

Κεφάλαιο 4 :

Οι μετασχηματισμοί Lorentz.

4.1 Οι μετασχηματισμοί Lorentz – Περιγραφή ενός γεγονότος.

Θεωρείστε δύο παρατηρητές, τον Ο και τον Ο' ο οποίος ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα v ως προς τον Ο κατά μήκος του κοινού τους άξονα $x-x'$. Έστω Ρ ένα γεγονός με συντεταγμένες (x, y, z, t) στο σύστημα S (όπου ο Ο είναι ακίνητος) και με συντεταγμένες (x', y', z', t') στο σύστημα S' (όπου ο Ο' είναι ακίνητος). Οι συντεταγμένες (x, y, z, t) και (x', y', z', t') συνδέονται μεταξύ τους με τον Μετασχηματισμό Συντεταγμένων Lorentz:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{aligned} \right\} S' \rightarrow S \quad (4.1)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Lorentz που συνδέει τις συντεταγμένες (x', y', z', t') με τις (x, y, z, t) είναι:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned} \right\} S \rightarrow S' \quad (4.2)$$

4.2 Οι μετασχηματισμοί Lorentz – Περιγραφή ζεύγους γεγονότων.

Έστω ένα γεγονός P_1 με συντεταγμένες (x_1, y_1, z_1, t_1) στο σύστημα S και με συντεταγμένες (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) στο σύστημα S' και ένα δεύτερο ξεχωριστό γεγονός P_2 με συντεταγμένες (x_2, y_2, z_2, t_2) και (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) αντίστοιχα. Μπορούμε να ορίσουμε την απόσταση των δύο γεγονότων ως $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta x' = x'_2 - x'_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ κτλ. Τα $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$ και $(\Delta x', \Delta y', \Delta z', \Delta t')$ συνδέονται μεταξύ τους με τον Μετασχηματισμό Lorentz ως:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ \Delta y &= \Delta y' \\ \Delta z &= \Delta z' \\ \Delta t &= \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) \end{aligned} \right\} S' \rightarrow S \quad (4.3)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Lorentz που συνδέει τα $(\Delta x', \Delta y', \Delta z', \Delta t')$ με τα $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$ είναι:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x' &= \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta y' &= \Delta y \\ \Delta z' &= \Delta z \\ \Delta t' &= \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) \end{aligned} \right\} S \rightarrow S' \quad (4.4)$$

4.3 Ο μετασχηματισμός Lorentz ταχυτήτων.

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο τις σχέσεις (4.1) και (4.2) προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις μετασχηματισμών ταχύτητας κατά Lorentz.

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \\ u_y &= \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right)} \\ u_z &= \frac{u'_z}{\gamma \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right)} \end{aligned} \right\} S' \rightarrow S \quad (4.5)$$

Και ο αντίστροφος μετασχηματισμός:

$$\left. \begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ u'_y &= \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)} \\ u'_z &= \frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)} \end{aligned} \right\} S \rightarrow S' \quad (4.6)$$

Προσοχή: Σε προβλήματα τα οποία αφορούν ταχύτητες υπάρχουν τρία αντικείμενα τα οποία εμπλέκονται: οι δύο παρατηρητές O και O' και ένα σώμα Σ . Το σώμα Σ έχει τις εξής δύο ταχύτητες: την ταχύτητα (u_x, u_y, u_z) ως προς τον παρατηρητή O και την ταχύτητα (u'_x, u'_y, u'_z) ως προς τον παρατηρητή O' . Η ποσότητα v η οποία εμφανίζεται στις παραπάνω σχέσεις αναφέρεται στην ταχύτητα του O' ως προς τον O .

Μερικές άμεσες συνέπειες των Μετασχηματισμών Lorentz είναι οι ακόλουθες:

- Ορίζουν ως φυσικό όριο στην ταχύτητα το c . Για $v > c$ ο όρος $\sqrt{1 - (v^2 / c^2)}$ γίνεται φανταστικός αριθμός.
- Εισάγουν μία νέα έννοια: την ανάμειξη του χώρου με τον χρόνο. Αυτό οδηγεί αυτόματα στην ιδέα του τετραδιάστατου χωροχρόνου.

- Στην περίπτωση όπου $v \ll c$ οι μετασχηματισμοί Lorentz ταυτίζονται με τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου. Υπακούουν δηλαδή την Αρχή της Αντιστοιχίας σύμφωνα με την οποία κάθε νέα θεωρία της Φυσικής οφείλει να επαληθεύει τα αποτελέσματα στο κλασικό όριο.

