

Κεφάλαιο 6 :

Σχετικιστική ενέργεια και ορμή.

6.1 Σχετικιστική Ορμή.

Ο ορισμός της σχετικιστικής ορμής $\vec{p}$ πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο συνθήκες:

- Η ολική σχετικιστική ορμή ενός απομονωμένου συστήματος σωμάτων πρέπει να διατηρείται σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Αυτό προκύπτει από την Αρχή της Σχετικότητας που μας λέει πως όλοι οι νόμοι της φυσικής είναι οι ίδιοι (αναλλοίωτοι) σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.
- Η σχετικιστική ορμή πρέπει να προσεγγίζει την κλασική τιμή $m\vec{u}$ όταν $\vec{u} \rightarrow 0$ σύμφωνα με την Αρχή της Αντιστοιχίας.

Έτσι προκύπτει πως:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = \gamma m_0 \vec{u} \quad (6.1)$$

με $\vec{u}$ την ταχύτητα και m_0 την *μάζα ηρεμίας* του σωματίου. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να ερμηνευτεί ως το γινόμενο της σχετικιστικής μάζας, γm_0 και της ταχύτητας του αντικειμένου. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ισχυριστούμε πως η παρατηρούμενη μάζα ενός αντικειμένου αυξάνεται σε συνάρτηση με την ταχύτητά του σύμφωνα με την σχέση:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = \gamma m_0 \quad (6.2)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο δεύτερος νόμος του Newton παίρνει την μορφή:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \right] = \frac{d}{dt} (m\vec{u}) \quad (6.3)$$

Η οποία είναι ίδια με την κλασική διατύπωσή του όπως εξ άλλου αναμενόταν.

6.2 Σχετικιστική Ενέργεια.

Στην σχετικιστική μηχανική, όπως και στην κλασσική μηχανική, η κινητική ενέργεια, K , ενός σώματος είναι ίση με το έργο που παράγει μια εξωτερική δύναμη για να αυξήσει την ταχύτητα του σώματος από μηδέν σε κάποια τιμή u :

$$K = \int_{u=0}^{u=u} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (6.4)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (6.3) μπορούμε να καταλήξουμε στην ακόλουθη σχέση για την κινητική ενέργεια K :

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} - m_0 c^2 \quad (6.5)$$

Η κινητική ενέργεια, K , αντιπροσωπεύει την διαφορά ανάμεσα στην ολική ενέργεια, E , ενός κινούμενου σώματος και την ενέργεια ηρεμίας του $E_0 = m_0 c^2$. Έτσι προκύπτει για την ολική ενέργεια ενός σώματος, το οποίο κινείται, η ακόλουθη σχέση:

$$E = K + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \gamma m_0 c^2 = mc^2 \quad (6.6)$$

Η παραπάνω εξίσωση συνεπάγεται επίσης πως η μεταβολή της ενέργειας και η μεταβολή της μάζας στο σύστημα ηρεμίας συνδέονται με την σχέση:

$$\Delta E = \Delta m c^2 \quad (6.7)$$

6.3 Σχέση Ενέργειας-ορμής .

Σε πολλά προβλήματα είναι πολύ χρήσιμη η έκφραση η οποία συνδέει την ολική ενέργεια E , με την σχετικιστική ορμή ενός σώματος. Εάν απαλείψουμε την ταχύτητα u μεταξύ των εξισώσεων (6.1) και (6.6) εύκολα προκύπτει η ακόλουθη έκφραση:

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2 \quad (6.8)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν τα ακόλουθα:

- Εάν ένα σωματίδιο είναι ακίνητο τότε η ορμή του είναι $p = 0$ και η ενέργειά του ισούται με την ενέργεια ηρεμίας του $E = m_0 c^2$.
- Εάν η ορμή ενός σωματιδίου είναι $p \ll m_0 c^2$ τότε προκύπτει πως

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} \cong m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0^2 c^2} \right) \Rightarrow$$

$$E \cong m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0}$$

Το δεξί μέλος της τελευταίας εξίσωσης είναι η ενέργεια ηρεμίας συν την μη σχετικιστική κινητική ενέργεια.

- Εάν η ορμή ενός σωματιδίου είναι $p \gg m_0 c$ τότε προκύπτει πως $E = p c$. Σε αυτή την περίπτωση μιλάμε για ένα υπερσχετικιστικό σωματίδιο με $u \approx c$.

Στην κλασική μηχανική, ένα σωματίο χωρίς μάζα δεν έχει ούτε ενέργεια ούτε ορμή, ούτε και κανένα άλλο μετρήσιμο χαρακτηριστικό. Δεν αντιπροσωπεύει τίποτα. Δεν συμβαίνει το ίδιο στη θεωρία της σχετικότητας. Μια μετρούμενη φυσική ποσότητα μπορεί να υπάρξει και χωρίς να έχει μάζα. Μπορούμε να φανταστούμε πως καθώς μικραίνει η μάζα ενός σώματος τόσο πιο εύκολα μπορούμε να το επιταχύνουμε έως ότου αποκτήσει μια προκαθορισμένη σταθερή ενέργεια. Η ταχύτητα που απαιτείται για να επιτευχθεί η ενέργεια αυτή καθορίζεται από τη σχέση

$$\sqrt{1 - (u/c)^2} = \frac{m_0 c^2}{E}$$

Καθώς η μάζα του σωματίου πλησιάζει το μηδέν, η ταχύτητα πλησιάζει όλο και περισσότερο την ταχύτητα του φωτός. Έτσι για $m_0 \rightarrow 0$ και $u \rightarrow c$ έχουμε από τις σχέσεις (6.1) και (6.6) πως:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \rightarrow \frac{0}{0} : \text{απροσδιοριστία} \\ E &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \rightarrow \frac{0}{0} : \text{απροσδιοριστία} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{p}{E} = \frac{u}{c^2} \quad (6.9)$$

Η τελευταία εξίσωση ισχύει και για πεπερασμένη και για μηδενική μάζα. Για σωματίδια χωρίς μάζα, με $u = c$, η παραπάνω εξίσωση απλουστεύεται στην

$$E = pc \quad (6.10)$$

6.4 Το τετράνυσμα της Ορμής-Ενέργειας.

