ο' κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς τον Ο και παρατηρεί πως τα δύο γεγονότα λαμβάνουν χώρα σε απόσταση 1200 Km το ένα μακριά από το άλλο. Πόση είναι η χρονική διαφορά των δύο γεγονότων σύμφωνα με τον Ο';

(Απάντηση: -3.46×10^{-3} sec).

4.5.3 Η ράβδος Α μήκους ενός μέτρου, κινείται με την μισή ταχύτητα του φωτός και περνά τη ράβδο του ενός μέτρου Β η οποία είναι ακίνητη στο εργαστήριο (βλέπε παρακάτω σχήμα). Τη χρονική στιγμή, στο εργαστήριο, που η αρχή της κινούμενης ράβδου συμπίπτει με την αρχή της ακίνητης ράβδου, πού, σύμφωνα με τον παρατηρητή στο εργαστήριο, βρίσκεται το τέλος της κινούμενης ράβδου;

(Απάντηση: 0.134 m).



4.5.4 Ένα φανταστικό σχετικιστικό βαγόνι τραίνου, όταν είναι ακίνητο, έχει μήκος 14m. Για να μετρήσουν το μήκος του καθώς κινείται με 99% της ταχύτητας του φωτός, οι παρατηρητές του εδάφους σημειώνουν τη θέση της αρχής του βαγονιού σε μια δεδομένη χρονική στιγμή και τη θέση του τέλους του κατά την ίδια χρονική στιγμή. (α) Δείξτε ότι οι παρατηρητές που βρίσκονται πάνω στο τραίνο θεωρούν ότι πέρασαν 46 nsec μεταξύ των δύο αυτών μετρήσεων. (β) Ποιο είναι το μήκος του κινούμενου βαγονιού που μετρούν οι παρατηρητές στο έδαφος.

4.5.5 Ένα διαστημόπλοιο με μήκος 90m ταξιδεύει με ταχύτητα $0.8c$ ως προς το έδαφος. Καθώς η μύτη του διαστημοπλοίου περνά μπροστά από έναν ακίνητο παρατηρητή στο έδαφος, ένα φωτόνιο εκπέμπεται από την μύτη του διαστημοπλοίου προς την ουρά του. Πόσο χρόνο

κάνει το φωτόνιο να φτάσει στην ουρά (α) σύμφωνα με έναν ακίνητο παρατηρητή μέσα στο διαστημόπλοιο και (β) σύμφωνα με τον παρατηρητή στο έδαφος;

(Απάντηση: (α) $3 \times 10^{-7} \text{ sec}$ (β) $1 \times 10^{-7} \text{ sec}$)

4.5.6 Στο προηγούμενο πρόβλημα: Πότε η ουρά του διαστημοπλοίου περνά μπροστά από τον παρατηρητή στο έδαφος (α) σύμφωνα με τον ακίνητο παρατηρητή μέσα στο διαστημόπλοιο και (β) σύμφωνα με τον παρατηρητή στο έδαφος;

(Απάντηση: (α) $3.75 \times 10^{-7} \text{ sec}$ (β) $2.25 \times 10^{-7} \text{ sec}$)

4.5.7 Αναφερόμενοι στο λυμένο πρόβλημα 4.4.7 : Εάν αντίστοιχα ο O' παρατηρεί το ρολόι του O με ένα τηλεσκόπιο, τι ώρα βλέπει σε αυτό όταν και το δικό του δείχνει 30 sec;

(Απάντηση: 100 sec)

4.5.8 Ένας κόκκινος λαμπτήρας ανάβει στη θέση A με συντεταγμένες $x_A = 3 \text{ m}$ και $t_A = 1 \times 10^{-9} \text{ sec}$, και ένας μπλε λαμπτήρας ανάβει στη θέση B με συντεταγμένες $x_B = 5 \text{ m}$ και $t_B = 9 \times 10^{-9} \text{ sec}$, όπως καθορίζονται από έναν ακίνητο παρατηρητή O . Ένας παρατηρητής O' κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος του κοινού άξονα $x-x'$. Σύμφωνα με τον O' οι δύο λαμπτήρες ανάβουν στην ίδια χωρική θέση. (α) Βρείτε την σχετική ταχύτητα των δύο παρατηρητών. (β) Βρείτε την κοινή χωρική θέση των λαμπτήρων σύμφωνα με τον O' (γ) Σε ποια χρονική στιγμή ανάβει το κόκκινο φως σύμφωνα με τον O' .

(Απάντηση: (α) $2.5 \times 10^8 \text{ m/sec}$ (β) 4.97 m (γ) $-1.33 \times 10^{-8} \text{ sec}$)

4.5.9 Δύο πίδακες ύλης εκτοξεύονται από το κέντρο ενός ραδιογαλαξία σε αντίθετες κατευθύνσεις. Η ταχύτητα των δύο πιδάκων σε σχέση με τον γαλαξία είναι $0.75c$. Υπολογίστε την ταχύτητα του ενός πίδακα σε σχέση με τον άλλο.

(Απάντηση: (α) $0.96 c$)

4.5.10 Ένα διαστημόπλοιο έχει μήκος 150 m και κινείται με ταχύτητα $0.6c$ σε σχέση με μια διαστημική αποβάθρα. Καθώς η ουρά του διαστημοπλοίου περνάει μπροστά από ένα ακίνητο παρατηρητή πάνω στην διαστημική αποβάθρα, αυτός ανάβει μια δέσμη φωτός προς την κατεύθυνση του μπροστινού μέρους του διαστημοπλοίου. (α) Σε ποια απόσταση από την αποβάθρα θα βρίσκεται το μπροστινό μέρος του διαστημοπλοίου όταν το φως φτάσει σε αυτό; (β) Πόσος χρόνος θα έχει παρέλθει μεταξύ της εκπομπής και της άφιξης του φωτός σε σχέση με τον παρατηρητή στην αποβάθρα; (γ) Πόσος χρόνος θα έχει παρέλθει μεταξύ της εκπομπής και της άφιξης του φωτός σε σχέση με έναν παρατηρητή ο οποίος βρίσκεται στο μπροστινό μέρος του διαστημοπλοίου;

(Απάντηση: (α) 300 m (β) 10^{-6} sec (γ) $0.5 \times 10^{-6} \text{ sec}$)

4.5.11 Ένα φως φάρου σε ένα ορισμένο πλανήτη ανάβει μια φορά κάθε ένα msec όπως μετριέται με τα ρολόγια του πλανήτη αυτού. Στο σύστημα αναφοράς ενός στόλου περαστικών Αρειανών το φως κινείται κατά 400m μεταξύ διαδοχικών εκπομπών του φάρου. (α) Ποια είναι η ταχύτητα του στόλου σε σχέση με τον πλανήτη; (β) Ποιος είναι ο χρόνος που μετρούν οι Αρειανοί μεταξύ διαδοχικών εκπομπών;

(Απάντηση: (α) $v = 0.8c$ (β) $\Delta t = 1.66 \text{ msec}$)

4.5.12 Ένα σωματίδιο κινείται με ταχύτητα $0.8c$ σχηματίζοντας γωνία 30° με το άξονα των x , σύμφωνα με έναν παρατηρητή O . Ποια είναι η ταχύτητα του σωματιδίου σύμφωνα με έναν δεύτερο παρατηρητή O' , ο οποίος κινείται με ταχύτητα $-0.6c$ κατά μήκος του κοινού άξονα $x-x'$;

(Απάντηση: $u' = 0.941c$ $\varphi' = 13.9^\circ$)

4.5.13 Ένας παρατηρητής O' κινείται κατά μήκος του άξονα $x-x'$ με ταχύτητα $c/2$ σε σχέση με τον ακίνητο παρατηρητή O . Ο παρατηρητής O διαπιστώνει πως ένα σωματίδιο κινείται στην διεύθυνση $+y$ με ταχύτητα $c/\sqrt{3}$. Υπολογίστε την ταχύτητα του σωματιδίου σε σχέση με τον O' .

(Απάντηση: $u' = c/\sqrt{2}$ / $\varphi' = 135^\circ$)

4.5.14 Μια ρουκέτα που πηγαίνει από την Γη στον Δία περνά δίπλα από τον Άρη με μια σχετική ταχύτητα $0.4c$. Οι πειραματικοί που βρίσκονται μέσα στη ρουκέτα παρατηρούν δύο άλλα άγνωστα διαστημόπλοια, που το ένα κινείται προς τον Δία και το άλλο προς την Γη, αμφότερα με ταχύτητα $0.8c$ σχετικά με την ρουκέτα. Ποια ταχύτητα έχουν τα δύο διαστημόπλοια σύμφωνα με τους κατοίκους του Άρη;

4.5.15 Θεωρήστε έναν ραδιενεργό πυρήνα ο οποίος κινείται με σταθερή ταχύτητα $0.5c$ σχετικά με το σύστημα του εργαστηρίου. (α) Ο πυρήνας εκπέμπει ένα ηλεκτρόνιο με ταχύτητα $0.9c$ σε σχέση με αυτόν κατά την διεύθυνση της κίνησής του. Υπολογίστε την ταχύτητα του ηλεκτρονίου στο σύστημα του εργαστηρίου. (β) Υποθέστε πως ο πυρήνας εκπέμπει το ηλεκτρόνιο με ταχύτητα $0.9c$ σε σχέση με αυτόν κάθετα στην διεύθυνση της κίνησής του. Υπολογίστε ξανά την ταχύτητα του ηλεκτρονίου στο σύστημα του εργαστηρίου.

(Απάντηση: (α) $u = 0.966c$ (β) $u = 0.926c$ $\varphi = 57.3^\circ$)

4.5.16 Σε χρόνο $t = 0$ ο παρατηρητής O εκπέμπει ένα φωτόνιο σε μια διεύθυνση 60° σε σχέση με το άξονα x . Ένας δεύτερος παρατηρητής O' ταξιδεύει με ταχύτητα $0.6c$ κατά μήκος του κοινού άξονα $x-x'$. Ποια η γωνία που σχηματίζει το φωτόνιο με τον άξονα x' ;

(Απάντηση: $\tan(\varphi') = -6.92$)

4.5.17 Η ταχύτητα του φωτός στο ακίνητο νερό είναι c/n , όπου ο δείκτης διάθλασης στο νερό είναι $n \cong 4/3$. Ο Fizeau, το 1851, βρήκε πως η ταχύτητα (σε σχέση με το σύστημα του εργαστηρίου) του φωτός σε νερό το οποίο κινείται με ταχύτητα V (σε σχέση με το σύστημα του εργαστηρίου) μπορεί να εκφραστεί ως:

$$u = \frac{c}{n} + kV$$

Όπου ο συντελεστής k μετρήθηκε από τον ίδιο να είναι $k \cong 0.44$. Υπολογίστε την τιμή του k σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz.

(Απάντηση: (α) $k \cong 0.438$, χρησιμοποιήστε την προσέγγιση $\left(1 + \frac{V}{nc}\right)^{-1} \cong 1 - \frac{V}{nc}$)

4.5.18 Η εξίσωση ενός σφαιρικού κύματος φωτός το οποίο ξεκινά από την αρχή των αξόνων $t = t' = 0$ είναι:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

Δείξτε, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Lorentz, ότι ο κινούμενος παρατηρητής O' θα διαπιστώσει πως ο ίδιος παλμός φωτός είναι και για αυτόν σφαιρικός.

4.5.19 Δείξτε ότι η ηλεκτρομαγνητική κυματική εξίσωση,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz.

4.5.20 Αναπτύξτε την πρώτη και την τέταρτη σχέση των εξισώσεων (4.3) σε δυναμοσειρές ως προς β μέχρι όρους τρίτης τάξης. Αναγνωρίστε τους όρους που δίνουν το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου και τους όρους που δίνουν την κύρια διόρθωση στον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου.

Υπόδειξη: Για την ανάπτυξη ως προς β χρησιμοποιείτε την

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$

Κεφάλαιο 5 :

Το φαινόμενο Doppler. Διαστήματα, χωρόχρονος και κοσμικές γραμμές.

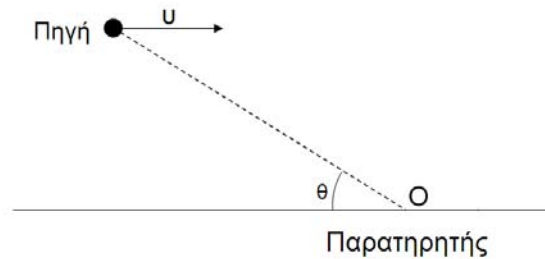
5.1 Το φαινόμενο Doppler.

Η βασική εξίσωση ενός διαδιδόμενου ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι:

$$c = \lambda f \quad (5.1)$$

όπου c η ταχύτητα διάδοσης, λ το μήκος κύματος και f η συχνότητα. Περιμένουμε πως διαφορετικοί παρατηρητές θα μετρήσουν διαφορετικό μήκος κύματος και συχνότητα, αλλά τέτοια ώστε το γινόμενο τους λf να παραμένει ίσο με c για όλους τους παρατηρητές.

Θεωρήστε μια πηγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων η οποία κινείται σε σχέση με έναν ακίνητο παρατηρητή O , όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1. Η πηγή εκπέμπει αλληλουχία παλμών περιόδου T_0 και συχνότητας $f_0 = 1/T_0$.



Σχήμα 5.1

Λόγω του φαινομένου της διαστολής του χρόνου ο παρατηρητής O μετρά την ίδια περίοδο ως $T = \gamma T_0$. Ας υποθέσουμε ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ η πηγή εκπέμπει τον πρώτο παλμό, ενώ κατά την χρονική στιγμή $t = T$ εκπέμπει τον δεύτερο. Στον ίδιο χρόνο ο πρώτος παλμός θα έχει κινηθεί κατά διάστημα cT . Το μήκος κύματος ορίζεται ως η απόσταση δύο διαδοχικών παλμών στον χρόνο $t = T$. Άρα έχουμε:

$$\lambda = cT - v \cos(\theta)T = (c - v \cos(\theta))\gamma T_0 \quad (5.2)$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{(c - v \cos(\theta))\gamma T_0} = f_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos(\theta)} \quad (5.3)$$

Διακρίνουμε τρεις απλές περιπτώσεις:

1. Για $\theta = 0^\circ$ η πηγή και ο παρατηρητής πλησιάζουν. Από την (5.3) έχουμε πως

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (5.4)$$

Επειδή $f > f_0 \Rightarrow \lambda < \lambda_0$ το φαινόμενο είναι γνωστό ως *Κυανή Μετατόπιση*.

