

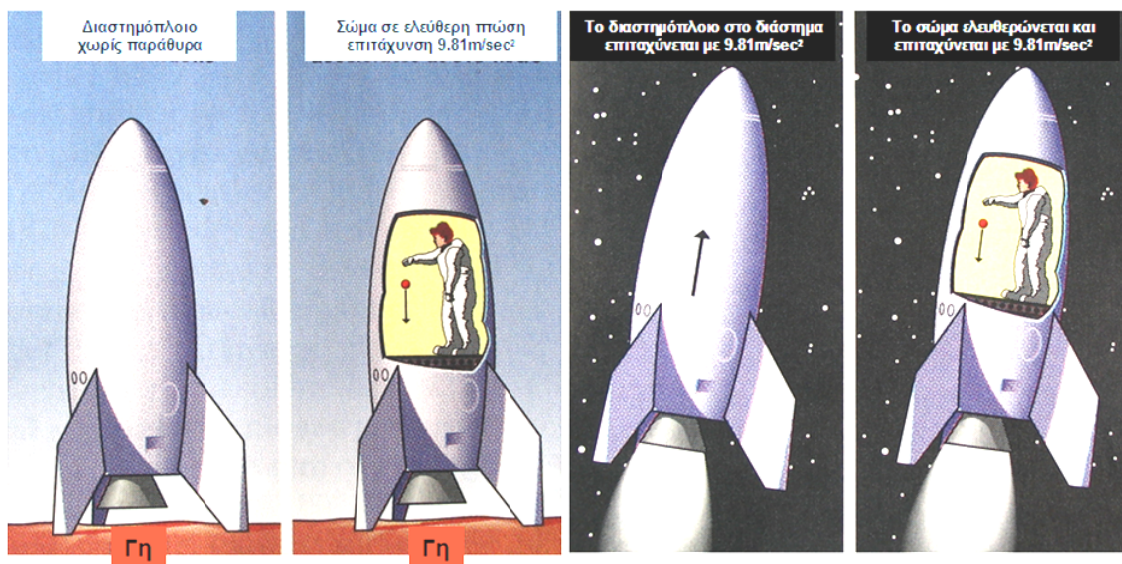
Κεφάλαιο 7 : Στοιχεία της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

7.1 Η Αρχή της Ισοδυναμίας του Einstein.

Σύμφωνα με τον Νεύτωνα η μάζα ενός σώματος ορίζεται με δύο τρόπους:

- Υποθέστε πως εφαρμόζουμε μια γνωστή δύναμη σε ένα σώμα και μετράμε την επιτάχυνσή του. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, $F = ma$, μπορούμε να υπολογίσουμε την μάζα του. Η μάζα που υπολογίζεται με αυτόν τον τρόπο καλείται **αδρανειακή μάζα**.
- Υποθέστε πως το ίδιο σώμα το ζυγίζουμε. Το βάρος είναι η δύναμη την οποία ασκεί η Γη πάνω στο σώμα σύμφωνα με τον νόμο της βαρύτητας $F = \frac{Gm_1m_2}{R^2}$. Η μάζα του σώματος που υπολογίζεται με αυτόν τον τρόπο καλείται **βαρυτική μάζα**.