Σε αναλογία με τον ορισμό του τετρανύσματος του χωρόχρονου (εξίσωση 5.11) ορίζουμε το τετράνυσμα της ορμής ως εξής:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{m_0 \frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \\ p_y &= \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{m_0 \frac{dy}{dt}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \\ p_z &= \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{m_0 \frac{dz}{dt}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \\ p_t &= \frac{m_0 \frac{d(ct)}{dt}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{E}{c} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Παρατηρούμε πως η τέταρτη συνιστώσα της ορμής είναι, με διαφορά έναν παράγοντα c , η ίδια με την ολική ενέργεια E . Με αυτόν τον τρόπο στην σχετικότητα ενοποιείται η ορμή με την ενέργεια. Η ενοποίηση των δύο αυτών βασικών αρχών της μηχανικής σε μια μοναδική τετραδιάστατη ποσότητα έγινε από τον Herman Minkowski το 1908.

Το τετράνυσμα ορμή-ενέργεια έχει ένα μήκος, το τετράγωνο του οποίου ορίζεται κατά τον ίδιο τρόπο όπως το τετράγωνο του διαστήματος του χωρόχρονου. Η ποσότητα

$$p_t^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m_0^2 c^2 \quad (6.12)$$

αποτελεί μια αναλλοίωτη ποσότητα, ίδια για όλους τους παρατηρητές. Το δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι πάντοτε θετικό πράγμα που σημαίνει πως το τετράνυσμα ορμή-ενέργεια ενός υλικού σωματίου είναι πάντοτε ομοιόχρονο.

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να γράψουμε την παραπάνω εξίσωση 6.12 είναι ο ακόλουθος:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (6.13)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με την 6.8 η οποία εκφράζει την ενέργεια ενός σωματίου ως συνάρτηση της ορμής και της μάζας του. Τέλος για ένα σωματίο χωρίς μάζα το τετράνυσμα ορμής-ενέργειας είναι το μηδενικό άνυσμα, γιατί έχουμε:

$$p_t^2 - p^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \frac{E^2}{c^2} = 0$$

6.5 Μετασχηματισμός Lorentz του τετρανύσματος ορμής-ενέργειας.

Σε αναλογία με τους μετασχηματισμούς Lorentz του χωρόχρονου μπορούμε να γράψουμε τους μετασχηματισμούς του τετρανύσματος ορμής-ενέργειας, λαμβάνοντας υπ' όψη τις αναλογίες $x \Leftrightarrow p_x$, $y \Leftrightarrow p_y$, $z \Leftrightarrow p_z$ και $ct \Leftrightarrow E/c$. Έστω ότι ο ακίνητος παρατηρητής Ο μετρά πως ένα σωματίο έχει συνιστώσες ορμής p_x, p_y και p_z και ενέργεια E . Ένας κινούμενος παρατηρητής Ο', που κινείται με ταχύτητα v ως προς τον Ο κατά μήκος του άξονα x , μετρά ότι το ίδιο σωματίο έχει συνιστώσες ορμής p'_x, p'_y και p'_z και ενέργεια E' . Οι μετρήσεις των δύο παρατηρητών συνδέονται με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{p'_x + (vE'/c^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \left(p'_x + \frac{\beta}{c} E' \right) \\ p_y &= p'_y \\ p_z &= p'_z \\ E &= \frac{E' + vp'_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma (E' + vp'_x) \end{aligned} \quad (6.14)$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί. Ένας απλός έλεγχος συνέπειας των παραπάνω εξισώσεων γίνεται εάν θεωρήσουμε ένα αντικείμενο το οποίο ηρεμεί σε ένα σύστημα. Για παράδειγμα θεωρήστε μια μπάλα μάζας m_0 η οποία βρίσκεται ακίνητη μέσα σε ένα όχημα, το οποίο κινείται με ταχύτητα v ως προς το έδαφος κατά μήκος του άξονα x . Για έναν παρατηρητή Ο', ακίνητο μέσα στο όχημα, η μπάλα έχει ορμή και ενέργεια ίση με:

$$p'_x = 0 \quad \text{και} \quad E' = m_0 c^2$$

Για τον ακίνητο ως προς το έδαφος παρατηρητή Ο μπορούμε να εφαρμόσουμε τους μετασχηματισμούς 6.14. Έτσι έχουμε:

$$p_x = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{και} \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

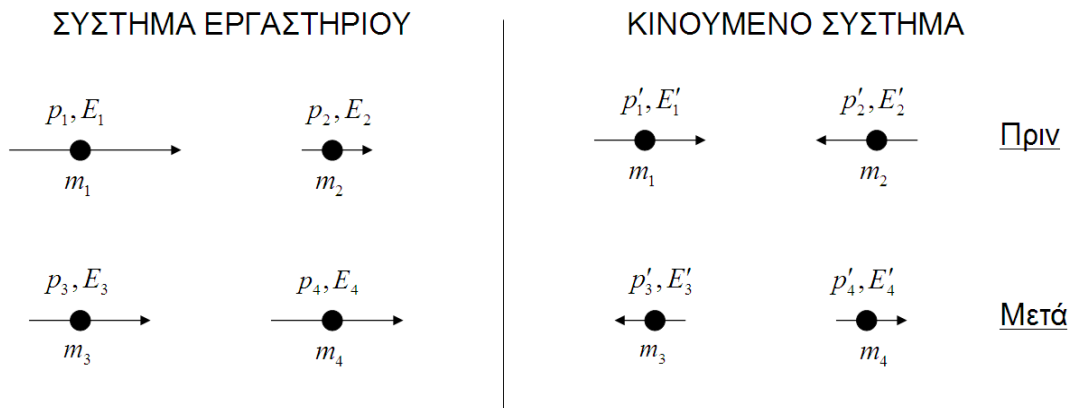
Οι παραπάνω εξισώσεις συμφωνούν με τους ορισμούς της ενέργειας και της ορμής για την μπάλα η οποία κινείται με ταχύτητα v .