2. Για $\theta = 180^\circ$ η πηγή και ο παρατηρητής απομακρύνονται. Από την (5.3) έχουμε πως

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (5.5)$$

Επειδή $f < f_0 \Rightarrow \lambda > \lambda_0$ το φαινόμενο είναι γνωστό ως *Ερυθρή Μετατόπιση*.

3. Για $\theta = 90^\circ$ από την (5.3) προκύπτει πως $f = f_0 \sqrt{1-\beta^2}$ δηλαδή $f < f_0 \Rightarrow \lambda > \lambda_0$, έχουμε πάλι ερυθρή μετατόπιση.

5.2 Διαστήματα και χωρόχρονος.

Οι μετασχηματισμοί Lorentz δίνουν μια λογική εξήγηση για τη σχετικότητα της παρατηρήσεως. Περιέχουν όμως και μια απροσδόκητη πρόταση αναλλοίωτου. Όπως έχουμε αποδείξει στο πρόβλημα 4.4.10 η ποσότητα:

$$(c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \quad (5.6)$$

είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz. Ο παραπάνω συνδυασμός των μετρήσεων του μήκους και του χρόνου είναι κάτι για το οποίο συμφωνούν οι παρατηρητές άσχετα εάν διαφωνούν για το μήκος και τον χρόνο ξεχωριστά. Είναι φυσικό να προσδώσουμε σημασία σε μια αναλλοίωτη ποσότητα. Ο συνδυασμός αυτός ονομάζεται τετράγωνο του διαστήματος και συμβολίζεται με I :

$$I^2 = (c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \quad (5.7)$$

$$I^2 = (c \Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \quad (5.8)$$

Μεταξύ δύο ταυτόχρονων γεγονότων σε ένα σύστημα αναφοράς, το διάστημα είναι ανάλογο προς την απόσταση στο χώρο των γεγονότων αυτών. Σε αυτό το σύστημα αναφοράς είναι $\Delta t = 0$ άρα:

$$I^2 = -(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = -(\chiωρική απόσταση)^2 \quad (5.9)$$

Σε ένα σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται σε σχέση με αυτό τα γεγονότα δεν είναι ταυτόχρονα, δηλαδή το $\Delta t' \neq 0$. Και το $\Delta x'$ όμως δεν είναι ίσο με το Δx με τέτοιον τρόπο έτσι ώστε η δεξιά πλευρά της εξίσωσης (5.8) να παραμένει η ίδια με την δεξιά πλευρά της εξίσωσης (5.9).

Δύο γεγονότα τα οποία συμβαίνουν στην ίδια θέση $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ αλλά κατά διαφορετικούς χρόνους σε ένα σύστημα αναφοράς χωρίζονται από ένα διάστημα που είναι ανάλογο προς τον χρόνο που πέρασε μεταξύ των γεγονότων αυτών στο σύστημα αναφοράς:

$$I^2 = (c \Delta t)^2 \quad (5.10)$$

Το διάστημα είναι μια γενίκευση και ένας συνδυασμός των ιδεών του χρονικού διαχωρισμού και του διαχωρισμού στο χώρο. Μπορεί να φαίνεται παράξενο το ότι το τετράγωνο μιας ποσότητας που έχει φυσική σημασία μπορεί να είναι αρνητικό, όπως στην εξίσωση (5.9). Αυτό δεν προκαλεί καμιά δυσκολία στην πράξη γιατί επιλέξαμε να καλέσουμε την ποσότητα ως I^2 αντί για I . Η ποσότητα την οποία ορίσαμε και με την οποία δουλεύουμε είναι το I^2 και μετριέται με έναν πραγματικό αριθμό. Εάν το I^2 είναι θετικός αριθμός τότε το διάστημα ονομάζεται *ομοιόχρονο*. Εάν το I^2 είναι αρνητικός αριθμός τότε το διάστημα ονομάζεται *ομοιόχωρο*.

Οι μετασχηματισμοί Lorentz δείχνουν πως πρέπει να σκεφτόμαστε τον χώρο και τον χρόνο ως μία ενότητα. Το αναλλοίωτο του διαστήματος ενισχύει την άποψη αυτής της εναλλαγής μεταξύ του χώρου και του χρόνου. Έτσι στον *χωρόχρονο* των τεσσάρων διαστάσεων ένα σημείο έχει τέσσερις συντεταγμένες τις x, y, z και t όπως στον κοινό τρισδιάστατο χώρο έχει τρεις συντεταγμένες τις x, y και z . Για ομοιομορφία ως τέταρτη συντεταγμένη του χωρόχρονου μπορεί να επιλεγεί η ct , με διαστάσεις μήκους. Με αυτόν τον τρόπο ένα σημείο στο χωρόχρονο συμβολίζεται με ένα *τετράνυσμα* ως εξής:

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x, y, z) \quad (5.11)$$

Το διάστημα μπορεί να θεωρηθεί ως μια απόσταση στον τετραδιάστατο χωρόχρονο. Επειδή οι όροι του χρόνου και του χώρου στον ορισμό του διαστήματος έχουν αντίθετο πρόσημο ο χωρόχρονος είναι μη-Ευκλείδιος.

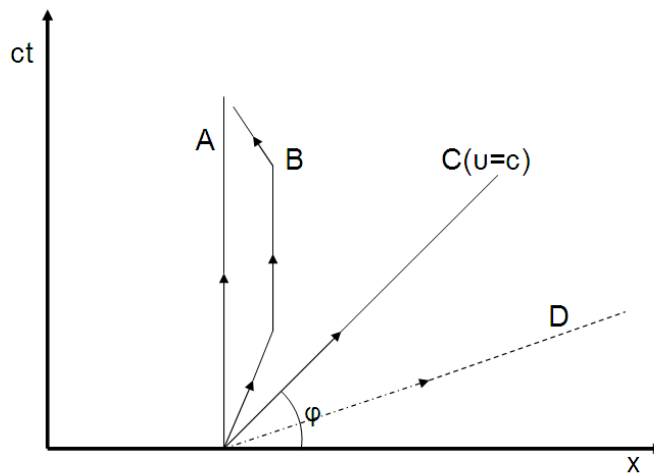
5.3 Κοσμικές γραμμές – Διαγράμματα Minkowski .

Αν και δεν μπορούμε να σχηματίσουμε μια εικόνα για τον τετραδιάστατο χωρόχρονο, είναι αρκετά παιδαγωγικό να ζωγραφίσουμε μια φέτα του χωρόχρονου και να εξετάσουμε απλά γεγονότα στη φέτα αυτή. Τα διαγράμματα που χρησιμοποιούμε έχουν την διάσταση ct στον κατακόρυφο άξονα και την διάσταση x στον οριζόντιο, και ονομάζονται *διαγράμματα*

Minkowski. Σε ένα τέτοιο διάγραμμα μπορεί να παρασταθεί ολόκληρη η ιστορία κάθε αντικειμένου το οποίο είναι περιορισμένο να κινείται μόνο κατά την διεύθυνση x .

Στο σχήμα 5.2 εικονίζεται ένα διάγραμμα Minkowski. Ένας ακίνητος άνδρας παριστάνεται με μια ευθεία κατακόρυφη γραμμή A. Μια γυναίκα που περπατά προς τα δεξιά, σταματά λίγο, και μετά περπατά προς τα αριστερά αφήνει το ίχνος B. Οι γραμμές αυτές ονομάζονται *κοσμικές γραμμές*, και το οποιοδήποτε σημείο πάνω σε μια κοσμική γραμμή είναι ένα γεγονός.

Ένα κύμα φωτός που ταξιδεύει προς τα δεξιά παριστάνεται με την γραμμή C. Το φως κινείται με ταχύτητα c . Εύκολα μπορούμε να δείξουμε πως η γωνία $\varphi = 45^\circ$. Επειδή στη φύση οι ταχύτητες που συναντάμε είναι μικρότερες η ίσες του c είναι αδύνατο να έχουμε γεγονότα κάτω από την ευθεία C. Έτσι η διακεκομμένη γραμμή D δεν μπορεί να παριστάνει την κοσμική γραμμή καμιάς γνωστής φυσικής ποσότητας διότι αντιστοιχεί σε ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός.



Σχήμα 5.2

5.4 Λυμένα Προβλήματα

5.4.1 (α) Υπολογίστε την εξίσωση Doppler σε προσέγγιση πρώτης τάξης ως προς v/c όταν πηγή και παρατηρητής απομακρύνονται μεταξύ τους. (β) Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 120 Km/h και πλησιάζει ένα ραντάρ της τροχαίας. Εάν το ραντάρ λειτουργεί σε συχνότητα 20×10^9 Hz, ποια η μετατόπιση συχνότητας που μετρά ο τροχονόμος;

(α) Από τις εξισώσεις Doppler έχουμε πως όταν πηγή και παρατηρητής απομακρύνονται ισχύει:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = f_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \sqrt{\frac{1+\beta}{1+\beta}} = f_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} \cong \frac{f_0}{1+\beta}$$

Όπου στην τελευταία προσέγγιση χρησιμοποιήσαμε την $\sqrt{1-\beta^2} \cong 1 - \frac{1}{2}\beta^2$.

(β) Από τις εξισώσεις Doppler έχουμε πως όταν πηγή και παρατηρητής πλησιάζουν μεταξύ τους ισχύει:

$$f' = f_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cong f_0 \sqrt{(1+\beta)(1+\beta)} = f_0(1+\beta)$$

Όπου στην τελευταία χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση $1/(1-\beta) \cong 1+\beta$. Το αυτοκίνητο λειτουργεί ως κινούμενη πηγή με την παραπάνω συχνότητα. Έτσι ο τροχονόμος στο ραντάρ του θα ανιχνεύσει τη συχνότητα:

$$f'' \cong f'(1+\beta) \cong f_0(1+\beta)^2 \cong f_0(1+2\beta)$$

άρα

$$\Delta f = f'' - f_0 \cong 2\beta f_0 = 2 \times \frac{120 \times 10^3 / 3600 \text{ m/sec}}{3 \times 10^8 \text{ m/sec}} \times 20 \times 10^9 \text{ Hz} = 4.44 \times 10^3 \text{ Hz}$$

5.4.2 Ένα άστρο απομακρύνεται από την Γη με ταχύτητα $5 \times 10^{-3} c$. Ποια η μετατόπιση του μήκους κύματος για την γραμμή D_2 του Νατρίου (5890Å);

Από την εξίσωση Doppler έχουμε:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \Rightarrow \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \Rightarrow$$

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \left(5890 \text{ \AA} \right) \sqrt{\frac{1+0.005}{1-0.005}} = 5920 \text{ \AA}$$

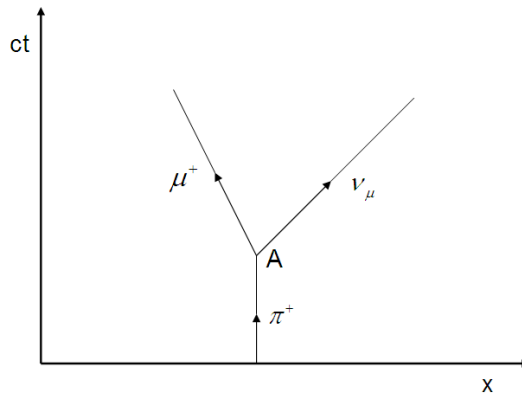
Έτσι έχουμε: $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 5920 \text{ \AA} - 5890 \text{ \AA} = 30 \text{ \AA}$. Η μετατόπιση είναι προς μεγαλύτερα μήκη κύματος (ερυθρή μετατόπιση).

5.4.3 Να χαράξετε το διάγραμμα Minkowski για ένα ακίνητο πιόνιο το οποίο διασπάται ως εξής:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

Η κοσμική γραμμή του ακίνητου πιονίου είναι μια ευθεία κατακόρυφη γραμμή μέχρι τη στιγμή της καταστροφής του που είναι το γεγονός A στο παρακάτω σχήμα. Στο σημείο A δημιουργούνται τα δύο νέα σωματίδια. Το νετρίνο του μιονίου έχει μάζα μηδέν (ή ενδεχομένως περίπου μηδέν) και κινείται προς την μία κατεύθυνση με ταχύτητα c. Το μιονίο κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση με μικρότερη ταχύτητα.

Διαγράμματα της παρακάτω μορφής χρησιμοποιούνται στην Σωματιδιακή Φυσική και είναι γνωστά ως διαγράμματα *Feynman*.



5.4.4 Θεωρείστε δύο παρατηρητές, τον Ο και τον Ο' ο οποίος ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα v ως προς τον Ο κατά μήκος του κοινού τους άξονα $x-x'$. Να χαράξετε τους άξονες (ct', x') σε ένα διάγραμμα Minkowski (ct, x) .

Θα χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς Lorentz :

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{aligned} \quad (1)$$

Ο άξονας x' αντιστοιχεί σε $ct' = 0$. Άρα έχουμε από τις εξισώσεις (1) έχουμε:

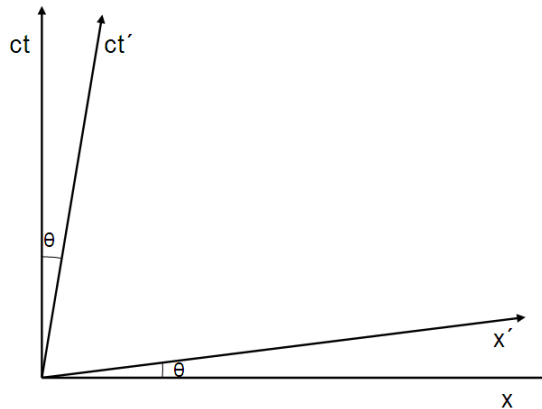
$$\frac{t}{x} = \frac{\gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)}{\gamma(x' + vt')} = \frac{v}{c^2} \Rightarrow ct = \beta x$$

Έτσι ο άξονας x' στο διάγραμμα Minkowski (ct, x) είναι ευθεία με κλίση $\tan(\theta) = \beta$.

