

Κεφάλαιο 5 :

Το φαινόμενο Doppler. Διαστήματα, χωρόχρονος και κοσμικές γραμμές.

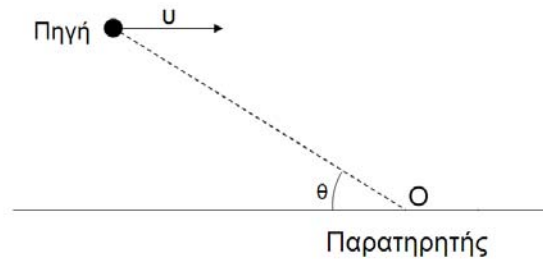
5.1 Το φαινόμενο Doppler.

Η βασική εξίσωση ενός διαδιδόμενου ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι:

$$c = \lambda f \quad (5.1)$$

όπου c η ταχύτητα διάδοσης, λ το μήκος κύματος και f η συχνότητα. Περιμένουμε πως διαφορετικοί παρατηρητές θα μετρήσουν διαφορετικό μήκος κύματος και συχνότητα, αλλά τέτοια ώστε το γινόμενο τους λf να παραμένει ίσο με c για όλους τους παρατηρητές.

Θεωρήστε μια πηγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων η οποία κινείται σε σχέση με έναν ακίνητο παρατηρητή O , όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1. Η πηγή εκπέμπει αλληλουχία παλμών περιόδου T_0 και συχνότητας $f_0 = 1/T_0$.



Σχήμα 5.1

Λόγω του φαινομένου της διαστολής του χρόνου ο παρατηρητής O μετρά την ίδια περίοδο ως $T = \gamma T_0$. Ας υποθέσουμε ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ η πηγή εκπέμπει τον πρώτο παλμό, ενώ κατά την χρονική στιγμή $t = T$ εκπέμπει τον δεύτερο. Στον ίδιο χρόνο ο πρώτος παλμός θα έχει κινηθεί κατά διάστημα cT . Το μήκος κύματος ορίζεται ως η απόσταση δύο διαδοχικών παλμών στον χρόνο $t = T$. Άρα έχουμε:

$$\lambda = cT - v \cos(\theta)T = (c - v \cos(\theta))\gamma T_0 \quad (5.2)$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{(c - v \cos(\theta))\gamma T_0} = f_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos(\theta)} \quad (5.3)$$

Διακρίνουμε τρεις απλές περιπτώσεις:

1. Για $\theta = 0^\circ$ η πηγή και ο παρατηρητής πλησιάζουν. Από την (5.3) έχουμε πως

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (5.4)$$

Επειδή $f > f_0 \Rightarrow \lambda < \lambda_0$ το φαινόμενο είναι γνωστό ως *Κυανή Μετατόπιση*.

2. Για $\theta = 180^\circ$ η πηγή και ο παρατηρητής απομακρύνονται. Από την (5.3) έχουμε πως

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (5.5)$$

Επειδή $f < f_0 \Rightarrow \lambda > \lambda_0$ το φαινόμενο είναι γνωστό ως *Ερυθρή Μετατόπιση*.

3. Για $\theta = 90^\circ$ από την (5.3) προκύπτει πως $f = f_0 \sqrt{1-\beta^2}$ δηλαδή $f < f_0 \Rightarrow \lambda > \lambda_0$, έχουμε πάλι ερυθρή μετατόπιση.

5.2 Διαστήματα και χωρόχρονος.

Οι μετασχηματισμοί Lorentz δίνουν μια λογική εξήγηση για τη σχετικότητα της παρατηρήσεως. Περιέχουν όμως και μια απροσδόκητη πρόταση αναλλοίωτου. Όπως έχουμε αποδείξει στο πρόβλημα 4.4.10 η ποσότητα:

$$(c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \quad (5.6)$$

είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz. Ο παραπάνω συνδυασμός των μετρήσεων του μήκους και του χρόνου είναι κάτι για το οποίο συμφωνούν οι παρατηρητές άσχετα εάν διαφωνούν για το μήκος και τον χρόνο ξεχωριστά. Είναι φυσικό να προσδώσουμε σημασία σε μια αναλλοίωτη ποσότητα. Ο συνδυασμός αυτός ονομάζεται τετράγωνο του διαστήματος και συμβολίζεται με I :

$$I^2 = (c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \quad (5.7)$$

$$I^2 = (c \Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \quad (5.8)$$

Μεταξύ δύο ταυτόχρονων γεγονότων σε ένα σύστημα αναφοράς, το διάστημα είναι ανάλογο προς την απόσταση στο χώρο των γεγονότων αυτών. Σε αυτό το σύστημα αναφοράς είναι $\Delta t = 0$ άρα:

$$I^2 = -(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = -(\chiωρική απόσταση)^2 \quad (5.9)$$