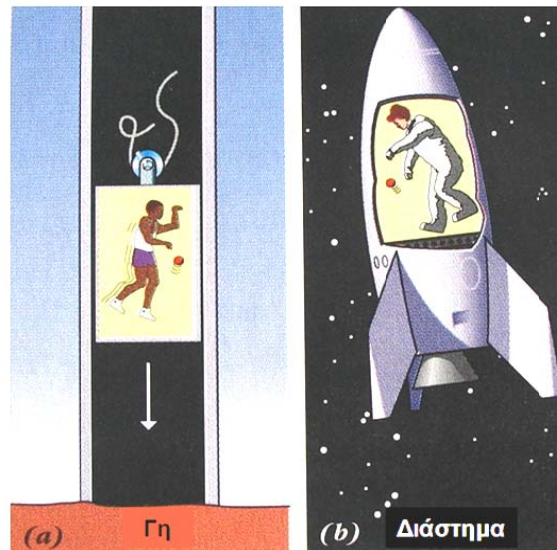
Ο Νεύτωνας πίστευε πως οι δύο μάζες είναι οι ίδιες. Σύγχρονα πειράματα επαληθεύουν την ισότητα μεταξύ των μαζών με ακρίβεια της τάξης του 10^{-11} . Ο Einstein αντιλήφθηκε πως η ισότητα της αδρανειακής και της βαρυτικής μάζας δεν είναι τυχαία. Το είδε ως μια βασική αρχή που ισχύει στο σύμπαν και το ονόμασε *Αρχή της Ισοδυναμίας*. Σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας «δεν μπορούμε πειραματικά να διαχωρίσουμε επιταχύνσεις που οφείλονται στη βαρύτητα από επιταχύνσεις που οφείλονται σε δυνάμεις άλλου είδους».



Σχήμα 7.1

Στο σχήμα 7.1 εικονίζεται το σχετικό, με την Αρχή της Ισοδυναμίας, παράδειγμα του Einstein. Φανταστείτε τον εαυτό σας μέσα σε ένα διαστημόπλοιο το οποίο δεν έχει παράθυρα και βρίσκεται ακίνητο στην επιφάνεια της Γης. Εάν αφήνατε ένα σώμα ελεύθερο μέσα στη διαστημόπλοιο θα παρατηρούσατε ότι εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση 9.81 m/sec^2 . Τώρα υποθέστε ότι βρίσκεστε, χωρίς να το ξέρετε, με το διαστημόπλοιο στο διάστημα και αυτό κινείται επιταχυνόμενο με σταθερή επιτάχυνση 9.81 m/sec^2 . Εάν αφήνατε ένα σώμα ελεύθερο μέσα στη διαστημόπλοιο θα παρατηρούσατε ξανά πως εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση 9.81 m/sec^2 . Το πιο πιθανό είναι πως θα συμπεραίνατε πως βρίσκεστε ακόμη στην επιφάνεια της Γης. Με λίγα λόγια δεν μπορείτε κάνοντας κάποιο πείραμα μέσα στο διαστημόπλοιο να διακρίνετε μεταξύ των φαινομένων που οφείλονται στη δύναμη της βαρύτητας και σε εκείνα που οφείλονται στη δύναμη που ασκεί η μηχανή του διαστημοπλοίου.

Η Αρχή της Ισοδυναμίας μας υποδεικνύει έναν τρόπο να εκμηδενίσουμε τοπικά την βαρύτητα. Στο σχήμα 7.2.a ένας παρατηρητής μέσα σε έναν ανελκυστήρα, ο οποίος εκτελεί ελεύθερη πτώση, αφήνει ελεύθερο ένα σώμα. Το σώμα αιωρείται και ο παρατηρητής μετρά μηδενική επιτάχυνση. Μέσα στον ανελκυστήρα επικρατούν συνθήκες έλλειψης βαρύτητας. Στο σχήμα 7.2.b ένας αστροναύτης στο διάστημα μακριά από την επίδραση κάθε ουράνιας μάζας κινείται ομαλά. Ο αστροναύτης εκτελεί το ίδιο πείραμα αφήνοντας ελεύθερο ένα σώμα. Το αποτέλεσμα αυτού του πειράματος είναι το ίδιο με το προηγούμενο.



Σχήμα 7.2

Η Αρχή της Ισοδυναμίας είναι πρωταρχικής σημασίας στη θεμελίωση της **Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας**.

7.2 Η Γεωμετρία του χωρόχρονου.

Μια απλή ερώτηση που μπορεί να θέσει κανείς είναι με ποιόν τρόπο συσχετίζονται η γεωμετρία του χώρου και η φυσική; Ο Νεύτωνας υπέθεσε πως η γεωμετρία του σύμπαντος είναι επίπεδη. Ο Einstein δεν έκανε την ίδια υπόθεση παρά έθεσε την παραπάνω ερώτηση σε πειραματικό έλεγχο, έτσι ώστε το πείραμα να δείξει ποια ακριβώς είναι η γεωμετρία του χωρόχρονου.

Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Σύμφωνα με το αξίωμα του Ευκλείδη δύο παράλληλες ευθείες οι οποίες εκτείνονται έως το άπειρο διατηρούν σταθερή την απόστασή τους και δεν τέμνονται. Αυτό συνεπάγεται πως η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι *Επίπεδη*. Κατά συνέπεια ισχύει το θεώρημα του Πυθαγόρα σύμφωνα με το οποίο το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με 180° (σχήμα 7.3.α). Το τελευταίο αποτελεί το βασικό κριτήριο ότι μια γεωμετρία είναι επίπεδη.

Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

Το 1829 ο Ρώσος μαθηματικός Nikolai Lobachevski υπέδειξε πως το αξίωμα του Ευκλείδη δεν είναι το μοναδικό το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε μια αποδεκτή γεωμετρία. Πρότεινε ένα νέο αξίωμα σύμφωνα με το οποίο δύο παράλληλες ευθείες μπορούν να αποκλίνουν επιτρέποντας όμως ταυτόχρονα την ανάπτυξη μιας αποδεκτής γεωμετρίας. Στις δύο διαστάσεις η γεωμετρία που πρότεινε έχει ιδιότητες παρόμοιες με την επιφάνεια ενός σαμαριού (σχήμα 7.3.b). Η συγκεκριμένη γεωμετρία ονομάζεται *Υπερβολική Γεωμετρία*. Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου σύμφωνα με την υπερβολική γεωμετρία είναι μικρότερο των 180° . Η υπερβολική γεωμετρία είναι άπειρη, γιατί εάν επεκτείνουμε δύο παράλληλες ευθείες αυτές δεν συναντώνται ποτέ. Γιαυτό τον λόγο τόσο η υπερβολική όσο και η επίπεδη γεωμετρία ονομάζεται και *Ανοικτή Γεωμετρία* (open geometry).

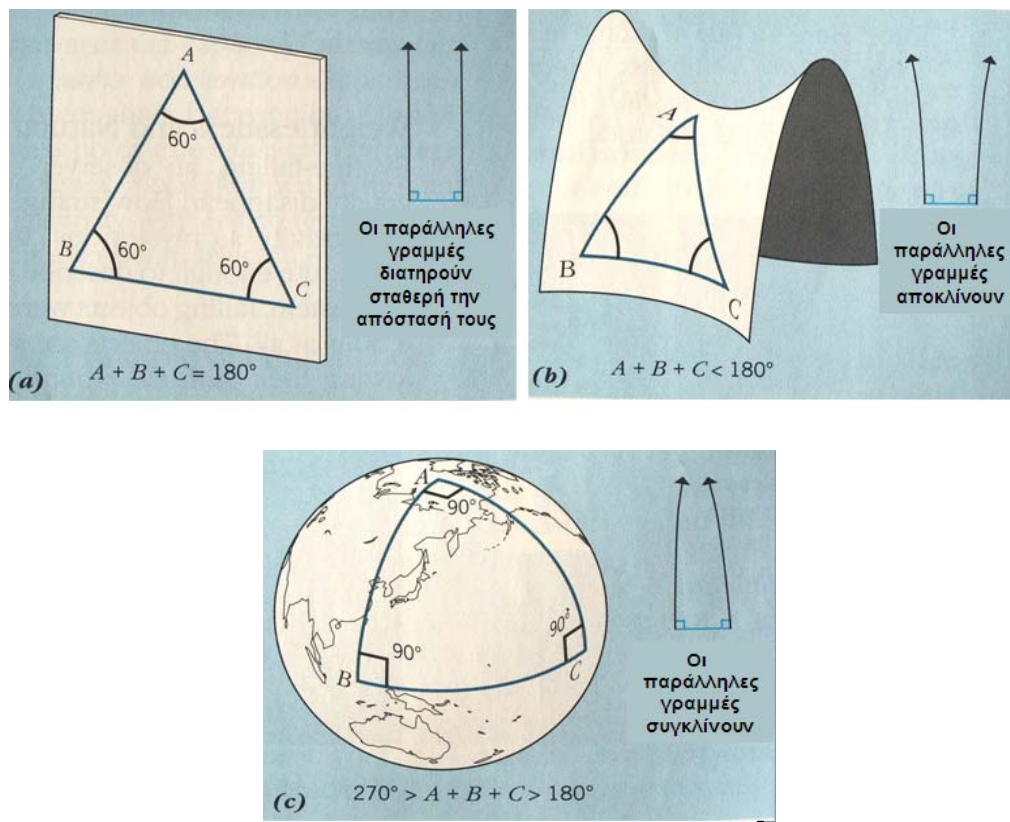
Το 1854 ο Georg Riemann πρότεινε μια νέα αποδεκτή γεωμετρία κατά την οποία δύο παράλληλες ευθείες μπορούν να συγκλίνουν (σχήμα 7.3.c). Η επιφάνεια της σφαίρας έχει αυτή τη *Σφαιρική Γεωμετρία* κατά την οποία το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο των 180° . Η Σφαιρική Γεωμετρία ονομάζεται και *Κλειστή Γεωμετρία* (closed geometry).