Αντίστοιχα ο άξονας ct' αντιστοιχεί σε $x' = 0$. Άρα έχουμε από τις εξισώσεις (1):

$$\frac{x}{t} = \frac{\gamma(x' + vt')}{\gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)} = v \Rightarrow \frac{x}{ct} = \beta \Rightarrow x = (ct)\beta$$

Στο παρακάτω σχήμα εικονίζονται οι άξονες (ct', x') σε σχέση με τους (ct, x) .



5.4.5 Το πρόβλημα 3.5.9 αναφέρεται στο “παράδοξο των διδύμων”. Να λύσετε το πρόβλημα και να χαράξετε τις κοσμικές γραμμές του Πέτρου και του Παύλου.

(α) Ο Πέτρος και ο Παύλος είναι δίδυμοι. Σε ηλικία 20 ετών ο Πέτρος μπαίνει σε ένα διαστημόπλοιο το οποίο κινείται με ταχύτητα $v = 0.8c$ και πηγαίνει σε ένα κοντινό άστρο. Μόλις φτάνει σε αυτό αμέσως ξεκινάει το ταξίδι της επιστροφής. Φτάνει στη Γη σε ηλικία 28 ετών άρα $\Delta t' = 8y$. Για τον Παύλο όμως έχει περάσει χρόνος:

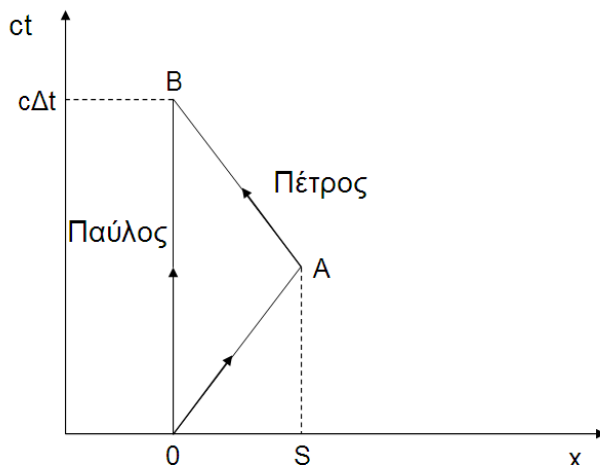
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{8y}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = 13.33y$$

Άρα η ηλικία του Παύλου την στιγμή της επιστροφής του Πέτρου θα είναι 30.33y.

(β) Η απόσταση του άστρου από την Γη θα είναι:

$$S = \frac{\Delta t v}{2} = \frac{(13.33 \times 365 \times 24 \times 3600 \text{ sec})(0.8 \times 3 \times 10^8 \text{ n/sec})}{2} = 5.0 \times 10^{16} \text{ m}$$

Ο Παύλος παραμένει ακίνητος στη Γη άρα παριστάνεται με μια ευθεία κατακόρυφη γραμμή όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Ο Πέτρος κινείται προς τα δεξιά έως το γεγονός Α που είναι η άφιξη του στον αστέρα. Στην συνέχεια αντιστρέφει την κίνησή του έως το γεγονός Β το οποίο είναι η επιστροφή του στη Γη. Παρατηρούμε πως η κοσμική γραμμή του Πέτρου είναι μεγαλύτερη από αυτή του Παύλου. Από τους υπολογισμούς μας όμως προκύπτει πως ο χρόνος που πέρασε είναι μεγαλύτερος για τον Παύλο. Το συμπέρασμα που καταλήγουμε είναι πως ο πιο έμμεσος δρόμος στον χωρόχρονο είναι “βραχύτερος”.



5.5 Προβλήματα

5.5.1 Στο φάσμα ενός αστεριού παρατηρείται μετατόπιση Doppler στην γραμμή D_2 του Νατρίου ($5890\text{\AA}$) κατά $100\text{\AA}$. Υπολογίστε την ταχύτητα απομάκρυνσης του αστερά.

(Απάντηση: $v = 0.017c$).

5.5.2 Το εσωτερικό μήκος κύματος της ονομαζόμενης άλφα γραμμής Lyman του υδρογόνου είναι $1216\text{\AA}$ (πολύ μέσα στο υπεριώδες). Στο φως του κβάζαρ 3C9, η γραμμή αυτή εμφανίζεται στα $3660\text{\AA}$ (στην ορατή περιοχή). Αν η πελώρια αυτή μετατόπιση προέρχεται από την κίνηση του κβάζαρ, ποια είναι η ταχύτητα απομακρύνσεώς του από την Γη;

(Απάντηση: $v = 0.8c$).

5.5.3 Ένα διαστημόπλοιο κινείται με ταχύτητα $0.6c$ σε σχέση με μια διαστημική πλατφόρμα. Ένας αστροναύτης μέσα στο διαστημόπλοιο στέλνει μια δέσμη φωτός με μήκος κύματος $5000\text{\AA}$ προς την πλατφόρμα. (α) Ποια είναι η συχνότητα του φωτός σύμφωνα με έναν παρατηρητή πάνω στην πλατφόρμα; (β) Ποια είναι η συχνότητα του φωτός, σύμφωνα με έναν άλλο παρατηρητή, ο οποίος ταξιδεύει με ένα δεύτερο διαστημόπλοιο τα οποίο ταξιδεύει σε αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα $0.8c$ ως προς την πλατφόρμα;

(Απάντηση: (α) $3 \times 10^{14}\text{ Hz}$ (β) $1 \times 10^{14}\text{ Hz}$).

5.5.4 Ένας ορισμένος γαλαξίας απομακρύνεται από την Γη με ταχύτητα 1% της ταχύτητας του φωτός. (α) Κατά ποιο ποσοστό μετατοπίζονται τα φασματικά μήκη κύματός του σε σχέση με τα μήκη κύματος των αντίστοιχων φωτεινών πηγών στη Γη; (β) Είναι αυτό μια ερυθρή ή μια κυανή μετατόπιση; (γ) Μια χαρακτηριστική ακτινοβολία του υδρογόνου στη Γη έχει μήκος κύματος $6563\text{\AA}$. Ποιο είναι το μήκος κύματος της ακτινοβολίας αυτής στο φως του γαλαξία;

(Απάντηση: (α) 2% (β) ερυθρή (γ) $6694.26\text{\AA}$).

5.5.5 Τα κβάζαρ συχνά χαρακτηρίζονται από μια “παράμετρο ερυθρής μετατόπισης” Z που ορίζεται ως $Z = \Delta\lambda/\lambda_0$, όπου λ_0 είναι το μήκος κύματος μιας ορισμένης φασματικής γραμμής που παρατηρείται στο φως που εκπέμπεται από μια γήινη πηγή και $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ είναι η μετατόπιση του μήκους κύματος της γραμμής αυτής που παρατηρείται στο φως ενός κβάζαρ. Δείξτε ότι αν η ερυθρή μετατόπιση του κβάζαρ είναι μια μετατόπιση Doppler, η ταχύτητα απομακρύνσεώς του συνδέεται με το Z σύμφωνα με τον τύπο:

$$\frac{v}{c} = \frac{(Z+1)^2 - 1}{(Z+1)^2 + 1}$$

5.5.6 Σύμφωνα με τον ακίνητο παρατηρητή O το γεγονός A λαμβάνει χώρα σε συντεταγμένες $x_A = 2 \text{ m}$, $y_A = 1 \text{ m}$, $z_A = 3 \text{ m}$ και $t_A = 0 \text{ sec}$, ενώ το γεγονός B σε συντεταγμένες $x_B = 7 \text{ m}$, $y_B = 5 \text{ m}$, $z_B = 10 \text{ m}$ και $t_B = 100 \text{ nsec}$. Υπολογίστε την απόσταση των δύο γεγονότων στον χωρόχρονο σύμφωνα με τον παρατηρητή O και ένα δεύτερο παρατηρητή O' ο οποίος κινείται ως προς τον O με ταχύτητα $0.6c$ στη διεύθυνση του άξονα $+x$.
(Απάντηση: $I^2 = 810 \text{ m}^2$).

5.5.7 Ένα διαστημόπλοιο το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα v περνά κοντά στη Γη στο χρόνο $t = 0$. Αργότερα στέλνει πίσω ένα ραδιοφωνικό μήνυμα. Σε ένα διάγραμμα Minkowski, δείξτε τις κοσμικές γραμμές της Γης, του διαστημοπλοίου, και του ραδιοφωνικού κύματος. Σημειώστε τα σημεία στα οποία τέμνονται οι κοσμικές γραμμές.

Κεφάλαιο 6 :

Σχετικιστική ενέργεια και ορμή.

6.1 Σχετικιστική Ορμή.

Ο ορισμός της σχετικιστικής ορμής $\vec{p}$ πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο συνθήκες:

- Η ολική σχετικιστική ορμή ενός απομονωμένου συστήματος σωμάτων πρέπει να διατηρείται σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Αυτό προκύπτει από την Αρχή της Σχετικότητας που μας λέει πως όλοι οι νόμοι της φυσικής είναι οι ίδιοι (αναλλοίωτοι) σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.
- Η σχετικιστική ορμή πρέπει να προσεγγίζει την κλασική τιμή $m\vec{u}$ όταν $\vec{u} \rightarrow 0$ σύμφωνα με την Αρχή της Αντιστοιχίας.

Έτσι προκύπτει πως:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = \gamma m_0 \vec{u} \quad (6.1)$$

με $\vec{u}$ την ταχύτητα και m_0 την *μάζα ηρεμίας* του σωματίου. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να ερμηνευτεί ως το γινόμενο της σχετικιστικής μάζας, γm_0 και της ταχύτητας του αντικειμένου. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ισχυριστούμε πως η παρατηρούμενη μάζα ενός αντικειμένου αυξάνεται σε συνάρτηση με την ταχύτητά του σύμφωνα με την σχέση:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = \gamma m_0 \quad (6.2)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο δεύτερος νόμος του Newton παίρνει την μορφή:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \right] = \frac{d}{dt} (m\vec{u}) \quad (6.3)$$

Η οποία είναι ίδια με την κλασική διατύπωσή του όπως εξ άλλου αναμενόταν.

6.2 Σχετικιστική Ενέργεια.

Στην σχετικιστική μηχανική, όπως και στην κλασσική μηχανική, η κινητική ενέργεια, K , ενός σώματος είναι ίση με το έργο που παράγει μια εξωτερική δύναμη για να αυξήσει την ταχύτητα του σώματος από μηδέν σε κάποια τιμή u :

$$K = \int_{u=0}^{u=u} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (6.4)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (6.3) μπορούμε να καταλήξουμε στην ακόλουθη σχέση για την κινητική ενέργεια K :

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} - m_0 c^2 \quad (6.5)$$

Η κινητική ενέργεια, K , αντιπροσωπεύει την διαφορά ανάμεσα στην ολική ενέργεια, E , ενός κινούμενου σώματος και την ενέργεια ηρεμίας του $E_0 = m_0 c^2$. Έτσι προκύπτει για την ολική ενέργεια ενός σώματος, το οποίο κινείται, η ακόλουθη σχέση:

$$E = K + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \gamma m_0 c^2 = mc^2 \quad (6.6)$$

Η παραπάνω εξίσωση συνεπάγεται επίσης πως η μεταβολή της ενέργειας και η μεταβολή της μάζας στο σύστημα ηρεμίας συνδέονται με την σχέση:

$$\Delta E = \Delta m c^2 \quad (6.7)$$

6.3 Σχέση Ενέργειας-ορμής .

Σε πολλά προβλήματα είναι πολύ χρήσιμη η έκφραση η οποία συνδέει την ολική ενέργεια E , με την σχετικιστική ορμή ενός σώματος. Εάν απαλείψουμε την ταχύτητα u μεταξύ των εξισώσεων (6.1) και (6.6) εύκολα προκύπτει η ακόλουθη έκφραση:

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2 \quad (6.8)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν τα ακόλουθα:

- Εάν ένα σωματίδιο είναι ακίνητο τότε η ορμή του είναι $p = 0$ και η ενέργειά του ισούται με την ενέργεια ηρεμίας του $E = m_0 c^2$.
- Εάν η ορμή ενός σωματιδίου είναι $p \ll m_0 c$ τότε προκύπτει πως

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} \cong m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0^2 c^2} \right) \Rightarrow$$

$$E \cong m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0}$$

Το δεξί μέλος της τελευταίας εξίσωσης είναι η ενέργεια ηρεμίας συν την μη σχετικιστική κινητική ενέργεια.

- Εάν η ορμή ενός σωματιδίου είναι $p \gg m_0 c$ τότε προκύπτει πως $E = p c$. Σε αυτή την περίπτωση μιλάμε για ένα υπερσχετικιστικό σωματίδιο με $u \approx c$.

Στην κλασική μηχανική, ένα σωματίο χωρίς μάζα δεν έχει ούτε ενέργεια ούτε ορμή, ούτε και κανένα άλλο μετρήσιμο χαρακτηριστικό. Δεν αντιπροσωπεύει τίποτα. Δεν συμβαίνει το ίδιο στη θεωρία της σχετικότητας. Μια μετρούμενη φυσική ποσότητα μπορεί να υπάρξει και χωρίς να έχει μάζα. Μπορούμε να φανταστούμε πως καθώς μικραίνει η μάζα ενός σώματος τόσο πιο εύκολα μπορούμε να το επιταχύνουμε έως ότου αποκτήσει μια προκαθορισμένη σταθερή ενέργεια. Η ταχύτητα που απαιτείται για να επιτευχθεί η ενέργεια αυτή καθορίζεται από τη σχέση

$$\sqrt{1 - (u/c)^2} = \frac{m_0 c^2}{E}$$

Καθώς η μάζα του σωματίου πλησιάζει το μηδέν, η ταχύτητα πλησιάζει όλο και περισσότερο την ταχύτητα του φωτός. Έτσι για $m_0 \rightarrow 0$ και $u \rightarrow c$ έχουμε από τις σχέσεις (6.1) και (6.6) πως:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \rightarrow \frac{0}{0} : \text{απροσδιοριστία} \\ E &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \rightarrow \frac{0}{0} : \text{απροσδιοριστία} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{p}{E} = \frac{u}{c^2} \quad (6.9)$$

Η τελευταία εξίσωση ισχύει και για πεπερασμένη και για μηδενική μάζα. Για σωματίδια χωρίς μάζα, με $u = c$, η παραπάνω εξίσωση απλουστεύεται στην

$$E = pc \quad (6.10)$$

6.4 Το τετράνυσμα της Ορμής-Ενέργειας.