6.6 Σωματίδια σε μία διάσταση.

Στην θεωρία της σχετικότητας το πρόβλημα της σύγκρουσης και αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων είναι πολυπλοκότερο από ότι στην κλασική του θεώρηση. Αυτό οφείλεται στο ότι το κάθε σωματίδιο μπορεί να μεταβάλει την μάζα του, την ορμή και την ενέργειά του καθώς επίσης μπορεί να σχηματιστούν και νέα σωματίδια. Για να μελετήσουμε το πρόβλημα θα επικεντρωθούμε στην ιδέα της *αναλλοίωτης μάζας* και της *διαθέσιμης ενέργειας*.

ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΗ ΜΑΖΑ

Θεωρήστε δύο σωματίδια στο σύστημα του εργαστηρίου με m_1, p_1, E_1 και m_2, p_2, E_2 όπως εικονίζονται στο παρακάτω σχήμα 6.1. Τα δύο σωματίδια αλληλεπιδρούν και έστω ότι παράγονται δύο νέα σωματίδια με m_3, p_3, E_3 και m_4, p_4, E_4 . Σε ένα άλλο σύστημα το οποίο κινείται ως προς το σύστημα του εργαστηρίου τα σωματίδια θα έχουν ίδιες μάζες ηρεμίας m_1, m_2, m_3 και m_4 αλλά διαφορετικές ορμές και ενέργειες, $p'_1, E'_1, p'_2, E'_2, p'_3, E'_3$ και p'_4, E'_4



Σχήμα 6.1

Μια ποσότητα καλείται *αναλλοίωτη* αν παραμένει η ίδια σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Οι ατομικές μάζες ηρεμίας m_1 έως m_4 αποτελούν παραδείγματα αναλλοίωτων ποσοτήτων

Μια ποσότητα λέμε πως *διατηρείται* όταν είτε παραμένει αμετάβλητη ως προς τον χρόνο είτε παραμένει ή ίδια μετά την αλληλεπίδραση. Η ολική ενέργεια σε αμφότερα τα συστήματα είναι ένα παράδειγμα διατηρούμενης ποσότητας. Έτσι στο σύστημα του εργαστηρίου η σταθερή ολική ενέργεια είναι:

$$E_T = E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \quad (6.15)$$

ενώ στο κινούμενο σύστημα είναι:

$$E'_T = E'_1 + E'_2 = E'_3 + E'_4 \quad (6.16)$$

Προσοχή!! Η E_T δεν είναι ίση με την E'_T .

Μια ποσότητα η οποία είναι και αναλλοίωτη και διατηρούμενη είναι η *αναλλοίωτη μάζα* M του συστήματος η οποία ορίζεται ως:

$$M^2 c^2 = \left(\frac{E_T}{c} \right)^2 - p_T^2 \quad (6.17)$$

όπου E_T και $p_T = |p_1 + p_2| = |p_3 + p_4|$ η ολική ενέργεια και ολική ορμή αντίστοιχα στο σύστημα του εργαστηρίου. Το αναλλοίωτο της M αποδεικνύεται από τους μετασχηματισμούς Lorentz. Από τις εξισώσεις 6.14 έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{E_1 + E_2}{c} &= \frac{(1/c)(E'_1 + E'_2) + \beta(p'_1 + p'_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ (p_1 + p_2) &= \frac{(p'_1 + p'_2) + \beta(1/c)(E'_1 + E'_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω δύο εξισώσεις έχουμε:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{c}(E_1 + E_2) \right]^2 - (p_1 + p_2)^2 &= \left[\frac{1}{c}(E'_1 + E'_2) \right]^2 - (p'_1 + p'_2)^2 \Rightarrow \\ \left(\frac{E_T}{c} \right)^2 - p_T^2 &= \left(\frac{E'_T}{c} \right)^2 - p_T'^2 \end{aligned}$$

Μιας και από την εξίσωση 6.17 το αριστερό μέλος είναι εξ ορισμού ίσο με $M^2 c^2$, θα πρέπει από την παραπάνω να ισχύει και

$$M^2 c^2 = \left(\frac{E'_T}{c} \right)^2 - p_T'^2 \quad (6.18)$$

Οι εξισώσεις 6.17 και 6.18 επιδεικνύουν το αναλλοίωτο της ποσότητας M .