4.4 Λυμένα Προβλήματα

4.4.1 Η διαστολή του χρόνου και η συστολή του μήκους που εξετάσαμε στο κεφάλαιο 3 αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της γενικής σχέσης των μετρήσεων χώρου και χρόνου μεταξύ δύο αδρανειακών παρατηρητών και προέρχονται από το δεύτερο αξίωμα του Einstein που απαιτεί c =σταθερή. Να δείξετε πως η διαστολή του χρόνου και η συστολή του μήκους μπορούν να προκύψουν από τις εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz.

Η διαστολή του χρόνου:

Στο κινούμενο σύστημα S' έχουμε πως $\Delta x' = 0$. Από τις εξισώσεις (4.3) βρίσκουμε πως:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) = \gamma \Delta t'$$

Η οποία εκφράζει την σχέση για την διαστολή του χρόνου (εξίσωση 3.1).

Η συστολή του μήκους:

Στο ακίνητο σύστημα S έχουμε πως $\Delta t = 0$. Από τις εξισώσεις (4.3) βρίσκουμε πως:

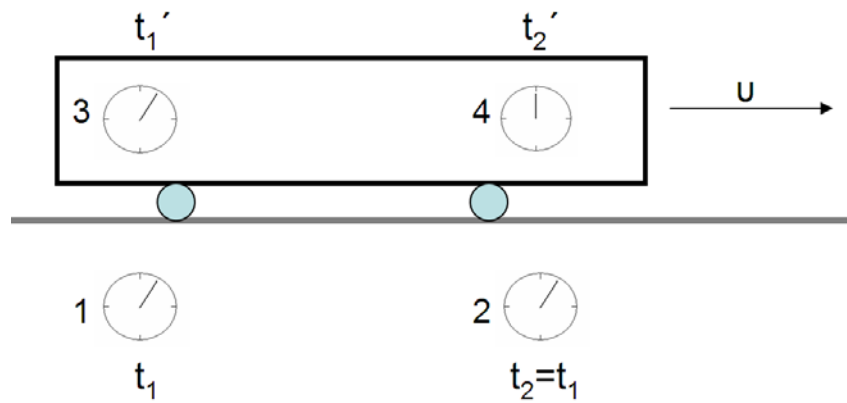
$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma (\Delta x - v \Delta t) = \gamma \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$$

Η οποία εκφράζει την σχέση για την συστολή των μηκών (εξίσωση 3.2).

4.4.2 Δείξτε με ένα απλό παράδειγμα πως με βάση τους μετασχηματισμούς Lorentz προκύπτει άμεσα η σχετικότητα του ταυτόχρονου.

Θεωρήστε ένα τραίνο το οποίο κινείται με ταχύτητα v όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 4.1. Θεωρήστε τα ρολόγια 1 και 2 ακίνητα ως προς το έδαφος και τα ρολόγια 3 και 4 ακίνητα στο σύστημα του τραίνου. Το πέρασμα του ρολογιού 3 δίπλα από το ρολόι 1 και του ρολογιού 4 δίπλα από το ρολόι 2 είναι ταυτόχρονα γεγονότα σύμφωνα με τον παρατηρητή του εδάφους και άρα $\Delta t = 0$. Σύμφωνα με την τελευταία εξίσωση των σχέσεων (4.3) έχουμε:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) = 0 \Rightarrow \Delta t' = -\frac{v}{c^2} \Delta x' \quad (1)$$



Σχήμα 4.1

Το τελευταίο αποτέλεσμα ορίζει την σχετικότητα του ταυτόχρονου. Γεγονότα τα οποία οι παρατηρητές του εδάφους κρίνουν πως συμβαίνουν ταυτόχρονα ($\Delta t = 0$), οι παρατηρητές του τραίνου κρίνουν ότι συμβαίνουν με μια διαφορά χρόνου $\Delta t'$ η οποία εξαρτάται από την απόστασή τους στο χώρο.

Το αρνητικό πρόσημο στην παραπάνω σχέση (1) σημαίνει πως από τα δύο γεγονότα τα οποία ο εξωτερικός παρατηρητής έκρινε πως ήταν ταυτόχρονα, το ένα που συμβαίνει στο μπροστινό μέρος του τραίνου συμβαίνει νωρίτερα σύμφωνα με τα ρολόγια του τραίνου, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1. Είναι επίσης φανερό από το παραπάνω σχήμα πως οι παρατηρητές του εδάφους θεωρούν πως τα ρολόγια του τραίνου όχι μόνο προχωρούν αργά αλλά είναι επίσης και ασυγχρόνιστα.