Οι δύο παραπάνω μη Ευκλείδειες γεωμετρίες χαρακτηρίζονται από την καμπυλότητά τους. Η Υπερβολική Γεωμετρία έχει αρνητική καμπυλότητα και εκτείνεται έως το άπειρο. Σε αντίθεση η Σφαιρική Γεωμετρία έχει θετική καμπυλότητα και είναι πεπερασμένη (έχει δηλαδή καθορισμένο μέγεθος) αλλά δεν παρουσιάζει άκρα.

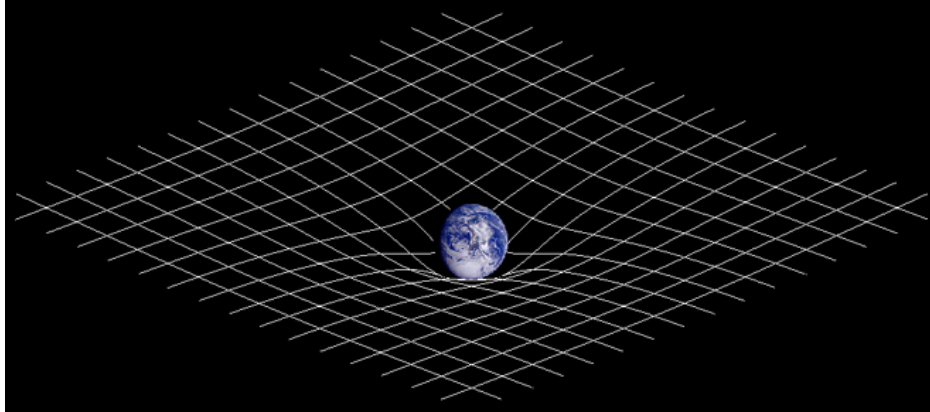
Την εποχή του Νεύτωνα ήταν γνωστή μόνο η Ευκλείδειος Γεωμετρία. Ο Einstein όμως είχε στη διάθεσή του τρεις γεωμετρίες. Ποια από τις τρεις είναι η σωστή επιλογή για τον κόσμο μας; Και πως αυτή η επιλογή σχετίζεται με την βαρύτητα; Σύμφωνα με την **Γενική Θεωρία της Σχετικότητας** του Einstein η τοπική κατανομή της μάζας (ή της ενέργειας) προσδιορίζει τη

γεωμετρία του χωρόχρονου. Όλα τα σώματα εξ' αιτίας της μάζας τους προκαλούν γύρω τους μια τοπική καμπύλωση στον χωρόχρονο. Είναι αυτή η καμπύλωση του χωρόχρονου η οποία αναδεικνύεται ως επιταχυνόμενη κίνηση, την οποία ο Νεύτωνας προσδιόρισε πως δημιουργείται λόγω των βαρυτικών δυνάμεων.