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις 6.17 και 6.18 με την 6.12 αντιλαμβανόμαστε πως η ποσότητα M είναι η *μάζα ηρεμίας του συστήματος*. Εάν θεωρήσουμε το ειδικό σύστημα αναφοράς στο οποίο ισχύει πως η ολική ορμή είναι μηδέν (σύστημα αναφοράς του κέντρου ορμής) τότε από την 6.17 έχουμε για το συγκεκριμένο σύστημα πως

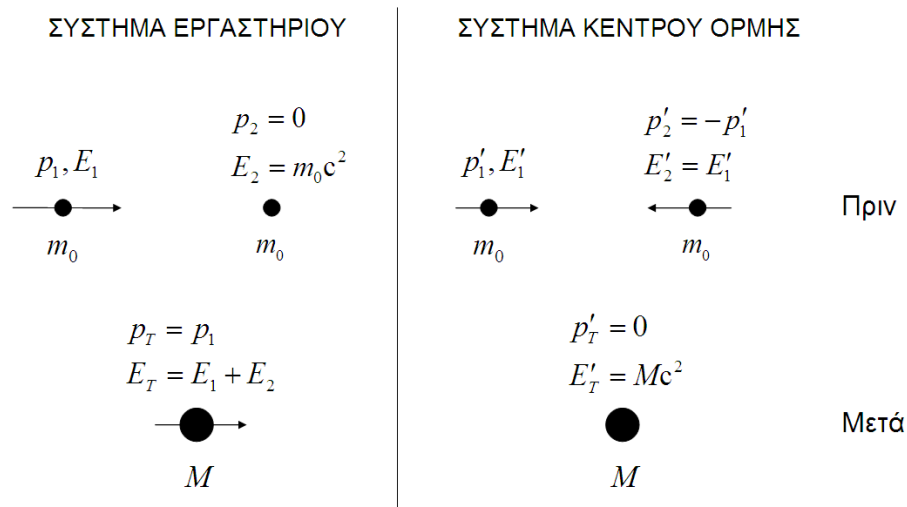
$$\left. \begin{aligned} p_T'' &= p_1'' + p_2'' = 0 \\ M^2 c^2 &= \left(\frac{E_T''}{c} \right)^2 - p_T''^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_T'' = M c^2 \quad (6.19)$$

Από την παραπάνω εξίσωση συμπεραίνουμε πως στο σύνολό του το σύστημα συμπεριφέρεται σαν ένα ακίνητο αντικείμενο μάζας M . Προσοχή!! Το M γενικά δεν είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα των μαζών των συστατικών του συστήματος.

ΔΙΑΘΕΣΙΜΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Η μελέτη της φυσικής των Στοιχειωδών Σωματίων βασίζεται στην παραγωγή νέων σωματίων και στην μελέτη των διασπάσεών τους. Τα νέα σωματίδια παράγονται από αλληλεπιδράσεις υψηλοενεργειακών πρωτονίων ή ηλεκτρονίων είτε με την ύλη είτε μεταξύ των. Τα υψηλοενεργειακά πρωτόνια ή ηλεκτρόνια παράγονται με την χρήση επιταχυντικών διατάξεων. Μια ερώτηση με τεράστια πρακτική σημασία για την αποδοτικότερη χρήση των επιταχυντών είναι η ακόλουθη: Κατά τη σύγκρουση ενός σωματίου με ένα άλλο, ποιο τμήμα της ολικής ενέργειας των σωματίων είναι διαθέσιμο για την δημιουργία των νέων σωματίων;

Θα εξετάσουμε την πιο κοινή περίπτωση που αφορά την σύγκρουση σωματίων που έχουν επιταχυνθεί με ακίνητο στόχο. Αυτού του είδους τα πειράματα στην Φυσική των Υψηλών Ενεργειών καλούνται Πειράματα Σταθερού Στόχου (Fixed Target Experiments). Η περίπτωση αυτή εικονίζεται στο αριστερό μέρος του σχήματος 6.2.



Σχήμα 6.2

Στο σύστημα του εργαστηρίου η αναλλοίωτη μάζα M δίνεται από την εξίσωση (6.17). Έχουμε πως:

$$M^2 c^2 = \left(\frac{E_T}{c} \right)^2 - p_T^2 = \frac{1}{c^2} (E_1 + m_0 c^2)^2 - p_1^2 \quad (6.20)$$

Εάν αντικαταστήσουμε το $p_1^2 = (E_1 / c)^2 - m_0^2 c^2$ βρίσκουμε πως:

$$M^2 c^2 = 2m_0 (m_0 c^2 + E_1) \quad (6.21)$$

Πριν την σύγκρουση η ενέργεια που είναι συγκεντρωμένη υπό τη μορφή της μάζας ηρεμίας είναι $2m_0 c^2$, ενώ μετά την σύγκρουση, η μέγιστη ενέργεια υπό τη μορφή της μάζας ηρεμίας είναι Mc^2 . Η διαφορά μεταξύ των δύο αυτών ενεργειών είναι εξ ορισμού, η διαθέσιμη ενέργεια.

$$E_{\text{διαθεσιμη}} = Mc^2 - 2m_0 c^2 = \sqrt{2m_0 c^2 (m_0 c^2 + E_1)} - 2m_0 c^2 \quad (6.22)$$

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε πως:

- Στο μη σχετικιστικό όριο όπου $(K \ll m_0 c^2)$ έχουμε πως

$$E_{\text{διαθεσιμη}} \cong (1/2)K. \quad (6.23)$$

- Στο υπερσχετικιστικό όριο όπου $(K \gg m_0 c^2)$ έχουμε πως

$$E_{\text{διαθεσιμη}} \cong 2m_0 c^2 \left(\sqrt{\frac{E_1}{2m_0 c^2}} - 1 \right) \quad (6.24)$$

Στο δεξί μέρος του σχήματος 6.2 εικονίζεται ένας δεύτερος τρόπος σύγκρουσης των σωματιών στο σύστημα του κέντρου ορμής. Με αυτόν τον τρόπο απαιτούνται δύο δέσμες σωματιών αντίθετα συγκρουόμενες. Αυτού του είδους τα πειράματα στην Φυσική των Υψηλών Ενεργειών μπορούν να λάβουν χώρα σε ειδικές επιταχυντικές διατάξεις που ονομάζονται επιταχυντές συγκρουόμενων δεσμών (Colliders).