Σε ένα σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται σε σχέση με αυτό τα γεγονότα δεν είναι ταυτόχρονα, δηλαδή το $\Delta t' \neq 0$. Και το $\Delta x'$ όμως δεν είναι ίσο με το Δx με τέτοιον τρόπο έτσι ώστε η δεξιά πλευρά της εξίσωσης (5.8) να παραμένει η ίδια με την δεξιά πλευρά της εξίσωσης (5.9).

Δύο γεγονότα τα οποία συμβαίνουν στην ίδια θέση $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ αλλά κατά διαφορετικούς χρόνους σε ένα σύστημα αναφοράς χωρίζονται από ένα διάστημα που είναι ανάλογο προς τον χρόνο που πέρασε μεταξύ των γεγονότων αυτών στο σύστημα αναφοράς:

$$I^2 = (c \Delta t)^2 \quad (5.10)$$

Το διάστημα είναι μια γενίκευση και ένας συνδυασμός των ιδεών του χρονικού διαχωρισμού και του διαχωρισμού στο χώρο. Μπορεί να φαίνεται παράξενο το ότι το τετράγωνο μιας ποσότητας που έχει φυσική σημασία μπορεί να είναι αρνητικό, όπως στην εξίσωση (5.9). Αυτό δεν προκαλεί καμιά δυσκολία στην πράξη γιατί επιλέξαμε να καλέσουμε την ποσότητα ως I^2 αντί για I . Η ποσότητα την οποία ορίσαμε και με την οποία δουλεύουμε είναι το I^2 και μετριέται με έναν πραγματικό αριθμό. Εάν το I^2 είναι θετικός αριθμός τότε το διάστημα ονομάζεται *ομοιόχρονο*. Εάν το I^2 είναι αρνητικός αριθμός τότε το διάστημα ονομάζεται *ομοιόχωρο*.

Οι μετασχηματισμοί Lorentz δείχνουν πως πρέπει να σκεφτόμαστε τον χώρο και τον χρόνο ως μία ενότητα. Το αναλλοίωτο του διαστήματος ενισχύει την άποψη αυτής της εναλλαγής μεταξύ του χώρου και του χρόνου. Έτσι στον *χωρόχρονο* των τεσσάρων διαστάσεων ένα σημείο έχει τέσσερις συντεταγμένες τις x, y, z και t όπως στον κοινό τρισδιάστατο χώρο έχει τρεις συντεταγμένες τις x, y και z . Για ομοιομορφία ως τέταρτη συντεταγμένη του χωρόχρονου μπορεί να επιλεγεί η ct , με διαστάσεις μήκους. Με αυτόν τον τρόπο ένα σημείο στο χωρόχρονο συμβολίζεται με ένα *τετράνυσμα* ως εξής:

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x, y, z) \quad (5.11)$$

Το διάστημα μπορεί να θεωρηθεί ως μια απόσταση στον τετραδιάστατο χωρόχρονο. Επειδή οι όροι του χρόνου και του χώρου στον ορισμό του διαστήματος έχουν αντίθετο πρόσημο ο χωρόχρονος είναι μη-Ευκλείδιος.

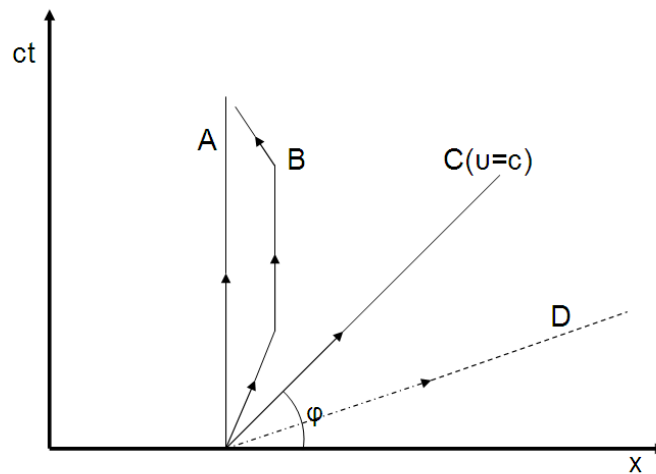
5.3 Κοσμικές γραμμές – Διαγράμματα Minkowski .