Την καμπύλωση του χωρόχρονου μπορούμε να την φανταστούμε με τον ακόλουθο τρόπο. Θεωρείστε ότι έχουμε ένα τραμπολίνο. Εάν τοποθετήσουμε ένα βαρύ αντικείμενο πάνω του, όπως μια μπάλα του bowling, θα δημιουργηθεί ένα βαθούλωμα. Αυτό είναι ανάλογο με την τοπική καμπύλωση του χωρόχρονου που προκαλεί η ύπαρξη μιας μεγάλης μάζας, όπως πχ. η Γη (σχήμα 7.4). Η παρουσία της μάζας αλλάζει τοπικά την γεωμετρία του χωρόχρονου. Όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα τόσο εντονότερη είναι η καμπύλωση του χωρόχρονου.

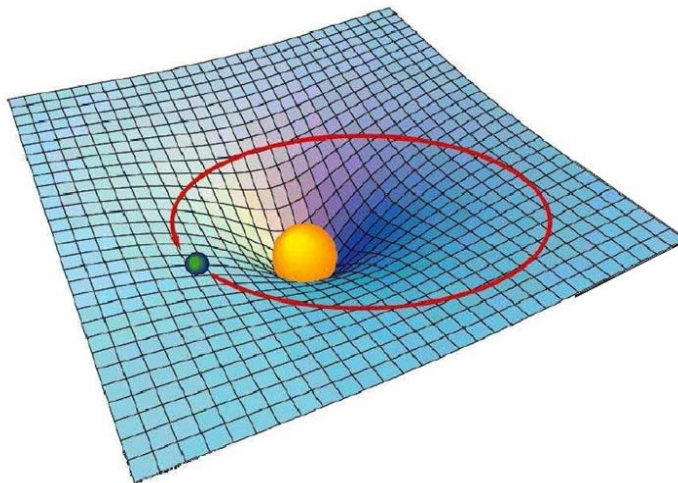


Σχήμα 7.3



Σχήμα 7.4

Εάν ένα αντικείμενο μικρότερης μάζας, όπως για παράδειγμα ένα μπαλάκι του γκόλφ, πλησιάσει την περιοχή του βαθουλώματος θα επιταχυνθεί προς την μεγαλύτερη μπάλα του bowling, με έναν τρόπο που καθορίζεται από το βαθούλωμα. Εάν το μπαλάκι του γκόλφ πλησιάσει το βαθούλωμα με κατάλληλο συνδυασμό διεύθυνσης και ταχύτητας αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα να τεθεί σε τροχιά γύρω από την μπάλα του bowling. Αυτό για παράδειγμα είναι ανάλογο με την περιστροφή της Γης γύρω από τον Ήλιο (σχήμα 7.5). Συνοψίζοντας με λίγα λόγια: *Ο χωρόχρονος υπαγορεύει στη μάζα πως θα κινηθεί και η μάζα υπαγορεύει στον χωρόχρονο πως θα καμπυλωθεί.*