Στο σύστημα του κέντρου ορμής η αναλλοίωτη μάζα M δίνεται επίσης από την εξίσωση (6.17). Έχουμε πως:

$$M^2 c^2 = \left(\frac{E'_T}{c} \right)^2 - p_T'^2 = \left(\frac{E'_T}{c} \right)^2 - 0 = \frac{E_T'^2}{c^2} \quad (6.25)$$

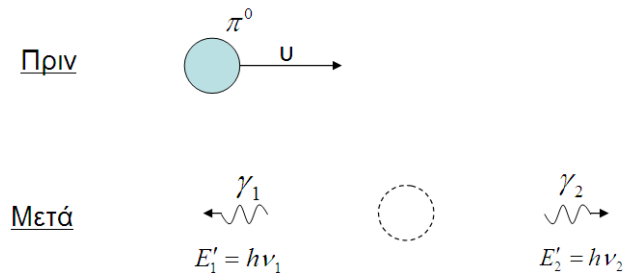
Σε αυτήν την περίπτωση η διαθέσιμη ενέργεια είναι:

$$E_{\text{διαθέσιμη}} = Mc^2 - 2m_0c^2 = E'_T - 2m_0c^2 = E'_1 + E'_2 - 2m_0c^2 \quad (6.26)$$

Από την τελευταία εξίσωση συμπεραίνουμε πως στην περίπτωση πειραμάτων που λαμβάνουν χώρα σε επιταχυντές συγκρουόμενων δεσμών η διαθέσιμη ενέργεια είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από ότι στην περίπτωση πειραμάτων σταθερού στόχου με την ίδια πάντοτε ενέργεια δέσμης. Αυτός είναι ο λόγος που οι σύγχρονοι επιταχυντές είναι επιταχυντές συγκρουόμενων δεσμών. Για ένα αριθμητικό παράδειγμα δείτε το πρόβλημα 6.7.7.

6.7 Λυμένα Προβλήματα

6.7.1 Ένα ουδέτερο πιόνιο, με ενέργεια ηρεμίας 135 MeV κινείται μέσα στο εργαστήριο με ταχύτητα 0.6c. Το πιόνιο διασπάται σε δύο φωτόνια με τον τρόπο που δείχνει το παρακάτω σχήμα. (α) Ποιες είναι οι ενέργειες των δύο φωτονίων που εκπέμπονται; (β) Ποια η ολική ενέργεια του πιονίου και πως αυτή σχετίζεται με τις ενέργειες των δύο φωτονίων; (γ) Κατά ποιόν παράγοντα η ολική ενέργεια του πιονίου υπερβαίνει την ενέργεια ηρεμίας του;



(α) Στο σύστημα ηρεμίας του πιονίου θεωρούμε E_0 , E_1 και E_2 τις ενέργειες του πιονίου και των δύο φωτονίων αντίστοιχα. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$E_0 = E_1 + E_2 = 2E_1 \quad (1)$$

$$E_1 = E_2 = h\nu \quad (2)$$

$$E_0 = 2h\nu \quad (3)$$

Από την (3) προκύπτει πως $h\nu = 67.5 \text{ MeV}$. Στο σύστημα του εργαστηρίου το οποίο εικονίζεται παραπάνω έχουμε για το πρώτο φωτόνιο:

$$\nu'_1 = \nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \Rightarrow E'_1 = h\nu'_1 = h\nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = (67.5 \text{ MeV}) \sqrt{\frac{0.4}{1.6}} = 33.75 \text{ MeV}$$

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε πως

$$\nu'_2 = \nu \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \Rightarrow E'_2 = h\nu'_2 = h\nu \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = (67.5 \text{ MeV}) \sqrt{\frac{1.6}{0.4}} = 135 \text{ MeV}$$

(β) Η ολική ενέργεια του κινούμενου πιονίου είναι:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{135 \text{ MeV}}{\sqrt{1-(0.6)^2}} = 168.75 \text{ MeV}$$

Το άθροισμα των ενεργειών των δύο φωτονίων είναι 168.75 MeV, το οποίο συμφωνεί όπως πρέπει, με την ολική ενέργεια του πιονίου.

(γ) Παρά το ότι το πiónιο κινείται με την πολύ μεγάλη ταχύτητα 0.6c έχει ολική ενέργεια μόνο 25% μεγαλύτερη από την ενέργεια ηρεμίας του:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{168.75 \text{ MeV}}{135 \text{ MeV}} = 1.25$$

6.7.2 Όταν δύο γραμμομόρια υδρογόνου και ένα γραμμομόριο οξυγόνου ενωθούν για να σχηματίσουν 2 γραμμομόρια ατμών νερού, $(2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O})$, η ενέργεια που απελευθερώνεται είναι 115.6 kcal. Υπολογίστε την ελάττωση της μάζας του υλικού κατά την χημική αντίδραση.

Από τη εξίσωση (6.7) έχουμε:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = -\frac{115.6 \text{ kcal} \times 4.184 \text{ J/kcal}}{(3 \times 10^8 \text{ m/sec})^2} = -5.35 \times 10^{-12} \text{ kg}$$

Η παραπάνω μεταβολή στη μάζα είναι τόσο πολύ μικρή ώστε στην ουσία να μην μπορεί να μετρηθεί. Επομένως η διατήρηση της μάζας είναι ένας έγκυρος νόμος για τις χημικές μεταβολές.

6.7.3 Ποια η ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου το οποίο επιταχύνεται σε μια διαφορά δυναμικού $\Delta V = 10^5 \text{ V}$;

Η κινητική ενέργεια που αποκτά το ηλεκτρόνιο είναι $K = e \Delta V = 10^5 \text{ eV} = 0.1 \text{ MeV}$ άρα έχουμε:

$$E = K + m_0 c^2 \Rightarrow K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - m_0 c^2$$

Για το ηλεκτρόνιο έχουμε πως $m_0 c^2 = 0.511 \text{ MeV}$ και αντικαθιστώντας στην παραπάνω βρίσκουμε πως $u = 0.548c$.