Αν και δεν μπορούμε να σχηματίσουμε μια εικόνα για τον τετραδιάστατο χωρόχρονο, είναι αρκετά παιδαγωγικό να ζωγραφίσουμε μια φέτα του χωρόχρονου και να εξετάσουμε απλά γεγονότα στη φέτα αυτή. Τα διαγράμματα που χρησιμοποιούμε έχουν την διάσταση ct στον κατακόρυφο άξονα και την διάσταση x στον οριζόντιο, και ονομάζονται *διαγράμματα*

Minkowski. Σε ένα τέτοιο διάγραμμα μπορεί να παρασταθεί ολόκληρη η ιστορία κάθε αντικειμένου το οποίο είναι περιορισμένο να κινείται μόνο κατά την διεύθυνση x .

Στο σχήμα 5.2 εικονίζεται ένα διάγραμμα Minkowski. Ένας ακίνητος άνδρας παριστάνεται με μια ευθεία κατακόρυφη γραμμή A. Μια γυναίκα που περπατά προς τα δεξιά, σταματά λίγο, και μετά περπατά προς τα αριστερά αφήνει το ίχνος B. Οι γραμμές αυτές ονομάζονται *κοσμικές γραμμές*, και το οποιοδήποτε σημείο πάνω σε μια κοσμική γραμμή είναι ένα γεγονός.

Ένα κύμα φωτός που ταξιδεύει προς τα δεξιά παριστάνεται με την γραμμή C. Το φως κινείται με ταχύτητα c . Εύκολα μπορούμε να δείξουμε πως η γωνία $\varphi = 45^\circ$. Επειδή στη φύση οι ταχύτητες που συναντάμε είναι μικρότερες η ίσες του c είναι αδύνατο να έχουμε γεγονότα κάτω από την ευθεία C. Έτσι η διακεκομμένη γραμμή D δεν μπορεί να παριστάνει την κοσμική γραμμή καμιάς γνωστής φυσικής ποσότητας διότι αντιστοιχεί σε ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός.



Σχήμα 5.2

5.4 Λυμένα Προβλήματα

5.4.1 (α) Υπολογίστε την εξίσωση Doppler σε προσέγγιση πρώτης τάξης ως προς v/c όταν πηγή και παρατηρητής απομακρύνονται μεταξύ τους. (β) Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 120 Km/h και πλησιάζει ένα ραντάρ της τροχαίας. Εάν το ραντάρ λειτουργεί σε συχνότητα 20×10^9 Hz, ποια η μετατόπιση συχνότητας που μετρά ο τροχονόμος;

(α) Από τις εξισώσεις Doppler έχουμε πως όταν πηγή και παρατηρητής απομακρύνονται ισχύει:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = f_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \sqrt{\frac{1+\beta}{1+\beta}} = f_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} \cong \frac{f_0}{1+\beta}$$

Όπου στην τελευταία προσέγγιση χρησιμοποιήσαμε την $\sqrt{1-\beta^2} \cong 1 - \frac{1}{2}\beta^2$.

(β) Από τις εξισώσεις Doppler έχουμε πως όταν πηγή και παρατηρητής πλησιάζουν μεταξύ τους ισχύει:

$$f' = f_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cong f_0 \sqrt{(1+\beta)(1+\beta)} = f_0(1+\beta)$$

Όπου στην τελευταία χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση $1/(1-\beta) \cong 1+\beta$. Το αυτοκίνητο λειτουργεί ως κινούμενη πηγή με την παραπάνω συχνότητα. Έτσι ο τροχονόμος στο ραντάρ του θα ανιχνεύσει τη συχνότητα:

$$f'' \cong f'(1+\beta) \cong f_0(1+\beta)^2 \cong f_0(1+2\beta)$$

άρα

$$\Delta f = f'' - f_0 \cong 2\beta f_0 = 2 \times \frac{120 \times 10^3 / 3600 \text{ m/sec}}{3 \times 10^8 \text{ m/sec}} \times 20 \times 10^9 \text{ Hz} = 4.44 \times 10^3 \text{ Hz}$$