Σε αναλογία με τον ορισμό του τετρανύσματος του χωρόχρονου (εξίσωση 5.11) ορίζουμε το τετράνυσμα της ορμής ως εξής:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{m_0 \frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \\ p_y &= \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{m_0 \frac{dy}{dt}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \\ p_z &= \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{m_0 \frac{dz}{dt}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \\ p_t &= \frac{m_0 \frac{d(ct)}{dt}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{E}{c} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Παρατηρούμε πως η τέταρτη συνιστώσα της ορμής είναι, με διαφορά έναν παράγοντα c , η ίδια με την ολική ενέργεια E . Με αυτόν τον τρόπο στην σχετικότητα ενοποιείται η ορμή με την ενέργεια. Η ενοποίηση των δύο αυτών βασικών αρχών της μηχανικής σε μια μοναδική τετραδιάστατη ποσότητα έγινε από τον Herman Minkowski το 1908.

Το τετράνυσμα ορμή-ενέργεια έχει ένα μήκος, το τετράγωνο του οποίου ορίζεται κατά τον ίδιο τρόπο όπως το τετράγωνο του διαστήματος του χωρόχρονου. Η ποσότητα

$$p_t^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m_0^2 c^2 \quad (6.12)$$

αποτελεί μια αναλλοίωτη ποσότητα, ίδια για όλους τους παρατηρητές. Το δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι πάντοτε θετικό πράγμα που σημαίνει πως το τετράνυσμα ορμή-ενέργεια ενός υλικού σωματίου είναι πάντοτε ομοιόχρονο.

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να γράψουμε την παραπάνω εξίσωση 6.12 είναι ο ακόλουθος:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (6.13)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με την 6.8 η οποία εκφράζει την ενέργεια ενός σωματίου ως συνάρτηση της ορμής και της μάζας του. Τέλος για ένα σωματίο χωρίς μάζα το τετράνυσμα ορμής-ενέργειας είναι το μηδενικό άνυσμα, γιατί έχουμε:

$$p_t^2 - p^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \frac{E^2}{c^2} = 0$$

6.5 Μετασχηματισμός Lorentz του τετρανύσματος ορμής-ενέργειας.

Σε αναλογία με τους μετασχηματισμούς Lorentz του χωρόχρονου μπορούμε να γράψουμε τους μετασχηματισμούς του τετρανύσματος ορμής-ενέργειας, λαμβάνοντας υπ' όψη τις αναλογίες $x \Leftrightarrow p_x$, $y \Leftrightarrow p_y$, $z \Leftrightarrow p_z$ και $ct \Leftrightarrow E/c$. Έστω ότι ο ακίνητος παρατηρητής Ο μετρά πως ένα σωματίο έχει συνιστώσες ορμής p_x, p_y και p_z και ενέργεια E . Ένας κινούμενος παρατηρητής Ο', που κινείται με ταχύτητα v ως προς τον Ο κατά μήκος του άξονα x , μετρά ότι το ίδιο σωματίο έχει συνιστώσες ορμής p'_x, p'_y και p'_z και ενέργεια E' . Οι μετρήσεις των δύο παρατηρητών συνδέονται με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{p'_x + (vE'/c^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \left(p'_x + \frac{\beta}{c} E' \right) \\ p_y &= p'_y \\ p_z &= p'_z \\ E &= \frac{E' + vp'_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma (E' + vp'_x) \end{aligned} \quad (6.14)$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί. Ένας απλός έλεγχος συνέπειας των παραπάνω εξισώσεων γίνεται εάν θεωρήσουμε ένα αντικείμενο το οποίο ηρεμεί σε ένα σύστημα. Για παράδειγμα θεωρήστε μια μπάλα μάζας m_0 η οποία βρίσκεται ακίνητη μέσα σε ένα όχημα, το οποίο κινείται με ταχύτητα v ως προς το έδαφος κατά μήκος του άξονα x . Για έναν παρατηρητή Ο', ακίνητο μέσα στο όχημα, η μπάλα έχει ορμή και ενέργεια ίση με:

$$p'_x = 0 \quad \text{και} \quad E' = m_0 c^2$$

Για τον ακίνητο ως προς το έδαφος παρατηρητή Ο μπορούμε να εφαρμόσουμε τους μετασχηματισμούς 6.14. Έτσι έχουμε:

$$p_x = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{και} \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

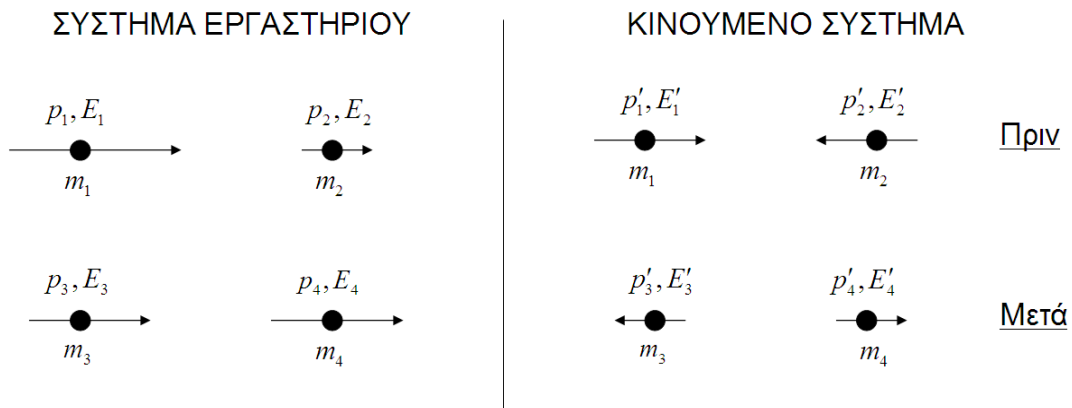
Οι παραπάνω εξισώσεις συμφωνούν με τους ορισμούς της ενέργειας και της ορμής για την μπάλα η οποία κινείται με ταχύτητα v .

6.6 Σωματίδια σε μία διάσταση.

Στην θεωρία της σχετικότητας το πρόβλημα της σύγκρουσης και αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων είναι πολυπλοκότερο από ότι στην κλασική του θεώρηση. Αυτό οφείλεται στο ότι το κάθε σωματίδιο μπορεί να μεταβάλει την μάζα του, την ορμή και την ενέργειά του καθώς επίσης μπορεί να σχηματιστούν και νέα σωματίδια. Για να μελετήσουμε το πρόβλημα θα επικεντρωθούμε στην ιδέα της *αναλλοίωτης μάζας* και της *διαθέσιμης ενέργειας*.

ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΗ ΜΑΖΑ

Θεωρήστε δύο σωματίδια στο σύστημα του εργαστηρίου με m_1, p_1, E_1 και m_2, p_2, E_2 όπως εικονίζονται στο παρακάτω σχήμα 6.1. Τα δύο σωματίδια αλληλεπιδρούν και έστω ότι παράγονται δύο νέα σωματίδια με m_3, p_3, E_3 και m_4, p_4, E_4 . Σε ένα άλλο σύστημα το οποίο κινείται ως προς το σύστημα του εργαστηρίου τα σωματίδια θα έχουν ίδιες μάζες ηρεμίας m_1, m_2, m_3 και m_4 αλλά διαφορετικές ορμές και ενέργειες, $p'_1, E'_1, p'_2, E'_2, p'_3, E'_3$ και p'_4, E'_4



Σχήμα 6.1

Μια ποσότητα καλείται *αναλλοίωτη* αν παραμένει η ίδια σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Οι ατομικές μάζες ηρεμίας m_1 έως m_4 αποτελούν παραδείγματα αναλλοίωτων ποσοτήτων

Μια ποσότητα λέμε πως *διατηρείται* όταν είτε παραμένει αμετάβλητη ως προς τον χρόνο είτε παραμένει ή ίδια μετά την αλληλεπίδραση. Η ολική ενέργεια σε αμφότερα τα συστήματα είναι ένα παράδειγμα διατηρούμενης ποσότητας. Έτσι στο σύστημα του εργαστηρίου η σταθερή ολική ενέργεια είναι:

$$E_T = E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \quad (6.15)$$

ενώ στο κινούμενο σύστημα είναι:

$$E'_T = E'_1 + E'_2 = E'_3 + E'_4 \quad (6.16)$$

Προσοχή!! Η E_T δεν είναι ίση με την E'_T .

Μια ποσότητα η οποία είναι και αναλλοίωτη και διατηρούμενη είναι η *αναλλοίωτη μάζα* M του συστήματος η οποία ορίζεται ως:

$$M^2 c^2 = \left(\frac{E_T}{c} \right)^2 - p_T^2 \quad (6.17)$$

όπου E_T και $p_T = |p_1 + p_2| = |p_3 + p_4|$ η ολική ενέργεια και ολική ορμή αντίστοιχα στο σύστημα του εργαστηρίου. Το αναλλοίωτο της M αποδεικνύεται από τους μετασχηματισμούς Lorentz. Από τις εξισώσεις 6.14 έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{E_1 + E_2}{c} &= \frac{(1/c)(E'_1 + E'_2) + \beta(p'_1 + p'_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ (p_1 + p_2) &= \frac{(p'_1 + p'_2) + \beta(1/c)(E'_1 + E'_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω δύο εξισώσεις έχουμε:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{c}(E_1 + E_2) \right]^2 - (p_1 + p_2)^2 &= \left[\frac{1}{c}(E'_1 + E'_2) \right]^2 - (p'_1 + p'_2)^2 \Rightarrow \\ \left(\frac{E_T}{c} \right)^2 - p_T^2 &= \left(\frac{E'_T}{c} \right)^2 - p_T'^2 \end{aligned}$$

Μιας και από την εξίσωση 6.17 το αριστερό μέλος είναι εξ ορισμού ίσο με $M^2 c^2$, θα πρέπει από την παραπάνω να ισχύει και

$$M^2 c^2 = \left(\frac{E'_T}{c} \right)^2 - p_T'^2 \quad (6.18)$$

Οι εξισώσεις 6.17 και 6.18 επιδεικνύουν το αναλλοίωτο της ποσότητας M .

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις 6.17 και 6.18 με την 6.12 αντιλαμβανόμαστε πως η ποσότητα M είναι η *μάζα ηρεμίας του συστήματος*. Εάν θεωρήσουμε το ειδικό σύστημα αναφοράς στο οποίο ισχύει πως η ολική ορμή είναι μηδέν (σύστημα αναφοράς του κέντρου ορμής) τότε από την 6.17 έχουμε για το συγκεκριμένο σύστημα πως

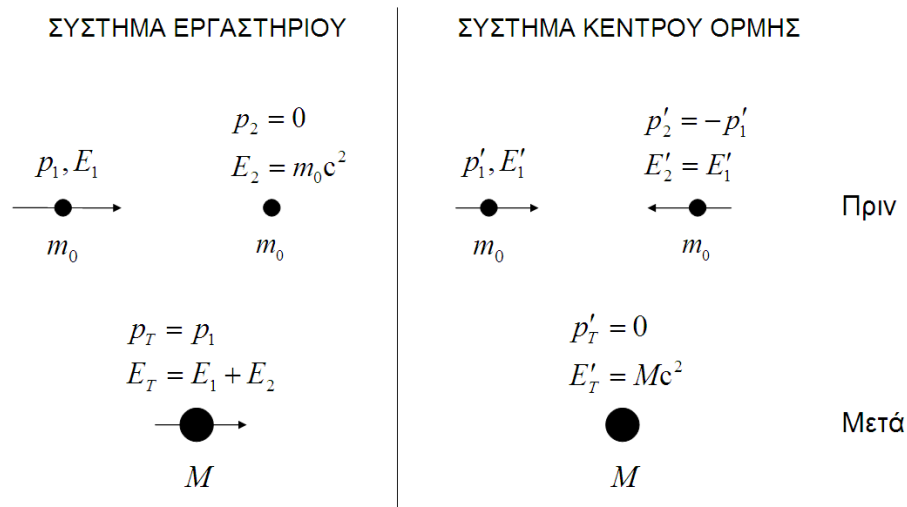
$$\left. \begin{aligned} p_T'' &= p_1'' + p_2'' = 0 \\ M^2 c^2 &= \left(\frac{E_T''}{c} \right)^2 - p_T''^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_T'' = M c^2 \quad (6.19)$$

Από την παραπάνω εξίσωση συμπεραίνουμε πως στο σύνολό του το σύστημα συμπεριφέρεται σαν ένα ακίνητο αντικείμενο μάζας M . Προσοχή!! Το M γενικά δεν είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα των μαζών των συστατικών του συστήματος.

ΔΙΑΘΕΣΙΜΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Η μελέτη της φυσικής των Στοιχειωδών Σωματίων βασίζεται στην παραγωγή νέων σωματίων και στην μελέτη των διασπάσεών τους. Τα νέα σωματίδια παράγονται από αλληλεπιδράσεις υψηλοενεργειακών πρωτονίων ή ηλεκτρονίων είτε με την ύλη είτε μεταξύ των. Τα υψηλοενεργειακά πρωτόνια ή ηλεκτρόνια παράγονται με την χρήση επιταχυντικών διατάξεων. Μια ερώτηση με τεράστια πρακτική σημασία για την αποδοτικότερη χρήση των επιταχυντών είναι η ακόλουθη: Κατά τη σύγκρουση ενός σωματίου με ένα άλλο, ποιο τμήμα της ολικής ενέργειας των σωματίων είναι διαθέσιμο για την δημιουργία των νέων σωματίων;

Θα εξετάσουμε την πιο κοινή περίπτωση που αφορά την σύγκρουση σωματίων που έχουν επιταχυνθεί με ακίνητο στόχο. Αυτού του είδους τα πειράματα στην Φυσική των Υψηλών Ενεργειών καλούνται Πειράματα Σταθερού Στόχου (Fixed Target Experiments). Η περίπτωση αυτή εικονίζεται στο αριστερό μέρος του σχήματος 6.2.