6.7.4 Υπολογίστε την ορμή ενός ηλεκτρονίου κινητικής ενέργειας 1 MeV .

Έχουμε πως:

$$\begin{aligned} E^2 &= (pc)^2 + (m_0 c^2)^2 \Rightarrow \\ (1 \text{ MeV} + 0.511 \text{ MeV})^2 &= (pc)^2 + (0.511 \text{ MeV})^2 \Rightarrow \\ p &= 1.42 \text{ MeV}/c \end{aligned}$$

6.7.5 Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα ενός σώματος έτσι ώστε η κινητική του ενέργεια να είναι διπλάσια της ενέργειας ηρεμίας του;

Έχουμε πως:

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - m_0 c^2 \\ K &= 2m_0 c^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = 3$$

Από την παραπάνω έχουμε πως $u = 0.943c$.

6.7.6 Δύο όμοια σώματα με μάζα ηρεμίας m_0 το καθένα, κινούνται με ίσες και αντίθετες ταχύτητες u , συγκρούονται πλαστικά και κάνουν ένα συσσωμάτωμα. α) Υπολογίστε την μάζα ηρεμίας M_0 του συσσωματώματος. β) Ποια η μάζα ηρεμίας του συσσωματώματος σύμφωνα με ένα παρατηρητή ο οποίος είναι ακίνητος σε σχέση με το ένα από τα αρχικά σώματα;

α) Εφ' όσον τα δύο σώματα έχουν ίσες μάζες και κινούνται με ίσες και αντίθετες ταχύτητες η αρχική και η τελική ολική ορμή είναι μηδέν. Άρα έχουμε:

$$E_{initial} = E_{final} \Rightarrow$$

$$\frac{2m_0 c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = M_0 c^2 \Rightarrow$$

$$M_0 = \frac{2m_0 c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} > 2m_0$$

β) Θεωρήστε τον παρατηρητή Ο ο οποίος είναι ακίνητος ως προς το σύστημα του εργαστηρίου. Θεωρήστε επίσης ότι το σώμα Α κινείται κατά την +x-κατεύθυνση. Τότε η ταχύτητα του παρατηρητή Ο' ο οποίος είναι ακίνητος σε σχέση με το σώμα Α είναι $v = u$. Το δεύτερο σώμα Β έχει ταχύτητα $u_B = -u$ σύμφωνα με τον ακίνητο παρατηρητή Ο. Η ταχύτητα του σώματος Β για τον παρατηρητή Ο' σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς ταχύτητας Lorentz είναι:

$$u'_B = \frac{u_B - v}{1 - \frac{u_B v}{c^2}} = -\frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}$$

Το συσσωμάτωμα, C, είναι ακίνητο σύμφωνα με τον παρατηρητή Ο ενώ κινείται με ταχύτητα $u'_C = -u$ σύμφωνα με τον Ο'. Από την αρχή διατήρησης της ορμής σύμφωνα με τον παρατηρητή Ο' έχουμε:

$$\frac{m_0 u'_A}{\sqrt{1-(u'_A/c)^2}} + \frac{m_0 u'_B}{\sqrt{1-(u'_B/c)^2}} = \frac{M_0 u'_C}{\sqrt{1-(u'_C/c)^2}}$$

Είναι όμως $u'_A = 0$ άρα:

$$\frac{m_0 \frac{(-2u)}{1 + (u/c)^2}}{\sqrt{1 - \left[\frac{2(u/c)}{1 + (u/c)^2} \right]^2}} = \frac{M_0 (-u)}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \Rightarrow M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα συμφωνεί με το αποτέλεσμα του σκέλους α).

6.7.7 Στον επιταχυντή SpS του CERN τα πρωτόνια επιταχύνονται σε ενέργειες 450 GeV. α) Υπολογίστε την διαθέσιμη ενέργεια σε συγκρούσεις της δέσμης με υδρογόνο. β) Ποια η διαθέσιμη ενέργεια όταν δύο δέσμες με την παραπάνω ενέργεια συγκρούονται σε μια διάταξη συγκρουόμενων δεσμών:

α) Από την εξίσωση (6.22) ή (6.24) έχουμε πως

$$E_{\text{διαθέσιμη}} \cong 2m_0c^2 \left(\sqrt{\frac{E_1}{2m_0c^2}} - 1 \right) \cong 28 \text{ GeV}$$

β) Από την εξίσωση (6.26) έχουμε πως

$$E_{\text{διαθέσιμη}} = E'_1 + E'_2 - 2m_0c^2 \cong 900 \text{ GeV} !!!$$

Παρατηρείστε την τεράστια διαφορά στην διαθέσιμη ενέργεια. Για την ιστορία ο επιταχυντής SpS του CERN λειτούργησε στις αρχές τις δεκαετίας του 1980 ως επιταχυντής συγκρουόμενων δεσμών πρωτονίων-αντιπρωτονίων στην παραπάνω διαθέσιμη ενέργεια. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα το 1983 να ανακαλυφθούν οι φορείς της ασθενούς αλληλεπίδρασης τα μποζόνια $W^\pm$ και Z^0 , σωματίδια με πολύ μεγάλη μάζα ($\sim 80 \text{ GeV}$ και $\sim 90 \text{ GeV}$ αντίστοιχα).

6.8 Προβλήματα

6.8.1 Η μάζα ηρεμίας ενός μιονίου είναι $m_0 = 105.6 \text{ MeV}/c^2$ και ο μέσος χρόνος ζωής του σε ηρεμία είναι $2 \times 10^{-6} \text{ s}$. Ποια η μάζα ενός μιονίου του οποίου ο μέσος χρόνος ζωής στο σύστημα του εργαστηρίου είναι $7 \times 10^{-6} \text{ s}$;

(Απάντηση: $m = 369.6 \text{ MeV}$)

6.8.2 α) Υπολογίστε την κινητική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου ορμής $2 \text{ MeV}/c$.