5.4.2 Ένα άστρο απομακρύνεται από την Γη με ταχύτητα $5 \times 10^{-3}c$. Ποια η μετατόπιση του μήκους κύματος για την γραμμή D_2 του Νατρίου (5890Å);

Από την εξίσωση Doppler έχουμε:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \Rightarrow \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \Rightarrow$$

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \left(5890 \text{ \AA} \right) \sqrt{\frac{1+0.005}{1-0.005}} = 5920 \text{ \AA}$$

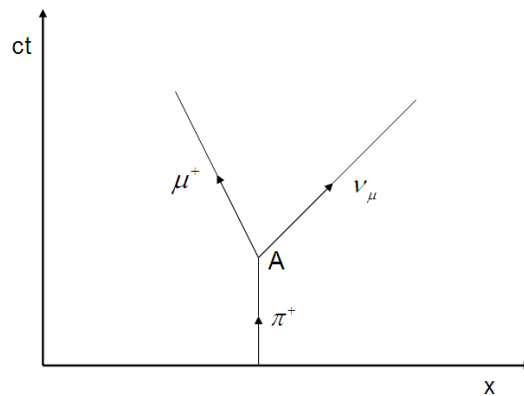
Έτσι έχουμε: $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 5920 \text{ \AA} - 5890 \text{ \AA} = 30 \text{ \AA}$. Η μετατόπιση είναι προς μεγαλύτερα μήκη κύματος (ερυθρή μετατόπιση).

5.4.3 Να χαράξετε το διάγραμμα Minkowski για ένα ακίνητο πiónιο το οποίο διασπάται ως εξής:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

Η κοσμική γραμμή του ακίνητου πιονίου είναι μια ευθεία κατακόρυφη γραμμή μέχρι τη στιγμή της καταστροφής του που είναι το γεγονός A στο παρακάτω σχήμα. Στο σημείο A δημιουργούνται τα δύο νέα σωματίδια. Το νετρίνο του μιονίου έχει μάζα μηδέν (ή ενδεχομένως περίπου μηδέν) και κινείται προς την μία κατεύθυνση με ταχύτητα c. Το μόνιο κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση με μικρότερη ταχύτητα.

Διαγράμματα της παρακάτω μορφής χρησιμοποιούνται στην Σωματιδιακή Φυσική και είναι γνωστά ως διαγράμματα *Feynman*.



5.4.4 Θεωρείστε δύο παρατηρητές, τον Ο και τον Ο' ο οποίος ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα v ως προς τον Ο κατά μήκος του κοινού τους άξονα $x-x'$. Να χαράξετε τους άξονες (ct', x') σε ένα διάγραμμα Minkowski (ct, x) .

Θα χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς Lorentz :

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{aligned} \quad (1)$$

Ο άξονας x' αντιστοιχεί σε $ct' = 0$. Άρα έχουμε από τις εξισώσεις (1) έχουμε:

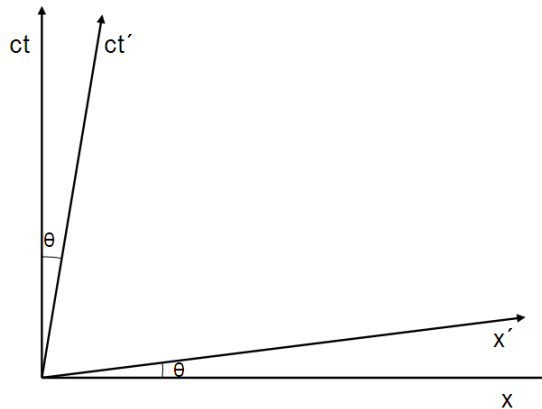
$$\frac{t}{x} = \frac{\gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)}{\gamma(x' + vt')} = \frac{v}{c^2} \Rightarrow ct = \beta x$$

Έτσι ο άξονας x' στο διάγραμμα Minkowski (ct, x) είναι ευθεία με κλίση $\tan(\theta) = \beta$.