Σχήμα 6.2

Στο σύστημα του εργαστηρίου η αναλλοίωτη μάζα M δίνεται από την εξίσωση (6.17). Έχουμε πως:

$$M^2 c^2 = \left(\frac{E_T}{c} \right)^2 - p_T^2 = \frac{1}{c^2} (E_1 + m_0 c^2)^2 - p_1^2 \quad (6.20)$$

Εάν αντικαταστήσουμε το $p_1^2 = (E_1 / c)^2 - m_0^2 c^2$ βρίσκουμε πως:

$$M^2 c^2 = 2m_0 (m_0 c^2 + E_1) \quad (6.21)$$

Πριν την σύγκρουση η ενέργεια που είναι συγκεντρωμένη υπό τη μορφή της μάζας ηρεμίας είναι $2m_0 c^2$, ενώ μετά την σύγκρουση, η μέγιστη ενέργεια υπό τη μορφή της μάζας ηρεμίας είναι $M c^2$. Η διαφορά μεταξύ των δύο αυτών ενεργειών είναι εξ ορισμού, η διαθέσιμη ενέργεια.

$$E_{\text{διαθεσιμη}} = M c^2 - 2m_0 c^2 = \sqrt{2m_0 c^2 (m_0 c^2 + E_1)} - 2m_0 c^2 \quad (6.22)$$

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε πως:

- Στο μη σχετικιστικό όριο όπου $(K \ll m_0 c^2)$ έχουμε πως

$$E_{\text{διαθεσιμη}} \cong (1/2)K. \quad (6.23)$$

- Στο υπερσχετικιστικό όριο όπου $(K \gg m_0 c^2)$ έχουμε πως

$$E_{\text{διαθεσιμη}} \cong 2m_0 c^2 \left(\sqrt{\frac{E_1}{2m_0 c^2}} - 1 \right) \quad (6.24)$$

Στο δεξί μέρος του σχήματος 6.2 εικονίζεται ένας δεύτερος τρόπος σύγκρουσης των σωματιών στο σύστημα του κέντρου ορμής. Με αυτόν τον τρόπο απαιτούνται δύο δέσμες σωματιών αντίθετα συγκρουόμενες. Αυτού του είδους τα πειράματα στην Φυσική των Υψηλών Ενεργειών μπορούν να λάβουν χώρα σε ειδικές επιταχυντικές διατάξεις που ονομάζονται επιταχυντές συγκρουόμενων δεσμών (Colliders).

Στο σύστημα του κέντρου ορμής η αναλλοίωτη μάζα M δίνεται επίσης από την εξίσωση (6.17). Έχουμε πως:

$$M^2 c^2 = \left(\frac{E'_T}{c} \right)^2 - p_T'^2 = \left(\frac{E'_T}{c} \right)^2 - 0 = \frac{E_T'^2}{c^2} \quad (6.25)$$

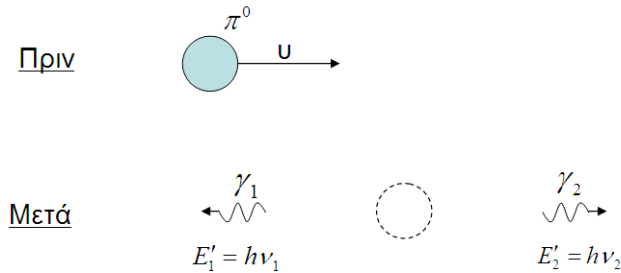
Σε αυτήν την περίπτωση η διαθέσιμη ενέργεια είναι:

$$E_{\text{διαθεσιμη}} = Mc^2 - 2m_0c^2 = E'_T - 2m_0c^2 = E'_1 + E'_2 - 2m_0c^2 \quad (6.26)$$

Από την τελευταία εξίσωση συμπεραίνουμε πως στην περίπτωση πειραμάτων που λαμβάνουν χώρα σε επιταχυντές συγκρουόμενων δεσμών η διαθέσιμη ενέργεια είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από ότι στην περίπτωση πειραμάτων σταθερού στόχου με την ίδια πάντοτε ενέργεια δέσμης. Αυτός είναι ο λόγος που οι σύγχρονοι επιταχυντές είναι επιταχυντές συγκρουόμενων δεσμών. Για ένα αριθμητικό παράδειγμα δείτε το πρόβλημα 6.7.7.

6.7 Λυμένα Προβλήματα

6.7.1 Ένα ουδέτερο πιόνιο, με ενέργεια ηρεμίας 135 MeV κινείται μέσα στο εργαστήριο με ταχύτητα 0.6c. Το πιόνιο διασπάται σε δύο φωτόνια με τον τρόπο που δείχνει το παρακάτω σχήμα. (α) Ποιες είναι οι ενέργειες των δύο φωτονίων που εκπέμπονται; (β) Ποια η ολική ενέργεια του πιονίου και πως αυτή σχετίζεται με τις ενέργειες των δύο φωτονίων; (γ) Κατά ποιόν παράγοντα η ολική ενέργεια του πιονίου υπερβαίνει την ενέργεια ηρεμίας του;



(α) Στο σύστημα ηρεμίας του πιονίου θεωρούμε E_0 , E_1 και E_2 τις ενέργειες του πιονίου και των δύο φωτονίων αντίστοιχα. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$E_0 = E_1 + E_2 = 2E_1 \quad (1)$$

$$E_1 = E_2 = h\nu \quad (2)$$

$$E_0 = 2h\nu \quad (3)$$

Από την (3) προκύπτει πως $h\nu = 67.5 \text{ MeV}$. Στο σύστημα του εργαστηρίου το οποίο εικονίζεται παραπάνω έχουμε για το πρώτο φωτόνιο:

$$\nu'_1 = \nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \Rightarrow E'_1 = h\nu'_1 = h\nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = (67.5 \text{ MeV}) \sqrt{\frac{0.4}{1.6}} = 33.75 \text{ MeV}$$

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε πως

$$\nu'_2 = \nu \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \Rightarrow E'_2 = h\nu'_2 = h\nu \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = (67.5 \text{ MeV}) \sqrt{\frac{1.6}{0.4}} = 135 \text{ MeV}$$

(β) Η ολική ενέργεια του κινούμενου πιονίου είναι:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{135 \text{ MeV}}{\sqrt{1-(0.6)^2}} = 168.75 \text{ MeV}$$

Το άθροισμα των ενεργειών των δύο φωτονίων είναι 168.75 MeV, το οποίο συμφωνεί όπως πρέπει, με την ολική ενέργεια του πιονίου.

(γ) Παρά το ότι το πιόνιο κινείται με την πολύ μεγάλη ταχύτητα 0.6c έχει ολική ενέργεια μόνο 25% μεγαλύτερη από την ενέργεια ηρεμίας του:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{168.75 \text{ MeV}}{135 \text{ MeV}} = 1.25$$

6.7.2 Όταν δύο γραμμομόρια υδρογόνου και ένα γραμμομόριο οξυγόνου ενωθούν για να σχηματίσουν 2 γραμμομόρια ατμών νερού, $(2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O})$, η ενέργεια που απελευθερώνεται είναι 115.6 kcal. Υπολογίστε την ελάττωση της μάζας του υλικού κατά την χημική αντίδραση.

Από τη εξίσωση (6.7) έχουμε:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = - \frac{115.6 \text{ kcal} \times 4.184 \text{ J/kcal}}{(3 \times 10^8 \text{ m/sec})^2} = -5.35 \times 10^{-12} \text{ kg}$$

Η παραπάνω μεταβολή στη μάζα είναι τόσο πολύ μικρή ώστε στην ουσία να μην μπορεί να μετρηθεί. Επομένως η διατήρηση της μάζας είναι ένας έγκυρος νόμος για τις χημικές μεταβολές.

6.7.3 Ποια η ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου το οποίο επιταχύνεται σε μια διαφορά δυναμικού $\Delta V = 10^5 \text{ V}$;

Η κινητική ενέργεια που αποκτά το ηλεκτρόνιο είναι $K = e \Delta V = 10^5 \text{ eV} = 0.1 \text{ MeV}$ άρα έχουμε:

$$E = K + m_0 c^2 \Rightarrow K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - m_0 c^2$$

Για το ηλεκτρόνιο έχουμε πως $m_0 c^2 = 0.511 \text{ MeV}$ και αντικαθιστώντας στην παραπάνω βρίσκουμε πως $u = 0.548c$.

6.7.4 Υπολογίστε την ορμή ενός ηλεκτρονίου κινητικής ενέργειας 1 MeV .

Έχουμε πως:

$$\begin{aligned} E^2 &= (pc)^2 + (m_0 c^2)^2 \Rightarrow \\ (1 \text{ MeV} + 0.511 \text{ MeV})^2 &= (pc)^2 + (0.511 \text{ MeV})^2 \Rightarrow \\ p &= 1.42 \text{ MeV}/c \end{aligned}$$

6.7.5 Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα ενός σώματος έτσι ώστε η κινητική του ενέργεια να είναι διπλάσια της ενέργειας ηρεμίας του;

Έχουμε πως:

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - m_0 c^2 \\ K &= 2m_0 c^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = 3$$

Από την παραπάνω έχουμε πως $u = 0.943c$.

6.7.6 Δύο όμοια σώματα με μάζα ηρεμίας m_0 το καθένα, κινούνται με ίσες και αντίθετες ταχύτητες u , συγκρούονται πλαστικά και κάνουν ένα συσσωμάτωμα. α) Υπολογίστε την μάζα ηρεμίας M_0 του συσσωματώματος. β) Ποια η μάζα ηρεμίας του συσσωματώματος σύμφωνα με ένα παρατηρητή ο οποίος είναι ακίνητος σε σχέση με το ένα από τα αρχικά σώματα;

α) Εφ' όσον τα δύο σώματα έχουν ίσες μάζες και κινούνται με ίσες και αντίθετες ταχύτητες η αρχική και η τελική ολική ορμή είναι μηδέν. Άρα έχουμε:

$$E_{initial} = E_{final} \Rightarrow$$

$$\frac{2m_0 c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = M_0 c^2 \Rightarrow$$

$$M_0 = \frac{2m_0 c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} > 2m_0$$

β) Θεωρήστε τον παρατηρητή Ο ο οποίος είναι ακίνητος ως προς το σύστημα του εργαστηρίου. Θεωρήστε επίσης ότι το σώμα Α κινείται κατά την +x-κατεύθυνση. Τότε η ταχύτητα του παρατηρητή Ο' ο οποίος είναι ακίνητος σε σχέση με το σώμα Α είναι $v = u$. Το δεύτερο σώμα Β έχει ταχύτητα $u_B = -u$ σύμφωνα με τον ακίνητο παρατηρητή Ο. Η ταχύτητα του σώματος Β για τον παρατηρητή Ο' σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς ταχύτητας Lorentz είναι:

$$u'_B = \frac{u_B - v}{1 - \frac{u_B v}{c^2}} = -\frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}$$

Το συσσωμάτωμα, C, είναι ακίνητο σύμφωνα με τον παρατηρητή Ο ενώ κινείται με ταχύτητα $u'_C = -u$ σύμφωνα με τον Ο'. Από την αρχή διατήρησης της ορμής σύμφωνα με τον παρατηρητή Ο' έχουμε:

$$\frac{m_0 u'_A}{\sqrt{1-(u'_A/c)^2}} + \frac{m_0 u'_B}{\sqrt{1-(u'_B/c)^2}} = \frac{M_0 u'_C}{\sqrt{1-(u'_C/c)^2}}$$

Είναι όμως $u'_A = 0$ άρα:

$$\frac{m_0 \frac{(-2u)}{1 + (u/c)^2}}{\sqrt{1 - \left[\frac{2(u/c)}{1 + (u/c)^2} \right]^2}} = \frac{M_0 (-u)}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \Rightarrow M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα συμφωνεί με το αποτέλεσμα του σκέλους α).

6.7.7 Στον επιταχυντή SpS του CERN τα πρωτόνια επιταχύνονται σε ενέργειες 450 GeV. α) Υπολογίστε την διαθέσιμη ενέργεια σε συγκρούσεις της δέσμης με υδρογόνο. β) Ποια η διαθέσιμη ενέργεια όταν δύο δέσμες με την παραπάνω ενέργεια συγκρούονται σε μια διάταξη συγκρουόμενων δεσμών:

α) Από την εξίσωση (6.22) ή (6.24) έχουμε πως

$$E_{\text{διαθεσιμη}} \cong 2m_0c^2 \left(\sqrt{\frac{E_1}{2m_0c^2}} - 1 \right) \cong 28 \text{ GeV}$$

β) Από την εξίσωση (6.26) έχουμε πως

$$E_{\text{διαθεσιμη}} = E'_1 + E'_2 - 2m_0c^2 \cong 900 \text{ GeV} !!!$$

Παρατηρείστε την τεράστια διαφορά στην διαθέσιμη ενέργεια. Για την ιστορία ο επιταχυντής SpS του CERN λειτούργησε στις αρχές τις δεκαετίας του 1980 ως επιταχυντής συγκρουόμενων δεσμών πρωτονίων-αντιπρωτονίων στην παραπάνω διαθέσιμη ενέργεια. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα το 1983 να ανακαλυφθούν οι φορείς της ασθενούς αλληλεπίδρασης τα μποζόνια $W^\pm$ και Z^0 , σωματίδια με πολύ μεγάλη μάζα ($\sim 80 \text{ GeV}$ και $\sim 90 \text{ GeV}$ αντίστοιχα).

6.8 Προβλήματα

6.8.1 Η μάζα ηρεμίας ενός μιονίου είναι $m_0 = 105.6 \text{ MeV}/c^2$ και ο μέσος χρόνος ζωής του σε ηρεμία είναι $2 \times 10^{-6} \text{ s}$. Ποια η μάζα ενός μιονίου του οποίου ο μέσος χρόνος ζωής στο σύστημα του εργαστηρίου είναι $7 \times 10^{-6} \text{ s}$;

(Απάντηση: $m = 369.6 \text{ MeV}$)

6.8.2 α) Υπολογίστε την κινητική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου ορμής $2 \text{ MeV}/c$.