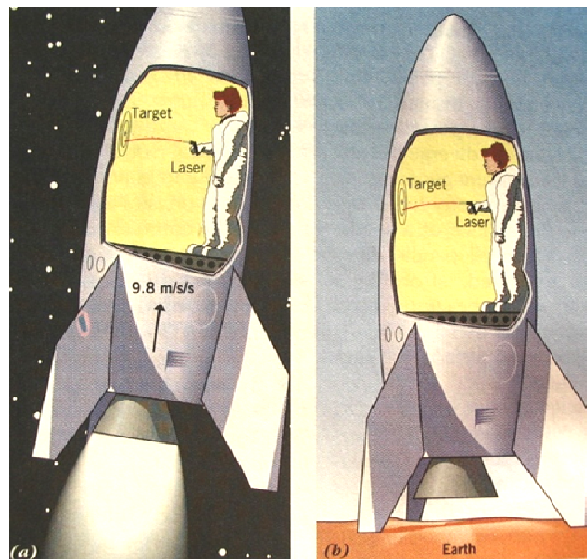
Σχήμα 7.5

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein προβλέπει πως ακόμη και οι ακτίνες του φωτός καμπυλώνονται όταν περνούν κοντά από σώματα με μεγάλη μάζα. Για να καταλάβουμε το φαινόμενο στο σχήμα 7.6.a ένας αστροναύτης μέσα σε ένα διαστημόπλοιο το οποίο επιταχύνεται με 9.81 m/sec^2 σημαδεύει ένα στόχο με ένα laser. Καθώς το φως ταξιδεύει προς τον στόχο το διαστημόπλοιο επιταχύνεται συνεχώς προς τα πάνω. Εξ' αιτίας αυτού η διαδρομή που διαγράφει το φως σύμφωνα με τον αστροναύτη είναι καμπύλη. Εάν ο ίδιος αστροναύτης κάνει το πείραμα στην επιφάνεια της Γης σύμφωνα με την Αρχή της Αντιστοιχίας θα βρει το ίδιο αποτέλεσμα(σχήμα 7.6.b).

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε πως εάν κάνουμε το παραπάνω πείραμα στην επιφάνεια της Γης για μία απόσταση παρατηρητή-στόχου ίση με 3 m το φως θα αποκλίνει κατά $5 \times 10^{-16} \text{ m}$, μέγεθος πολύ μικρό για να παρατηρηθεί. Παρ' όλα αυτά σήμερα υπάρχουν πολλά παραδείγματα που προέρχονται από παρατηρήσεις με τηλεσκόπια στο διάστημα όπου η εκτροπή του φωτός είναι εμφανής.

Γαιωδετικές καμπύλες

Όπως αναφέραμε πιο πάνω η μάζα και η ενέργεια προκαλούν τοπική καμπύλωση στο χωρόχρονο. Το ποσό και η πυκνότητα της μάζας και της ενέργειας καθορίζουν το πόσο απότομη και μεγάλη θα είναι η καμπύλωση. Σύμφωνα λοιπόν με την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein καθώς ένα σώμα κινείται μέσα στην καμπυλωμένη περιοχή του χωρόχρονου ακολουθεί μια ευθύγραμμη πορεία, η οποία εξ ορισμού αποτελεί τον συντομότερο δρόμο μεταξύ δύο σημείων του χωρόχρονου. Η πορεία αυτή ονομάζεται *Γαιωδετική* καμπύλη. Η συγκεκριμένη πορεία σε εμάς όμως εμφανίζεται ως καμπύλη. Καμία δύναμη δεν ασκείται στο σώμα. Αυτός ακριβώς είναι και ο τρόπος με τον οποίο ο Einstein κατάλαβε την φύση της βαρυτικής δύναμης.



Σχήμα 7.6

Ο Einstein εξήγησε τις τροχιές των πλανητών γύρω από τον ήλιο με τον ίδιο τρόπο. Ο Ήλιος λόγω της μεγάλης του μάζας καμπυλώνει τον χωρόχρονο γύρω του. Όλοι οι πλανήτες κινούνται σε ευθείες τροχιές (Γαιωδευτικές) στον χωρόχρονο. Εμείς παρατηρούμε στις τρεις διαστάσεις αυτές τις τροχιές ως ελλειπτικές. Ο λόγος έγκειται στο ότι ο χωρόχρονος γύρω μας είναι καμπυλωμένος και όχι επίπεδος. Το μέγεθος της καμπυλότητας του χωρόχρονου ελαττώνεται καθώς η απόσταση από τον Ήλιο αυξάνει. Αυτό εξηγεί για παράδειγμα το γιατί η Γη ακολουθεί μια τροχιά πολύ πιο καμπυλωμένη από αυτήν του Δία.