β) Υπολογίστε την ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου το οποίο έχει κινητική ενέργεια ίση με 2 MeV .

γ) Υπολογίστε την ορμή ενός ηλεκτρονίου το οποίο έχει ταχύτητα ίση με $0.8c$.

(Απάντηση: α) $K = 1.55 \text{ MeV}$, β) $v = 0.98c$, γ) $p = 0.681 \text{ MeV}/c$)

6.8.3 Στο Bevatron του Berkley, τα πρωτόνια πετυχαίνουν μια ταχύτητα $0.99c$.

α) Δείξτε ότι ένα πρωτόνιο που έχει την ταχύτητα αυτή έχει μια ολική ενέργεια ίση με 6.6 GeV και μια κινητική ενέργεια ίση με 5.7 GeV .

β) Αν ένα από τα πρωτόνια αυτά επιταχυνθεί ακόμη περισσότερο μέχρι που η ταχύτητά του φτάσει τα $0.995c$, κατά ποιο παράγοντα θα αυξηθεί η ολική του ενέργεια;

(Απάντηση: β) 42%)

6.8.4 Ένα ηλεκτρόνιο επιταχύνεται σε ένα σύγχροτρο και αποκτά κινητική ενέργεια ίση με 2 GeV . Ποιος ο λόγος της μάζας του προς την μάζα ηρεμίας του;

(Απάντηση: $m/m_0 = 3915$)

6.8.5 Ένα ηλεκτρόνιο κινείται με 80% της ταχύτητας του φωτός. α) Ποια η ορμή του; β) Αν θέλαμε να ξέρουμε την ορμή του με σφάλμα μόνο 5% θα αρκούσε ο τύπος $p = mv$;

(Απάντηση: α) $0.681 \text{ MeV}/c$ β) όχι)

6.8.6 Ένα ηλεκτρόνιο βγαίνει από ένα ορισμένο βήτατρο με ολική ενέργεια 1 MeV . Ποια η κινητική του ενέργεια και ποια η ταχύτητά του;

(Απάντηση: $K = 0.489 \text{ MeV}$, $v = 0.859c$)

6.8.7 Ένα υπερσχετικιστικό σωματίο είναι ένα σωματίο για το οποίο $E \gg m_0c^2$. Δείξτε ότι η ταχύτητα του υπερσχετικιστικού σωματίου δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο

$$v \cong c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_0 c^2}{E} \right)^2 \right].$$

6.8.8 Ένα φωτόνιο και ένα πρωτόνιο έχουν το καθένα την ίδια ολική ενέργεια, 70 GeV. Ποιο σωματίδιο έχει την μεγαλύτερη ορμή;
(Απάντηση: το φωτόνιο)

6.8.9 Ένα σωματίδιο μάζας m_0 έχει ορμή ίση με $m_0 c$. α) Βρείτε το v/c , το λόγο της ταχύτητάς του προς την ταχύτητα του φωτός. β) Βρείτε το $E/m_0 c^2$, το λόγο της ολικής του ενέργειας προς την ενέργεια ηρεμίας του.

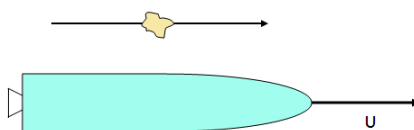
(Απάντηση: $\beta = 0.7$, $E/m_0 c^2 = \sqrt{2}$)

6.8.10 Ένα ηλεκτρόνιο έχει ταχύτητα $v = 5 \times 10^7$ m/sec. Πόση ενέργεια απαιτείται ώστε να διπλασιαστεί η ταχύτητά του;

(Απάντηση: $\Delta E = 0.024$ MeV)

6.8.11 Ένα πιόνιο το οποίο κινείται προς την Ανατολή διασπάται σε δύο φωτόνια. Το ένα κινείται προς την Ανατολή και το άλλο προς την Δύση. Το προς την Ανατολή κινούμενο φωτόνιο έχει διπλάσια ενέργεια από αυτό που κινείται προς την Δύση. Αποδείξτε ότι το πιόνιο εκκινείτο με το ένα τρίτο της ταχύτητας του φωτός πριν από την διάσπασή του. (Υπόδειξη: Θεωρήστε διατήρηση της Ενέργειας και της Ορμής.)

6.8.12 Στο παρακάτω σχήμα ένας μετεωρίτης προσπερνά ένα διαστημόπλοιο. Ένας παρατηρητής στο διαστημόπλοιο μετρά ότι η ενέργεια του μετεωρίτη είναι $E' = 10^{17}$ Joules και η ορμή του $p' = 10^8$ Kgr m/sec. Εάν η ταχύτητα του διαστημοπλοίου σε σχέση με την Γή είναι 2×10^8 m/sec, ποια είναι η ενέργεια και η ορμή του μετεωρίτη σύμφωνα με έναν ακίνητο παρατηρητή πάνω στη Γή;



6.8.13 Ένα φωτόνιο ενέργειας 1 MeV συγκρούεται με ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο, το οποίο είναι δεσμευμένο από ένα βαρύ πυρήνα, και απορροφάται. Εάν αγνοήσουμε την ενέργεια ανάκρουσης του πυρήνα ποια η ταχύτητα του ηλεκτρονίου μετά την σύγκρουση;

(Απάντηση: $v = 0.941c$)