β) Υπολογίστε την ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου το οποίο έχει κινητική ενέργεια ίση με 2 MeV .

γ) Υπολογίστε την ορμή ενός ηλεκτρονίου το οποίο έχει ταχύτητα ίση με $0.8c$.

(Απάντηση: α) $K = 1.55 \text{ MeV}$, β) $v = 0.98c$, γ) $p = 0.681 \text{ MeV}/c$)

6.8.3 Στο Bevatron του Berkley, τα πρωτόνια πετυχαίνουν μια ταχύτητα $0.99c$.

α) Δείξτε ότι ένα πρωτόνιο που έχει την ταχύτητα αυτή έχει μια ολική ενέργεια ίση με 6.6 GeV και μια κινητική ενέργεια ίση με 5.7 GeV .

β) Αν ένα από τα πρωτόνια αυτά επιταχυνθεί ακόμη περισσότερο μέχρι που η ταχύτητά του φτάσει τα $0.995c$, κατά ποιο παράγοντα θα αυξηθεί η ολική του ενέργεια;

(Απάντηση: β) 42%)

6.8.4 Ένα ηλεκτρόνιο επιταχύνεται σε ένα σύγχροτρο και αποκτά κινητική ενέργεια ίση με 2 GeV . Ποιος ο λόγος της μάζας του προς την μάζα ηρεμίας του;

(Απάντηση: $m/m_0 = 3915$)

6.8.5 Ένα ηλεκτρόνιο κινείται με 80% της ταχύτητας του φωτός. α) Ποια η ορμή του; β) Αν θέλαμε να ξέρουμε την ορμή του με σφάλμα μόνο 5% θα αρκούσε ο τύπος $p = mv$;

(Απάντηση: α) $0.681 \text{ MeV}/c$ β) όχι)

6.8.6 Ένα ηλεκτρόνιο βγαίνει από ένα ορισμένο βήτατρο με ολική ενέργεια 1 MeV . Ποια η κινητική του ενέργεια και ποια η ταχύτητά του;

(Απάντηση: $K = 0.489 \text{ MeV}$, $v = 0.859c$)

6.8.7 Ένα υπερσχετικιστικό σωματίο είναι ένα σωματίο για το οποίο $E \gg m_0c^2$. Δείξτε ότι η ταχύτητα του υπερσχετικιστικού σωματίου δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο

$$v \cong c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_0 c^2}{E} \right)^2 \right].$$

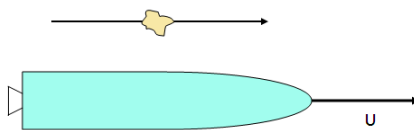
6.8.8 Ένα φωτόνιο και ένα πρωτόνιο έχουν το καθένα την ίδια ολική ενέργεια, 70 GeV. Ποιο σωματίδιο έχει την μεγαλύτερη ορμή;
(Απάντηση: το φωτόνιο)

6.8.9 Ένα σωματίδιο μάζας m_0 έχει ορμή ίση με $m_0 c$. α) Βρείτε το v/c , το λόγο της ταχύτητάς του προς την ταχύτητα του φωτός. β) Βρείτε το $E/m_0 c^2$, το λόγο της ολικής του ενέργειας προς την ενέργεια ηρεμίας του.
(Απάντηση: $\beta = 0.7$, $E/m_0 c^2 = \sqrt{2}$)

6.8.10 Ένα ηλεκτρόνιο έχει ταχύτητα $v = 5 \times 10^7$ m/sec. Πόση ενέργεια απαιτείται ώστε να διπλασιαστεί η ταχύτητά του;
(Απάντηση: $\Delta E = 0.024$ MeV)

6.8.11 Ένα πιόνιο το οποίο κινείται προς την Ανατολή διασπάται σε δύο φωτόνια. Το ένα κινείται προς την Ανατολή και το άλλο προς την Δύση. Το προς την Ανατολή κινούμενο φωτόνιο έχει διπλάσια ενέργεια από αυτό που κινείται προς την Δύση. Αποδείξτε ότι το πιόνιο εκκινείτο με το ένα τρίτο της ταχύτητας του φωτός πριν από την διάσπασή του. (Υπόδειξη: Θεωρήστε διατήρηση της Ενέργειας και της Ορμής.)

6.8.12 Στο παρακάτω σχήμα ένας μετεωρίτης προσπερνά ένα διαστημόπλοιο. Ένας παρατηρητής στο διαστημόπλοιο μετρά ότι η ενέργεια του μετεωρίτη είναι $E' = 10^{17}$ Joules και η ορμή του $p' = 10^8$ Kgr m/sec. Εάν η ταχύτητα του διαστημοπλοίου σε σχέση με την Γή είναι 2×10^8 m/sec, ποια είναι η ενέργεια και η ορμή του μετεωρίτη σύμφωνα με έναν ακίνητο παρατηρητή πάνω στη Γή;



6.8.13 Ένα φωτόνιο ενέργειας 1 MeV συγκρούεται με ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο, το οποίο είναι δεσμευμένο από ένα βαρύ πυρήνα, και απορροφάται. Εάν αγνοήσουμε την ενέργεια ανάκρουσης του πυρήνα ποια η ταχύτητα του ηλεκτρονίου μετά την σύγκρουση;

(Απάντηση: $v = 0.941c$)

6.8.14 Ένα ηλεκτρόνιο κινείται στο εργαστήριο με ταχύτητα $u = 0.6c$. Ένας παρατηρητής κινείται με ταχύτητα $0.8c$ κατά την διεύθυνση κίνησης του ηλεκτρονίου. Ποια η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου σύμφωνα με το κινούμενο παρατηρητή;

(Απάντηση: $K = 0.043 \text{ MeV}$)

6.8.15 α) Δύο 1-MeV φωτόνια κινούνται κατά την ίδια διεύθυνση. Ποια είναι η αναλλοίωτη μάζα του συστήματος αυτού;

β) Δύο 1-MeV φωτόνια κινούνται σε ακριβώς αντίθετες διευθύνσεις. Ποια είναι η αναλλοίωτη μάζα του συστήματος σε αυτή την περίπτωση;

γ) Ποια είναι η μάζα ηρεμίας του τελευταίου συστήματος;

6.8.16 Ένα ουδέτερο καόνιο K^0 διασπάται σε δύο ουδέτερα πιόνια π^0 . Εάν η μάζα ηρεμίας του καονίου είναι $498 \text{ MeV}/c^2$ και του πιονίου $135 \text{ MeV}/c^2$, ποια είναι η κινητική ενέργεια κάθε πιονίου π^0 ;

(Απάντηση: $K = 114 \text{ MeV}$)

6.8.17 Ένα πρωτόνιο του οποίου η ολική ενέργεια είναι $30m_p c^2$ (περίπου 28 GeV) συγκρούεται με ένα πρωτόνιο που βρίσκεται σε ηρεμία. α) Πόση είναι η διαθέσιμη ενέργεια κατά την σύγκρουση σε μονάδες $m_p c^2$; β) Ποια είναι η μέγιστη ολική μάζα όλων των προϊόντων της αλληλεπίδρασης σε μονάδες m_p (εάν τα αρχικά σωματία επιζήσουν και μετά την σύγκρουση θα πρέπει να μετρηθούν σαν προϊόντα); γ) Απαντήστε στις ίδιες δύο ερωτήσεις εάν τα δύο πρωτόνια που το καθένα έχει ενέργεια $30m_p c^2$, συγκρουστούν κατά μέτωπο σε ένα πείραμα συγκρουόμενων δεσμών.

6.8.18 Ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m_0 κινείται με ταχύτητα $0.8c$ και συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας $3m_0$. Ποια η μάζα ηρεμίας του σώματος που προκύπτει;
(Απάντηση: $M_0 = 4.47 m_0$)

6.8.19 Ποια η ελάχιστη κινητική ενέργεια, ενός βλήματος πρωτονίου το οποίο κτυπά ένα ακίνητο πρωτόνιο, η οποία κάνει δυνατή την παραγωγή ενός αντιπρωτονίου κατά την αντίδραση $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$;
(Απάντηση: $M_0 = 12.2 \text{ GeV}$)

6.8.20 Ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m_0 και κινητική ενέργεια $3m_0c^2$ συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας $2m_0$. Υπολογίστε την ταχύτητα και την μάζα ηρεμίας του σώματος που προκύπτει;
(Απάντηση: $V = 0.645c$, $M_0 = 4.58 m_0$)

6.8.21 Ένα ηλεκτρόνιο με ολική ενέργεια $7m_e c^2$ πλησιάζει ένα άλλο ηλεκτρόνιο το οποίο είναι ακίνητο. Δείξτε ότι η ταχύτητα του συστήματος του κέντρου ορμής για το ζεύγος αυτό των ηλεκτρονίων είναι κατά προσέγγιση $0.87c$.

6.8.22 Ένα πιόνιο π^+ με μάζα ηρεμίας $140 \text{ MeV}/c^2$ δημιουργείται σε ύψος 100 Km από την επιφάνεια της θάλασσας, μέσα στη ατμόσφαιρα. Το πιόνιο έχει ολική ενέργεια $1.5 \times 10^5 \text{ MeV}$ και κινείται προς τα κάτω. Εάν διασπαστεί $2 \times 10^{-8} \text{ sec}$ μετά την δημιουργία του, όπως υπολογίζεται στο σύστημα ηρεμίας του, σε ποιο ύψος πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας λαμβάνει χώρα η διάσπαση;
(Απάντηση: $h = 93.6 \text{ Km}$)

6.8.23 α) Ένα θετικό πιόνιο π^+ μάζας M αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία. Διασπάται σε ένα μιόνιο μάζας m και ένα νεutrino του μιόνιου που δεν έχει μάζα ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$). Χρησιμοποιώντας τους νόμους διατήρησης της ενέργειας και της ορμής, δείξτε ότι η ταχύτητα του μιόνιου δίνεται από την

$$\frac{v}{c} = \frac{(M/m)^2 - 1}{(M/m)^2 + 1}$$

Χρησιμοποιώντας τις γνωστές μάζες του πιονίου και του μιονίου, υπολογίστε τον λόγο v/c αριθμητικά.

β) Αν το πιόνιο διασπάται σε ένα ποζιτρόνιο και ένα νεutrίνο του ηλεκτρονίου ($\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$) ποια η τιμή του λόγου v/c ; (Η τελευταία διάσπαση έχει πολύ μικρή πιθανότητα να συμβεί).

6.8.24 Ένα σωματίδιο μάζας m_1 και αρχικής ολικής ενέργειας E_1 συγκρούεται με ένα ακίνητο σωματίο μάζας m_2 . Τα σωματίδια ενώνονται και σχηματίζουν ένα σωματίο μάζας M που κινείται προς τα εμπρός κατά την διεύθυνση κίνησης του προσπίπτοντος σωματίου. α) Δείξτε ότι

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2(E_1/c^2)}$$

β) Δείξτε ότι κατά προσέγγιση το μέγεθος του M στο μη σχετικιστικό όριο ισούται με $m_1 + m_2$

Κεφάλαιο 7 :

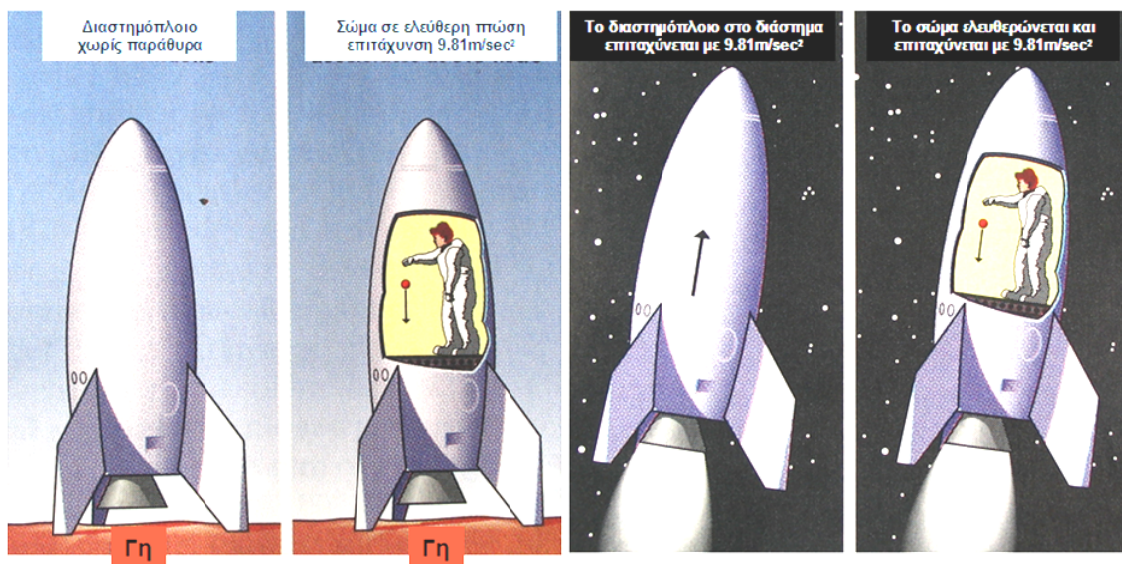
Στοιχεία της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

7.1 Η Αρχή της Ισοδυναμίας του Einstein.

Σύμφωνα με τον Νεύτωνα η μάζα ενός σώματος ορίζεται με δύο τρόπους:

- Υποθέστε πως εφαρμόζουμε μια γνωστή δύναμη σε ένα σώμα και μετράμε την επιτάχυνσή του. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, $F = ma$, μπορούμε να υπολογίσουμε την μάζα του. Η μάζα που υπολογίζεται με αυτόν τον τρόπο καλείται **αδρανειακή μάζα**.
- Υποθέστε πως το ίδιο σώμα το ζυγίζουμε. Το βάρος είναι η δύναμη την οποία ασκεί η Γη πάνω στο σώμα σύμφωνα με τον νόμο της βαρύτητας $F = \frac{Gm_1m_2}{R^2}$. Η μάζα του σώματος που υπολογίζεται με αυτόν τον τρόπο καλείται **βαρυτική μάζα**.