Συνοψίζοντας η διαφορά στην προσέγγιση σχετικά με την βαρύτητα μεταξύ του Νεύτωνα και του Einstein είναι η ακόλουθη. Ο Νεύτωνας θεωρεί πως η βαρύτητα είναι μία δύναμη η οποία δρά μεταξύ δύο σωμάτων και η οποία εξαρτάται από τις μάζες των σωμάτων και την μεταξύ τους απόσταση. Ο Einstein θεωρεί πως κάθε σώμα ακολουθεί μια διαδρομή μέσα στον χωρόχρονο. Τέτοιες τροχιές, για σώματα τα οποία εκτελούν ελεύθερη πτώση, δεν εξαρτώνται από την μάζα τους.

7.3 Λυμένα Προβλήματα

7.3.1 Βαρυτική Ερυθρά Μετατόπιση: Ο Γιώργος και ο Πέτρος είναι δίδυμοι επιστήμονες. Για να ελέγξουν το φαινόμενο της βρυτικής ερυθράς μετατόπισης ο Γιώργος εγκαθίσταται σε ένα εργαστήριο στο επίπεδο της θάλασσας ενώ ο Πέτρος στο αστεροσκοπείο Mauna Kea της Χαβάης σε υψόμετρο 4200 m. Μετά από την πάροδο ενός έτους σύμφωνα με το ρολόι του Γιώργου ο Πέτρος συναντά τον αδελφό του. Ποιος από τους δύο έχει γεράσει περισσότερο και κατά πόσο;

Σύμφωνα με την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας τα ρολόγια τα οποία βρίσκονται μέσα σε ισχυρά πεδία δυνάμεων βαρύτητας προχωρούν βραδύτερα από ότι τα ρολόγια τα οποία βρίσκονται σε ασθενή πεδία δυνάμεων. Στην πραγματικότητα, η γενική σχετικότητα δείχνει ότι η σημαντική μεταβλητή είναι το δυναμικό της βαρύτητας, και όχι η δύναμη της βαρύτητας. Εάν Δt_1 και Δt_2 είναι τα χρονικά διαστήματα που μετρούν τα δύο ρολόγια που είναι τοποθετημένα σε περιοχές διαφορετικού δυναμικού βαρύτητας, η προσεγγιστική σχέση είναι

$$\frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t} = \frac{u_2 - u_1}{c^2} \quad (1)$$

όπου u το δυναμικό της βαρύτητας, ή η δυναμική ενέργεια της βαρύτητας ανά μονάδα μάζας ($u = U/m$). Το Δt το οποίο εμφανίζεται στην παραπάνω σχέση μπορεί να αντικατασταθεί είτε με το Δt_1 είτε με το Δt_2 είτε με την μέση τιμή τους.

Κοντά στη Γη η μεταβολή του δυναμικού βαρύτητας μεταξύ σημείων που χωρίζονται από μια κατακόρυφη απόσταση h είναι $\Delta u = gh$. Έτσι από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t_1} = \frac{gh}{c^2} = \frac{9.81 \times 4200}{(3 \times 10^8)^2} = 4.6 \times 10^{-13}$$

Το ρολόι του Γιώργου κατάγραψε $\Delta t_1 = 1y$. Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση το ρολόι του Πέτρου θα κατέγραψε:

$$\Delta t_2 = \Delta t_1 + (\Delta t_1 \times 4.6 \times 10^{-13})$$

Έτσι ο Πέτρος στη διάρκεια του ενός έτους γέρασε περισσότερο κατά $\Delta t_1 \times 4.6 \times 10^{-13} = 1.45 \times 10^{-5} \text{ sec}$.

7.3.2 Μαύρες οπές και ακτίνα Schwarzschild: Το κέντρο του Γαλαξία μας βρίσκεται στον αστερισμό του Τοξότη και στους αστρονομικούς χάρτες σημειώνεται ως Sagittarius A. Τι ακριβώς βρίσκεται σε αυτή τη θέση δεν γνωρίζουμε με ακρίβεια γιατί το ορατό φως από εκείνη την περιοχή δεν φτάνει σε μας εξ αιτίας της πυκνής σκόνης που καλύπτει το επίπεδο του γαλαξία μας. Μελέτες όμως σε άλλες περιοχές του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος δείχνουν πως στην περιοχή αυτή είναι πιθανόν να υπάρχει μια μαύρη οπή με μάζα ίση με 3×10^6 ηλιακές μάζες. Υπολογίστε την ακτίνα Schwarzschild της μαύρης οπής και συγκρίνετε την με την ακτίνα του Ήλιου μας.