Τέλος σημειώνουμε σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz, γεγονότα τα οποία συμπίπτουν και ως προς τον χώρο και τον χρόνο σε ένα σύστημα αναφοράς ($\Delta x = \Delta t = 0$) συμπίπτουν επίσης ως προς τον χώρο και τον χρόνο σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα αναφοράς ($\Delta x' = \Delta t' = 0$).

4.4.3 Δείξτε ότι οι εξισώσεις του αντίστροφου μετασχηματισμού Lorentz δίνουν επίσης το αποτέλεσμα $\Delta t' = -\frac{v}{c^2} \Delta x'$ στο προηγούμενο πρόβλημα.

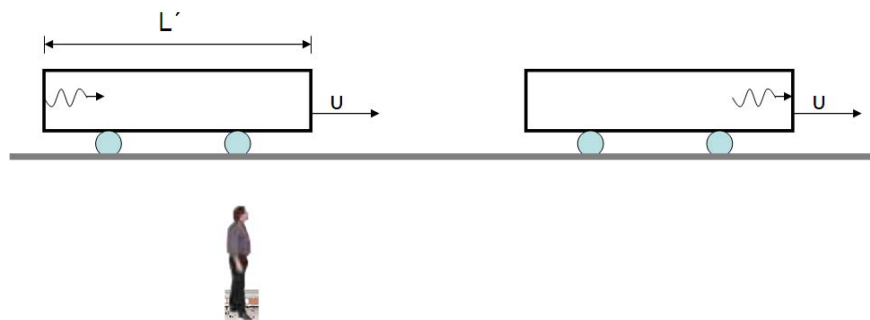
Στο σχήμα 4.1 το πέρασμα του ρολογιού 3 δίπλα από το ρολόι 1 και του ρολογιού 4 δίπλα από το ρολόι 2 είναι ταυτόχρονα γεγονότα σύμφωνα με τον παρατηρητή του εδάφους και άρα $\Delta t = 0$. Έτσι η πρώτη και η τέταρτη εξίσωση των σχέσεων (4.4) γίνονται:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \Rightarrow \Delta x' = \gamma\Delta x$$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) \Rightarrow \Delta t' = -\gamma\frac{v}{c^2}\Delta x$$

Εάν απαλείψουμε από τις παραπάνω δύο σχέσεις το Δx έχουμε το αποτέλεσμα $\Delta t' = -\frac{v}{c^2} \Delta x'$.

4.4.4 Ένα τρένο κινείται όπως στο παρακάτω σχήμα 4.2 με ταχύτητα v . Ένα φωτόνιο ξεκινά από το πίσω μέρος του βαγονιού και φτάνει στο μπροστινό. (α) Υπολογίστε και συγκρίνετε τους χρόνους πτήσης του φωτονίου για έναν παρατηρητή πάνω στο τρένο και έναν παρατηρητή που βρίσκεται ακίνητος στην αποβάθρα. (β) Κάντε τους υπολογισμούς σας και για την περίπτωση που το φωτόνιο ξεκινά από το μπροστινό μέρος του τρένου και καταλήγει στο πίσω.



Σχήμα 4.2

(α) Σύμφωνα με τον παρατηρητή στο τρένο είναι:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= x'_2 - x'_1 = L' \\ \Delta t' &= \frac{\Delta x'}{c} = \frac{L'}{c}\end{aligned}\quad (1)$$

Σύμφωνα με τον παρατηρητή στην αποβάθρα είναι:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{L'}{c} + \frac{\beta}{c} L'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\frac{L'}{c}(1 + \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{L'}{c} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει πως $\Delta t > \Delta t'$.

(β) Σύμφωνα με τον παρατηρητή στο τρένο είναι:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= x'_2 - x'_1 = -L' \\ \Delta t' &= \frac{|\Delta x'|}{c} = \frac{L'}{c}\end{aligned}\quad (3)$$

Σύμφωνα με τον παρατηρητή στην αποβάθρα είναι:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{L'}{c} - \frac{\beta}{c} L'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\frac{L'}{c}(1 - \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{L'}{c} \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) προκύπτει πως $\Delta t < \Delta t'$. Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (α) και (β) συμπεραίνουμε πως η διάρκεια ενός ανισότοπου φαινομένου εξαρτάται από την αρχική και την τελική θέση του φαινομένου.