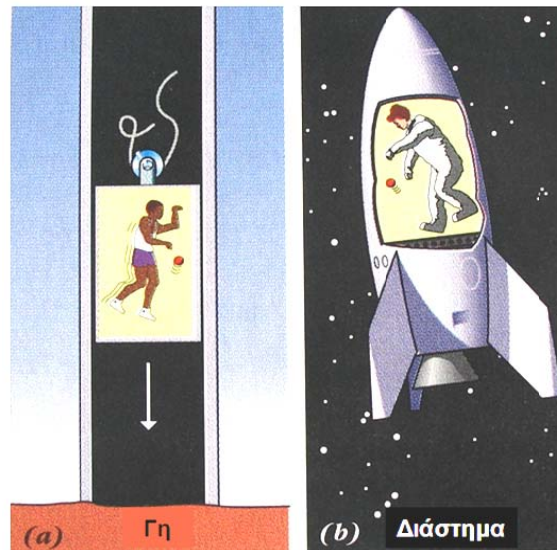
Ο Νεύτωνας πίστευε πως οι δύο μάζες είναι οι ίδιες. Σύγχρονα πειράματα επαληθεύουν την ισότητα μεταξύ των μαζών με ακρίβεια της τάξης του 10^{-11} . Ο Einstein αντιλήφθηκε πως η ισότητα της αδρανειακής και της βαρυτικής μάζας δεν είναι τυχαία. Το είδε ως μια βασική αρχή που ισχύει στο σύμπαν και το ονόμασε *Αρχή της Ισοδυναμίας*. Σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας «δεν μπορούμε πειραματικά να διαχωρίσουμε επιταχύνσεις που οφείλονται στη βαρύτητα από επιταχύνσεις που οφείλονται σε δυνάμεις άλλου είδους».



Σχήμα 7.1

Στο σχήμα 7.1 εικονίζεται το σχετικό, με την Αρχή της Ισοδυναμίας, παράδειγμα του Einstein. Φανταστείτε τον εαυτό σας μέσα σε ένα διαστημόπλοιο το οποίο δεν έχει παράθυρα και βρίσκεται ακίνητο στην επιφάνεια της Γης. Εάν αφήνατε ένα σώμα ελεύθερο μέσα στη διαστημόπλοιο θα παρατηρούσατε ότι εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση 9.81 m/sec^2 . Τώρα υποθέστε ότι βρίσκεστε, χωρίς να το ξέρετε, με το διαστημόπλοιο στο διάστημα και αυτό κινείται επιταχυνόμενο με σταθερή επιτάχυνση 9.81 m/sec^2 . Εάν αφήνατε ένα σώμα ελεύθερο μέσα στη διαστημόπλοιο θα παρατηρούσατε ξανά πως εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση 9.81 m/sec^2 . Το πιο πιθανό είναι πως θα συμπεραίνατε πως βρίσκεστε ακόμη στην επιφάνεια της Γης. Με λίγα λόγια δεν μπορείτε κάνοντας κάποιο πείραμα μέσα στο διαστημόπλοιο να διακρίνετε μεταξύ των φαινομένων που οφείλονται στη δύναμη της βαρύτητας και σε εκείνα που οφείλονται στη δύναμη που ασκεί η μηχανή του διαστημοπλοίου.

Η Αρχή της Ισοδυναμίας μας υποδεικνύει έναν τρόπο να εκμηδενίσουμε τοπικά την βαρύτητα. Στο σχήμα 7.2.a ένας παρατηρητής μέσα σε έναν ανελκυστήρα, ο οποίος εκτελεί ελεύθερη πτώση, αφήνει ελεύθερο ένα σώμα. Το σώμα αιωρείται και ο παρατηρητής μετρά μηδενική επιτάχυνση. Μέσα στον ανελκυστήρα επικρατούν συνθήκες έλλειψης βαρύτητας. Στο σχήμα 7.2.b ένας αστροναύτης στο διάστημα μακριά από την επίδραση κάθε ουράνιας μάζας κινείται ομαλά. Ο αστροναύτης εκτελεί το ίδιο πείραμα αφήνοντας ελεύθερο ένα σώμα. Το αποτέλεσμα αυτού του πειράματος είναι το ίδιο με το προηγούμενο.



Σχήμα 7.2

Η Αρχή της Ισοδυναμίας είναι πρωταρχικής σημασίας στη θεμελίωση της **Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας**.

7.2 Η Γεωμετρία του χωρόχρονου.

Μια απλή ερώτηση που μπορεί να θέσει κανείς είναι με ποιόν τρόπο συσχετίζονται η γεωμετρία του χώρου και η φυσική; Ο Νεύτωνας υπέθεσε πως η γεωμετρία του σύμπαντος είναι επίπεδη. Ο Einstein δεν έκανε την ίδια υπόθεση παρά έθεσε την παραπάνω ερώτηση σε πειραματικό έλεγχο, έτσι ώστε το πείραμα να δείξει ποια ακριβώς είναι η γεωμετρία του χωρόχρονου.

Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Σύμφωνα με το αξίωμα του Ευκλείδη δύο παράλληλες ευθείες οι οποίες εκτείνονται έως το άπειρο διατηρούν σταθερή την απόστασή τους και δεν τέμνονται. Αυτό συνεπάγεται πως η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι *Επίπεδη*. Κατά συνέπεια ισχύει το θεώρημα του Πυθαγόρα σύμφωνα με το οποίο το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με 180° (σχήμα 7.3.α). Το τελευταίο αποτελεί το βασικό κριτήριο ότι μια γεωμετρία είναι επίπεδη.

Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

Το 1829 ο Ρώσος μαθηματικός Nikolai Lobachevski υπέδειξε πως το αξίωμα του Ευκλείδη δεν είναι το μοναδικό το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε μια αποδεκτή γεωμετρία. Πρότεινε ένα νέο αξίωμα σύμφωνα με το οποίο δύο παράλληλες ευθείες μπορούν να αποκλίνουν επιτρέποντας όμως ταυτόχρονα την ανάπτυξη μιας αποδεκτής γεωμετρίας. Στις δύο διαστάσεις η γεωμετρία που πρότεινε έχει ιδιότητες παρόμοιες με την επιφάνεια ενός σαμαριού (σχήμα 7.3.b). Η συγκεκριμένη γεωμετρία ονομάζεται *Υπερβολική Γεωμετρία*. Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου σύμφωνα με την υπερβολική γεωμετρία είναι μικρότερο των 180° . Η υπερβολική γεωμετρία είναι άπειρη, γιατί εάν επεκτείνουμε δύο παράλληλες ευθείες αυτές δεν συναντώνται ποτέ. Γιαυτό τον λόγο τόσο η υπερβολική όσο και η επίπεδη γεωμετρία ονομάζεται και *Ανοικτή Γεωμετρία* (open geometry).

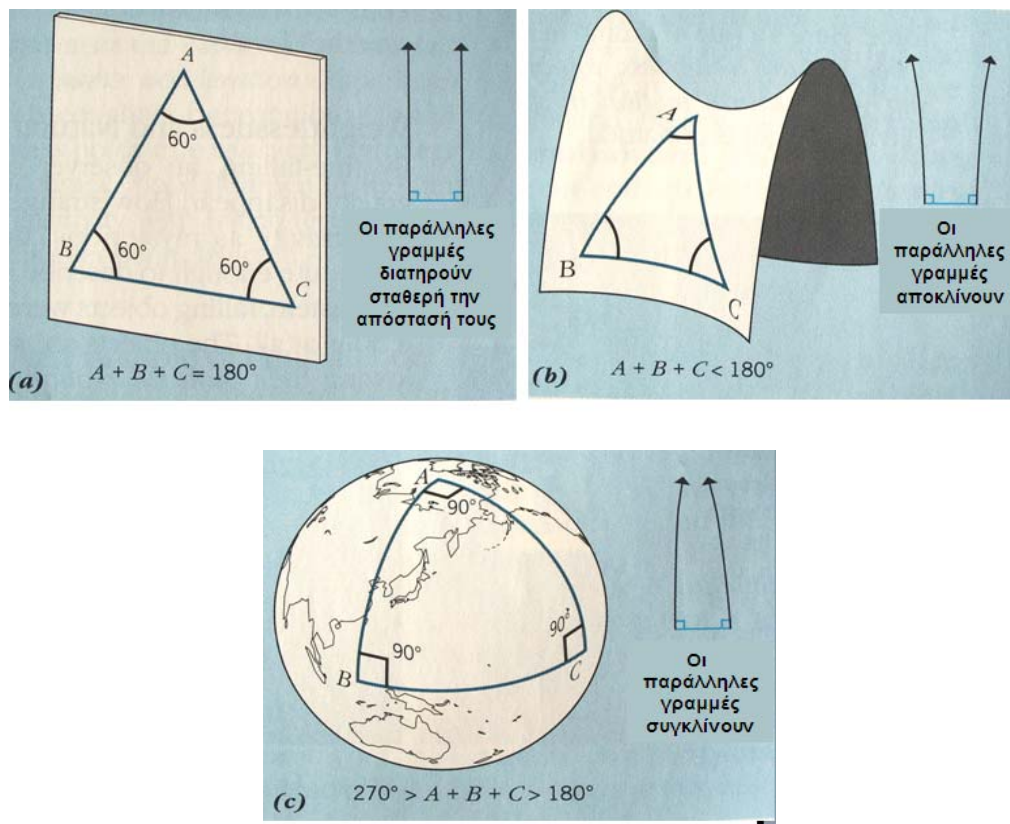
Το 1854 ο Georg Riemann πρότεινε μια νέα αποδεκτή γεωμετρία κατά την οποία δύο παράλληλες ευθείες μπορούν να συγκλίνουν (σχήμα 7.3.c). Η επιφάνεια της σφαίρας έχει αυτή τη *Σφαιρική Γεωμετρία* κατά την οποία το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο των 180° . Η Σφαιρική Γεωμετρία ονομάζεται και *Κλειστή Γεωμετρία* (closed geometry).

Οι δύο παραπάνω μη Ευκλείδειες γεωμετρίες χαρακτηρίζονται από την καμπυλότητά τους. Η Υπερβολική Γεωμετρία έχει αρνητική καμπυλότητα και εκτείνεται έως το άπειρο. Σε αντίθεση η Σφαιρική Γεωμετρία έχει θετική καμπυλότητα και είναι πεπερασμένη (έχει δηλαδή καθορισμένο μέγεθος) αλλά δεν παρουσιάζει άκρα.

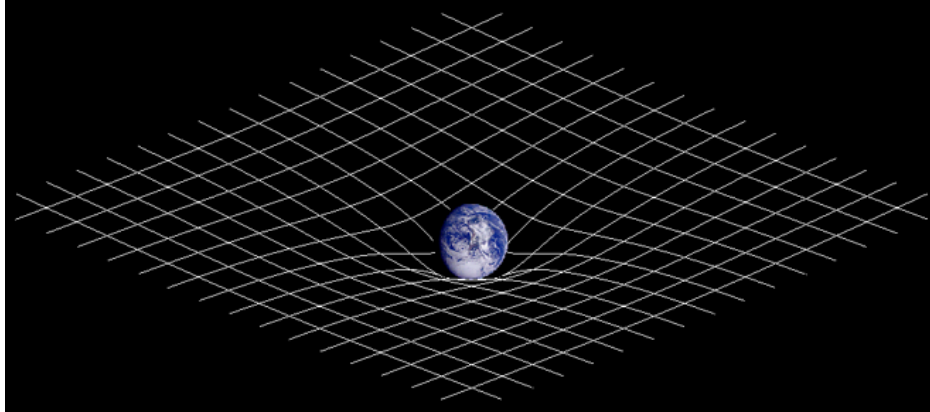
Την εποχή του Νεύτωνα ήταν γνωστή μόνο η Ευκλείδειος Γεωμετρία. Ο Einstein όμως είχε στη διάθεσή του τρεις γεωμετρίες. Ποια από τις τρεις είναι η σωστή επιλογή για τον κόσμο μας; Και πως αυτή η επιλογή σχετίζεται με την βαρύτητα; Σύμφωνα με την **Γενική Θεωρία της Σχετικότητας** του Einstein η τοπική κατανομή της μάζας (ή της ενέργειας) προσδιορίζει τη

γεωμετρία του χωρόχρονου. Όλα τα σώματα εξ' αιτίας της μάζας τους προκαλούν γύρω τους μια τοπική καμπύλωση στον χωρόχρονο. Είναι αυτή η καμπύλωση του χωρόχρονου η οποία αναδεικνύεται ως επιταχυνόμενη κίνηση, την οποία ο Νεύτωνας προσδιόρισε πως δημιουργείται λόγω των βαρυτικών δυνάμεων.

Την καμπύλωση του χωρόχρονου μπορούμε να την φανταστούμε με τον ακόλουθο τρόπο. Θεωρείστε ότι έχουμε ένα τραμπολίνο. Εάν τοποθετήσουμε ένα βαρύ αντικείμενο πάνω του, όπως μια μπάλα του bowling, θα δημιουργηθεί ένα βαθούλωμα. Αυτό είναι ανάλογο με την τοπική καμπύλωση του χωρόχρονου που προκαλεί η ύπαρξη μιας μεγάλης μάζας, όπως πχ. η Γη (σχήμα 7.4). Η παρουσία της μάζας αλλάζει τοπικά την γεωμετρία του χωρόχρονου. Όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα τόσο εντονότερη είναι η καμπύλωση του χωρόχρονου.