Αντίστοιχα ο άξονας ct' αντιστοιχεί σε $x' = 0$. Άρα έχουμε από τις εξισώσεις (1):

$$\frac{x}{t} = \frac{\gamma(x' + vt')}{\gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)} = v \Rightarrow \frac{x}{ct} = \beta \Rightarrow x = (ct)\beta$$

Στο παρακάτω σχήμα εικονίζονται οι άξονες (ct', x') σε σχέση με τους (ct, x) .



5.4.5 Το πρόβλημα 3.5.9 αναφέρεται στο “παράδοξο των διδύμων”. Να λύσετε το πρόβλημα και να χαράξετε τις κοσμικές γραμμές του Πέτρου και του Παύλου.

(α) Ο Πέτρος και ο Παύλος είναι δίδυμοι. Σε ηλικία 20 ετών ο Πέτρος μπαίνει σε ένα διαστημόπλοιο το οποίο κινείται με ταχύτητα $v = 0.8c$ και πηγαίνει σε ένα κοντινό άστρο. Μόλις φτάνει σε αυτό αμέσως ξεκινάει το ταξίδι της επιστροφής. Φτάνει στη Γη σε ηλικία 28 ετών άρα $\Delta t' = 8y$. Για τον Παύλο όμως έχει περάσει χρόνος:

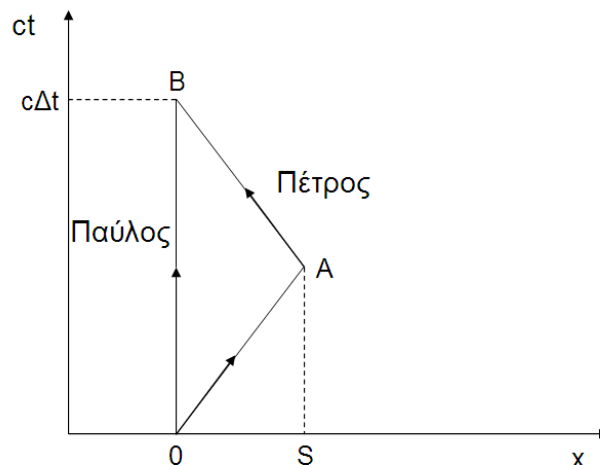
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{8y}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = 13.33y$$

Άρα η ηλικία του Παύλου την στιγμή της επιστροφής του Πέτρου θα είναι 30.33y.

(β) Η απόσταση του άστρου από την Γη θα είναι:

$$S = \frac{\Delta t v}{2} = \frac{(13.33 \times 365 \times 24 \times 3600 \text{ sec})(0.8 \times 3 \times 10^8 \text{ n/sec})}{2} = 5.0 \times 10^{16} \text{ m}$$

Ο Παύλος παραμένει ακίνητος στη Γη άρα παριστάνεται με μια ευθεία κατακόρυφη γραμμή όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Ο Πέτρος κινείται προς τα δεξιά έως το γεγονός Α που είναι η άφιξη του στον αστέρα. Στην συνέχεια αντιστρέφει την κίνησή του έως το γεγονός Β το οποίο είναι η επιστροφή του στη Γη. Παρατηρούμε πως η κοσμική γραμμή του Πέτρου είναι μεγαλύτερη από αυτή του Παύλου. Από τους υπολογισμούς μας όμως προκύπτει πως ο χρόνος που πέρασε είναι μεγαλύτερος για τον Παύλο. Το συμπέρασμα που καταλήγουμε είναι πως ο πιο έμμεσος δρόμος στον χωρόχρονο είναι “βραχύτερος”.



5.5 Προβλήματα

5.5.1 Στο φάσμα ενός αστεριού παρατηρείται μετατόπιση Doppler στην γραμμή D_2 του Νατρίου ($5890\text{\AA}$) κατά $100\text{\AA}$. Υπολογίστε την ταχύτητα απομάκρυνσης του αστερά.

(Απάντηση: $v = 0.017c$).

5.5.2 Το εσωτερικό μήκος κύματος της ονομαζόμενης άλφα γραμμής Lyman του υδρογόνου είναι $1216\text{\AA}$ (πολύ μέσα στο υπεριώδες). Στο φως του κβάζαρ 3C9, η γραμμή αυτή εμφανίζεται στα $3660\text{\AA}$ (στην ορατή περιοχή). Αν η πελώρια αυτή μετατόπιση προέρχεται από την κίνηση του κβάζαρ, ποια είναι η ταχύτητα απομακρύνσεώς του από την Γη;

(Απάντηση: $v = 0.8c$).