Η ακτίνα Schwarzschild μιας μαύρης οπής, ονομάζεται και βαρυτική ακτίνα, ορίζει μια σφαίρα γύρω από την οπή μέσα από την οποία κανένα σήμα που παράγεται δεν μπορεί να διαφύγει. Η σφαίρα αυτή είναι γνωστή και ως ορίζοντας γεγονότων. Η ακτίνα Schwarzschild ορίζεται ως:

$$R = \frac{2GM}{c^2} \quad (1)$$

όπου $G = (6.67 \times 10^{-11}) \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ sec}^{-2}$ η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και M η μάζα της μαύρης οπής. Με δεδομένο την μάζα του Ηλίου ίση με $M_s = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ έχουμε πως:

$$R = \frac{2 \times (6.67 \times 10^{-11}) \times (3 \times 10^6) \times (1.99 \times 10^{30})}{(3 \times 10^8)^2} \text{ m} = 8.85 \times 10^6 \text{ km}$$

Η ακτίνα του Ήλιου μας είναι $R_s = 6.95 \times 10^5 \text{ km}$. Παρατηρούμε πως η ακτίνα της μαύρης οπής στο κέντρο του γαλαξία μας είναι περίπου μόνο 10 φορές μεγαλύτερη από αυτή του ήλιου μας παρότι η μαύρη οπή ζυγίζει 3 εκατομμύρια φορές περισσότερο από αυτόν.

7.4 Προβλήματα

7.4.1 Ένα ρολόι που βρίσκεται σε ένα μπαλόνι 10km πάνω από την επιφάνεια της Γης προχωρεί γρηγορότερα από ένα ρολόι που βρίσκεται κάτω από αυτό και πάνω στη Γη. Πόσο χρόνο κερδίζει το ρολόι του μπαλονιού σε ένα έτος;

7.4.2 Από την εξίσωση (1) του προβλήματος 7.3.1, δείξτε πως η κλασματική διαφορά στις κλίμακες χρόνου σε μεγάλη απόσταση από ένα αστέρι και πάνω στην επιφάνεια του αστεριού ισούται με $GM/(Rc^2)$, όπου M η μάζα του αστεριού και R η ακτίνα του.

7.4.3 Με βάση το προηγούμενο πρόβλημα υπολογίστε πόσο χρόνο κερδίζει σε ένα έτος ένα ρολόι το οποίο βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο Voyager 1 (το οποίο βρίσκεται πλέον στις παρυφές του ηλιακού μας συστήματος) από ένα ρολόι πάνω στην επιφάνεια του Ήλιου.

7.4.4 Ένας αστροναύτης κινείται αργά μακριά από την Γη προς τον πολύ μεγαλύτερης μάζας πλανήτη του Δία. Πριν από την αναχώρησή του ο πομπός του και ένας δέκτης στη Γη συγχρονίζονται τέλεια στην ίδια συχνότητα. Εξ αιτίας της επίδρασης της βαρύτητας πάνω στις κλίμακες του χρόνου, πρέπει από καιρό σε καιρό να μεταβάλει τη συχνότητα του πομπού του για να φτάσει η ακτινοβολία του στη Γη με την κατάλληλη συχνότητα για τον δέκτη. Σε ποιο τμήμα του ταξιδιού του από την επιφάνεια της Γης έως την επιφάνεια του Δία πρέπει να εκπέμπει με ελαφρά αυξημένη συχνότητα; Σε ποιο τμήμα με ελαφρά ελαττωμένη συχνότητα; Σε ποιο τμήμα με την αρχική συχνότητα;