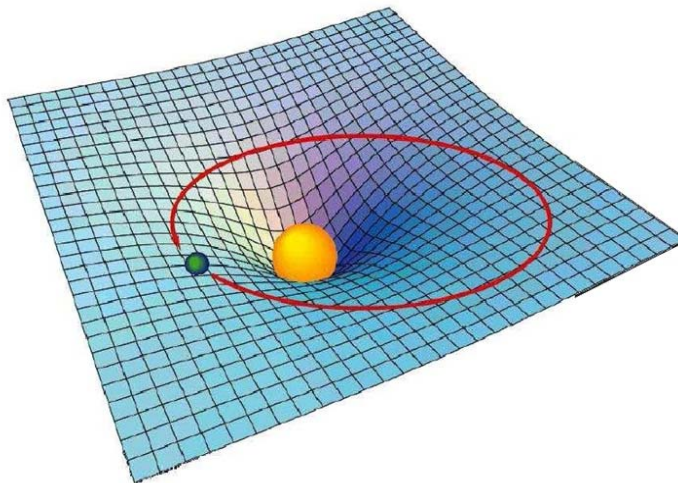


Σχήμα 7.3



Σχήμα 7.4

Εάν ένα αντικείμενο μικρότερης μάζας, όπως για παράδειγμα ένα μπαλάκι του γκόλφ, πλησιάσει την περιοχή του βαθουλώματος θα επιταχυνθεί προς την μεγαλύτερη μπάλα του bowling, με έναν τρόπο που καθορίζεται από το βαθούλωμα. Εάν το μπαλάκι του γκόλφ πλησιάσει το βαθούλωμα με κατάλληλο συνδυασμό διεύθυνσης και ταχύτητας αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα να τεθεί σε τροχιά γύρω από την μπάλα του bowling. Αυτό για παράδειγμα είναι ανάλογο με την περιστροφή της Γης γύρω από τον Ήλιο (σχήμα 7.5). Συνοψίζοντας με λίγα λόγια: *Ο χωρόχρονος υπαγορεύει στη μάζα πως θα κινηθεί και η μάζα υπαγορεύει στον χωρόχρονο πως θα καμπυλωθεί.*



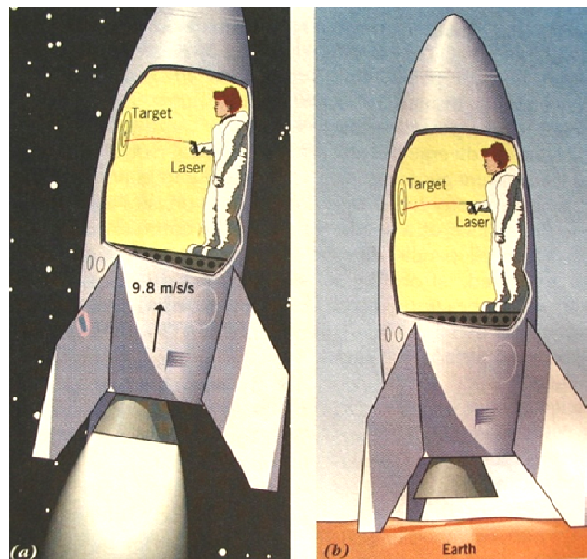
Σχήμα 7.5

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein προβλέπει πως ακόμη και οι ακτίνες του φωτός καμπυλώνονται όταν περνούν κοντά από σώματα με μεγάλη μάζα. Για να καταλάβουμε το φαινόμενο στο σχήμα 7.6.a ένας αστροναύτης μέσα σε ένα διαστημόπλοιο το οποίο επιταχύνεται με 9.81 m/sec^2 σημαδεύει ένα στόχο με ένα laser. Καθώς το φως ταξιδεύει προς τον στόχο το διαστημόπλοιο επιταχύνεται συνεχώς προς τα πάνω. Εξ' αιτίας αυτού η διαδρομή που διαγράφει το φως σύμφωνα με τον αστροναύτη είναι καμπύλη. Εάν ο ίδιος αστροναύτης κάνει το πείραμα στην επιφάνεια της Γης σύμφωνα με την Αρχή της Αντιστοιχίας θα βρει το ίδιο αποτέλεσμα(σχήμα 7.6.b).

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε πως εάν κάνουμε το παραπάνω πείραμα στην επιφάνεια της Γης για μία απόσταση παρατηρητή-στόχου ίση με 3 m το φως θα αποκλίνει κατά $5 \times 10^{-16} \text{ m}$, μέγεθος πολύ μικρό για να παρατηρηθεί. Παρ' όλα αυτά σήμερα υπάρχουν πολλά παραδείγματα που προέρχονται από παρατηρήσεις με τηλεσκόπια στο διάστημα όπου η εκτροπή του φωτός είναι εμφανής.

Γαιωδετικές καμπύλες

Όπως αναφέραμε πιο πάνω η μάζα και η ενέργεια προκαλούν τοπική καμπύλωση στο χωρόχρονο. Το ποσό και η πυκνότητα της μάζας και της ενέργειας καθορίζουν το πόσο απότομη και μεγάλη θα είναι η καμπύλωση. Σύμφωνα λοιπόν με την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein καθώς ένα σώμα κινείται μέσα στην καμπυλωμένη περιοχή του χωρόχρονου ακολουθεί μια ευθύγραμμη πορεία, η οποία εξ ορισμού αποτελεί τον συντομότερο δρόμο μεταξύ δύο σημείων του χωρόχρονου. Η πορεία αυτή ονομάζεται *Γαιωδετική* καμπύλη. Η συγκεκριμένη πορεία σε εμάς όμως εμφανίζεται ως καμπύλη. Καμία δύναμη δεν ασκείται στο σώμα. Αυτός ακριβώς είναι και ο τρόπος με τον οποίο ο Einstein κατάλαβε την φύση της βαρυτικής δύναμης.



Σχήμα 7.6

Ο Einstein εξήγησε τις τροχιές των πλανητών γύρω από τον ήλιο με τον ίδιο τρόπο. Ο Ήλιος λόγω της μεγάλης του μάζας καμπυλώνει τον χωρόχρονο γύρω του. Όλοι οι πλανήτες κινούνται σε ευθείες τροχιές (Γαιωδευτικές) στον χωρόχρονο. Εμείς παρατηρούμε στις τρεις διαστάσεις αυτές τις τροχιές ως ελλειπτικές. Ο λόγος έγκειται στο ότι ο χωρόχρονος γύρω μας είναι καμπυλωμένος και όχι επίπεδος. Το μέγεθος της καμπυλότητας του χωρόχρονου ελαττώνεται καθώς η απόσταση από τον Ήλιο αυξάνει. Αυτό εξηγεί για παράδειγμα το γιατί η Γη ακολουθεί μια τροχιά πολύ πιο καμπυλωμένη από αυτήν του Δία.

Συνοψίζοντας η διαφορά στην προσέγγιση σχετικά με την βαρύτητα μεταξύ του Νεύτωνα και του Einstein είναι η ακόλουθη. Ο Νεύτωνας θεωρεί πως η βαρύτητα είναι μία δύναμη η οποία δρά μεταξύ δύο σωμάτων και η οποία εξαρτάται από τις μάζες των σωμάτων και την μεταξύ τους απόσταση. Ο Einstein θεωρεί πως κάθε σώμα ακολουθεί μια διαδρομή μέσα στον χωρόχρονο. Τέτοιες τροχιές, για σώματα τα οποία εκτελούν ελεύθερη πτώση, δεν εξαρτώνται από την μάζα τους.

7.3 Λυμένα Προβλήματα

7.3.1 Βαρυτική Ερυθρά Μετατόπιση: Ο Γιώργος και ο Πέτρος είναι δίδυμοι επιστήμονες. Για να ελέγξουν το φαινόμενο της βρυτικής ερυθράς μετατόπισης ο Γιώργος εγκαθίσταται σε ένα εργαστήριο στο επίπεδο της θάλασσας ενώ ο Πέτρος στο αστεροσκοπείο Mauna Kea της Χαβάης σε υψόμετρο 4200 m. Μετά από την πάροδο ενός έτους σύμφωνα με το ρολόι του Γιώργου ο Πέτρος συναντά τον αδελφό του. Ποιος από τους δύο έχει γεράσει περισσότερο και κατά πόσο;

Σύμφωνα με την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας τα ρολόγια τα οποία βρίσκονται μέσα σε ισχυρά πεδία δυνάμεων βαρύτητας προχωρούν βραδύτερα από ότι τα ρολόγια τα οποία βρίσκονται σε ασθενή πεδία δυνάμεων. Στην πραγματικότητα, η γενική σχετικότητα δείχνει ότι η σημαντική μεταβλητή είναι το δυναμικό της βαρύτητας, και όχι η δύναμη της βαρύτητας. Εάν Δt_1 και Δt_2 είναι τα χρονικά διαστήματα που μετρούν τα δύο ρολόγια που είναι τοποθετημένα σε περιοχές διαφορετικού δυναμικού βαρύτητας, η προσεγγιστική σχέση είναι

$$\frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t} = \frac{u_2 - u_1}{c^2} \quad (1)$$

όπου u το δυναμικό της βαρύτητας, ή η δυναμική ενέργεια της βαρύτητας ανά μονάδα μάζας ($u = U/m$). Το Δt το οποίο εμφανίζεται στην παραπάνω σχέση μπορεί να αντικατασταθεί είτε με το Δt_1 είτε με το Δt_2 είτε με την μέση τιμή τους.

Κοντά στη Γη η μεταβολή του δυναμικού βαρύτητας μεταξύ σημείων που χωρίζονται από μια κατακόρυφη απόσταση h είναι $\Delta u = gh$. Έτσι από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t_1} = \frac{gh}{c^2} = \frac{9.81 \times 4200}{(3 \times 10^8)^2} = 4.6 \times 10^{-13}$$

Το ρολόι του Γιώργου κατάγραψε $\Delta t_1 = 1y$. Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση το ρολόι του Πέτρου θα κατέγραψε:

$$\Delta t_2 = \Delta t_1 + (\Delta t_1 \times 4.6 \times 10^{-13})$$

Έτσι ο Πέτρος στη διάρκεια του ενός έτους γέρασε περισσότερο κατά $\Delta t_1 \times 4.6 \times 10^{-13} = 1.45 \times 10^{-5} \text{ sec}$.

7.3.2 Μαύρες οπές και ακτίνα Schwarzschild: Το κέντρο του Γαλαξία μας βρίσκεται στον αστερισμό του Τοξότη και στους αστρονομικούς χάρτες σημειώνεται ως Sagittarius A. Τι ακριβώς βρίσκεται σε αυτή τη θέση δεν γνωρίζουμε με ακρίβεια γιατί το ορατό φως από εκείνη την περιοχή δεν φτάνει σε μας εξ αιτίας της πυκνής σκόνης που καλύπτει το επίπεδο του γαλαξία μας. Μελέτες όμως σε άλλες περιοχές του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος δείχνουν πως στην περιοχή αυτή είναι πιθανόν να υπάρχει μια μαύρη οπή με μάζα ίση με 3×10^6 ηλιακές μάζες. Υπολογίστε την ακτίνα Schwarzschild της μαύρης οπής και συγκρίνετε την με την ακτίνα του Ήλιου μας.

Η ακτίνα Schwarzschild μιας μαύρης οπής, ονομάζεται και βαρυτική ακτίνα, ορίζει μια σφαίρα γύρω από την οπή μέσα από την οποία κανένα σήμα που παράγεται δεν μπορεί να διαφύγει. Η σφαίρα αυτή είναι γνωστή και ως ορίζοντας γεγονότων. Η ακτίνα Schwarzschild ορίζεται ως:

$$R = \frac{2GM}{c^2} \quad (1)$$

όπου $G = (6.67 \times 10^{-11}) \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ sec}^{-2}$ η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και M η μάζα της μαύρης οπής. Με δεδομένο την μάζα του Ηλίου ίση με $M_s = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ έχουμε πως:

$$R = \frac{2 \times (6.67 \times 10^{-11}) \times (3 \times 10^6) \times (1.99 \times 10^{30})}{(3 \times 10^8)^2} \text{ m} = 8.85 \times 10^6 \text{ km}$$

Η ακτίνα του Ήλιου μας είναι $R_s = 6.95 \times 10^5 \text{ km}$. Παρατηρούμε πως η ακτίνα της μαύρης οπής στο κέντρο του γαλαξία μας είναι περίπου μόνο 10 φορές μεγαλύτερη από αυτή του ήλιου μας παρότι η μαύρη οπή ζυγίζει 3 εκατομμύρια φορές περισσότερο από αυτόν.

7.4 Προβλήματα

7.4.1 Ένα ρολόι που βρίσκεται σε ένα μπαλόνι 10km πάνω από την επιφάνεια της Γης προχωρεί γρηγορότερα από ένα ρολόι που βρίσκεται κάτω από αυτό και πάνω στη Γη. Πόσο χρόνο κερδίζει το ρολόι του μπαλονιού σε ένα έτος;

7.4.2 Από την εξίσωση (1) του προβλήματος 7.3.1, δείξτε πως η κλασματική διαφορά στις κλίμακες χρόνου σε μεγάλη απόσταση από ένα αστέρι και πάνω στην επιφάνεια του αστεριού ισούται με $GM/(Rc^2)$, όπου M η μάζα του αστεριού και R η ακτίνα του.

7.4.3 Με βάση το προηγούμενο πρόβλημα υπολογίστε πόσο χρόνο κερδίζει σε ένα έτος ένα ρολόι το οποίο βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο Voyager 1 (το οποίο βρίσκεται πλέον στις παρυφές του ηλιακού μας συστήματος) από ένα ρολόι πάνω στην επιφάνεια του Ήλιου.

7.4.4 Ένας αστροναύτης κινείται αργά μακριά από την Γη προς τον πολύ μεγαλύτερης μάζας πλανήτη του Δία. Πριν από την αναχώρησή του ο πομπός του και ένας δέκτης στη Γη συγχρονίζονται τέλεια στην ίδια συχνότητα. Εξ αιτίας της επίδρασης της βαρύτητας πάνω στις κλίμακες του χρόνου, πρέπει από καιρό σε καιρό να μεταβάλει τη συχνότητα του πομπού του για να φτάσει η ακτινοβολία του στη Γη με την κατάλληλη συχνότητα για τον δέκτη. Σε ποιο τμήμα του ταξιδιού του από την επιφάνεια της Γης έως την επιφάνεια του Δία πρέπει να εκπέμπει με ελαφρά αυξημένη συχνότητα; Σε ποιο τμήμα με ελαφρά ελαττωμένη συχνότητα; Σε ποιο τμήμα με την αρχική συχνότητα;