6.8.14 Ένα ηλεκτρόνιο κινείται στο εργαστήριο με ταχύτητα $u = 0.6c$. Ένας παρατηρητής κινείται με ταχύτητα $0.8c$ κατά την διεύθυνση κίνησης του ηλεκτρονίου. Ποια η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου σύμφωνα με το κινούμενο παρατηρητή;

(Απάντηση: $K = 0.043 \text{ MeV}$)

6.8.15 α) Δύο 1-MeV φωτόνια κινούνται κατά την ίδια διεύθυνση. Ποια είναι η αναλλοίωτη μάζα του συστήματος αυτού;

β) Δύο 1-MeV φωτόνια κινούνται σε ακριβώς αντίθετες διευθύνσεις. Ποια είναι η αναλλοίωτη μάζα του συστήματος σε αυτή την περίπτωση;

γ) Ποια είναι η μάζα ηρεμίας του τελευταίου συστήματος;

6.8.16 Ένα ουδέτερο καόνιο K^0 διασπάται σε δύο ουδέτερα πιόνια π^0 . Εάν η μάζα ηρεμίας του καονίου είναι $498 \text{ MeV}/c^2$ και του πιονίου $135 \text{ MeV}/c^2$, ποια είναι η κινητική ενέργεια κάθε πιονίου π^0 ;

(Απάντηση: $K = 114 \text{ MeV}$)

6.8.17 Ένα πρωτόνιο του οποίου η ολική ενέργεια είναι $30m_p c^2$ (περίπου 28 GeV) συγκρούεται με ένα πρωτόνιο που βρίσκεται σε ηρεμία. α) Πόση είναι η διαθέσιμη ενέργεια κατά την σύγκρουση σε μονάδες $m_p c^2$; β) Ποια είναι η μέγιστη ολική μάζα όλων των προϊόντων της αλληλεπίδρασης σε μονάδες m_p (εάν τα αρχικά σωματία επιζήσουν και μετά την σύγκρουση θα πρέπει να μετρηθούν σαν προϊόντα); γ) Απαντήστε στις ίδιες δύο ερωτήσεις εάν τα δύο πρωτόνια που το καθένα έχει ενέργεια $30m_p c^2$, συγκρουστούν κατά μέτωπο σε ένα πείραμα συγκρουόμενων δεσμών.

6.8.18 Ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m_0 κινείται με ταχύτητα $0.8c$ και συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας $3m_0$. Ποια η μάζα ηρεμίας του σώματος που προκύπτει;
(Απάντηση: $M_0 = 4.47 m_0$)

6.8.19 Ποια η ελάχιστη κινητική ενέργεια, ενός βλήματος πρωτονίου το οποίο κτυπά ένα ακίνητο πρωτόνιο, η οποία κάνει δυνατή την παραγωγή ενός αντιπρωτονίου κατά την αντίδραση $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$;
(Απάντηση: $M_0 = 12.2 \text{ GeV}$)

6.8.20 Ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m_0 και κινητική ενέργεια $3m_0c^2$ συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας $2m_0$. Υπολογίστε την ταχύτητα και την μάζα ηρεμίας του σώματος που προκύπτει;
(Απάντηση: $V = 0.645c$, $M_0 = 4.58 m_0$)

6.8.21 Ένα ηλεκτρόνιο με ολική ενέργεια $7m_e c^2$ πλησιάζει ένα άλλο ηλεκτρόνιο το οποίο είναι ακίνητο. Δείξτε ότι η ταχύτητα του συστήματος του κέντρου ορμής για το ζεύγος αυτό των ηλεκτρονίων είναι κατά προσέγγιση $0.87c$.

6.8.22 Ένα πιόνιο π^+ με μάζα ηρεμίας $140 \text{ MeV}/c^2$ δημιουργείται σε ύψος 100 Km από την επιφάνεια της θάλασσας, μέσα στη ατμόσφαιρα. Το πιόνιο έχει ολική ενέργεια $1.5 \times 10^5 \text{ MeV}$ και κινείται προς τα κάτω. Εάν διασπαστεί $2 \times 10^{-8} \text{ sec}$ μετά την δημιουργία του, όπως υπολογίζεται στο σύστημα ηρεμίας του, σε ποιο ύψος πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας λαμβάνει χώρα η διάσπαση;
(Απάντηση: $h = 93.6 \text{ Km}$)

6.8.23 α) Ένα θετικό πιόνιο π^+ μάζας M αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία. Διασπάται σε ένα μιόνιο μάζας m και ένα νεutrino του μιόνιου που δεν έχει μάζα ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$). Χρησιμοποιώντας τους νόμους διατήρησης της ενέργειας και της ορμής, δείξτε ότι η ταχύτητα του μιόνιου δίνεται από την

$$\frac{v}{c} = \frac{(M/m)^2 - 1}{(M/m)^2 + 1}$$

Χρησιμοποιώντας τις γνωστές μάζες του πιονίου και του μιονίου, υπολογίστε τον λόγο v/c αριθμητικά.

β) Αν το πιόνιο διασπάται σε ένα ποζιτρόνιο και ένα νεutrίνο του ηλεκτρονίου ($\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$) ποια η τιμή του λόγου v/c ; (Η τελευταία διάσπαση έχει πολύ μικρή πιθανότητα να συμβεί).

6.8.24 Ένα σωματίδιο μάζας m_1 και αρχικής ολικής ενέργειας E_1 συγκρούεται με ένα ακίνητο σωματίδιο μάζας m_2 . Τα σωματίδια ενώνονται και σχηματίζουν ένα σωματίδιο μάζας M που κινείται προς τα εμπρός κατά την διεύθυνση κίνησης του προσπίπτοντος σωματίου. α) Δείξτε ότι

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2(E_1/c^2)}$$

β) Δείξτε ότι κατά προσέγγιση το μέγεθος του M στο μη σχετικιστικό όριο ισούται με $m_1 + m_2$