5.5.3 Ένα διαστημόπλοιο κινείται με ταχύτητα $0.6c$ σε σχέση με μια διαστημική πλατφόρμα. Ένας αστροναύτης μέσα στο διαστημόπλοιο στέλνει μια δέσμη φωτός με μήκος κύματος $5000\text{\AA}$ προς την πλατφόρμα. (α) Ποια είναι η συχνότητα του φωτός σύμφωνα με έναν παρατηρητή πάνω στην πλατφόρμα; (β) Ποια είναι η συχνότητα του φωτός, σύμφωνα με έναν άλλο παρατηρητή, ο οποίος ταξιδεύει με ένα δεύτερο διαστημόπλοιο τα οποίο ταξιδεύει σε αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα $0.8c$ ως προς την πλατφόρμα;

(Απάντηση: (α) $3 \times 10^{14}\text{ Hz}$ (β) $1 \times 10^{14}\text{ Hz}$).

5.5.4 Ένας ορισμένος γαλαξίας απομακρύνεται από την Γη με ταχύτητα 1% της ταχύτητας του φωτός. (α) Κατά ποιο ποσοστό μετατοπίζονται τα φασματικά μήκη κύματός του σε σχέση με τα μήκη κύματος των αντίστοιχων φωτεινών πηγών στη Γη; (β) Είναι αυτό μια ερυθρή ή μια κυανή μετατόπιση; (γ) Μια χαρακτηριστική ακτινοβολία του υδρογόνου στη Γη έχει μήκος κύματος $6563\text{\AA}$. Ποιο είναι το μήκος κύματος της ακτινοβολίας αυτής στο φως του γαλαξία;

(Απάντηση: (α) 2% (β) ερυθρή (γ) $6694.26\text{\AA}$).

5.5.5 Τα κβάζαρ συχνά χαρακτηρίζονται από μια “παράμετρο ερυθρής μετατόπισης” Z που ορίζεται ως $Z = \Delta\lambda/\lambda_0$, όπου λ_0 είναι το μήκος κύματος μιας ορισμένης φασματικής γραμμής που παρατηρείται στο φως που εκπέμπεται από μια γήινη πηγή και $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ είναι η μετατόπιση του μήκους κύματος της γραμμής αυτής που παρατηρείται στο φως ενός κβάζαρ. Δείξτε ότι αν η ερυθρή μετατόπιση του κβάζαρ είναι μια μετατόπιση Doppler, η ταχύτητα απομακρύνσεώς του συνδέεται με το Z σύμφωνα με τον τύπο:

$$\frac{v}{c} = \frac{(Z+1)^2 - 1}{(Z+1)^2 + 1}$$

5.5.6 Σύμφωνα με τον ακίνητο παρατηρητή O το γεγονός A λαμβάνει χώρα σε συντεταγμένες $x_A = 2 \text{ m}$, $y_A = 1 \text{ m}$, $z_A = 3 \text{ m}$ και $t_A = 0 \text{ sec}$, ενώ το γεγονός B σε συντεταγμένες $x_B = 7 \text{ m}$, $y_B = 5 \text{ m}$, $z_B = 10 \text{ m}$ και $t_B = 100 \text{ nsec}$. Υπολογίστε την απόσταση των δύο γεγονότων στον χωρόχρονο σύμφωνα με τον παρατηρητή O και ένα δεύτερο παρατηρητή O' ο οποίος κινείται ως προς τον O με ταχύτητα $0.6c$ στη διεύθυνση του άξονα $+x$.
(Απάντηση: $I^2 = 810 \text{ m}^2$).

5.5.7 Ένα διαστημόπλοιο το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα v περνά κοντά στη Γη στο χρόνο $t = 0$. Αργότερα στέλνει πίσω ένα ραδιοφωνικό μήνυμα. Σε ένα διάγραμμα Minkowski, δείξτε τις κοσμικές γραμμές της Γης, του διαστημοπλοίου, και του ραδιοφωνικού κύματος. Σημειώστε τα σημεία στα οποία τέμνονται οι κοσμικές γραμμές.