4.4.5 Ένας αστροναύτης από το πίσω μέρος του διαστημοπλοίου του ρίχνει μια σφαίρα προς ένα στόχο που βρίσκεται στο μπροστινό μέρος. Το διαστημόπλοιο έχει μήκος $L=60\text{m}$ και η σφαίρα κινείται με ταχύτητα $u = 0.8c$ όπως αυτά μετρούνται από τον αστροναύτη. (α) Βρείτε τον χρόνο που χρειάζεται η σφαίρα να φτάσει στο στόχο όπως τον μετράει ο αστροναύτης. (β) Εάν το διαστημόπλοιο κινείται με ταχύτητα $v = 0.6c$ σε σχέση με την Γη βρείτε τον χρόνο πτήσης της σφαίρας σύμφωνα με έναν παρατηρητή πάνω στη Γη. (γ) Ποια η ταχύτητα της σφαίρας σύμφωνα με τον παρατηρητή πάνω στη Γη;

(α) Σύμφωνα με τον αστροναύτη είναι:

$$\Delta t' = \frac{L}{u} = \frac{60\text{ m}}{0.8 \times 3 \times 10^8\text{ m/sec}} = 2.5 \times 10^{-7}\text{ sec}$$

(β) Σύμφωνα με τον παρατηρητή στη Γη είναι:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2.5 \times 10^{-7} \text{ sec} + \frac{(0.6)(60 \text{ m})}{3 \times 10^8 \text{ m/sec}}}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = 4.63 \times 10^{-7} \text{ sec}$$

(γ) Σύμφωνα με τον παρατηρητή στη Γη είναι:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = \frac{0.8c + 0.6c}{1 + \frac{0.8c \cdot 0.6c}{c^2}} = 0.946c$$

4.4.6 Υποθέστε ότι ένας παρατηρητής Ο προσδιορίζει ότι δύο γεγονότα απέχουν χωρικά $3.6 \times 10^8 \text{ m}$ και συμβαίνουν σε χρονική διαφορά 2 sec. Ποιος είναι ο ιδιοχρόνος μεταξύ των δύο αυτών γεγονότων;

Υπάρχει ένας δεύτερος παρατηρητής Ο', ο οποίος κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με τον Ο, και που παρατηρεί πως τα δύο γεγονότα λαμβάνουν χώρα στην ίδια χωρική θέση, δηλαδή $\Delta x' = 0$. Τότε ο ιδιοχρόνος μεταξύ των δύο γεγονότων είναι το χρονικό διάστημα $\Delta t'$ σύμφωνα με τον Ο'. Έχουμε:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 0 = \frac{(3.6 \times 10^8 \text{ m}) - v(2 \text{ sec})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v = 1.8 \times 10^8 \text{ m/sec} = 0.6c$$

και

$$\Delta t' = \frac{\Delta t + \frac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(2 \text{ sec}) + \frac{0.6 \times 3.6 \times 10^8 \text{ msec}}{3 \times 10^8 \text{ m/sec}}}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = 1.6 \text{ sec}$$

4.4.7 Η ταχύτητα ενός διαστημοπλοίου σε σχέση με ένα διαστημικό σταθμό είναι $v = 0.8c$, και οι παρατηρητές Ο' και Ο στο διαστημόπλοιο και τον διαστημικό σταθμό, αντίστοιχα, συγχρονίζουν τα ρολόγια τους έτσι ώστε $t = t' = 0$ όταν $x = x' = 0$. Υποθέστε ότι ο Ο παρατηρεί το ρολόι του Ο' με ένα τηλεσκόπιο. Τι ώρα βλέπει σε αυτό όταν το δικό του δείχνει 30 sec;

Ας ορίσουμε το γεγονός Α ως την εκπομπή ενός φωτεινού σήματος από τον παρατηρητή Ο' και ως γεγονός Β την λήψη του φωτεινού σήματος από τον παρατηρητή Ο. Το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό του χρόνου t'_A . Από τις εξισώσεις (4.1) έχουμε:

$$t_A = \frac{t'_A + \frac{v}{c^2} x'_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t'_A + \frac{v}{c^2} (0)}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = \frac{t'_A}{0.6} \quad (1)$$

$$x_A = \frac{x'_A + vt'_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0 + (0.8 \times 3 \times 10^8 \text{ m/sec}) t'_A}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = (4 \times 10^8 \text{ m/sec}) t'_A$$

Το φωτεινό σήμα ταξιδεύει προς την αρνητική διεύθυνση με ταχύτητα c , έτσι έχουμε:

$$x_B - x_A = -c(t_B - t_A) \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τις (1) στην (2) έχουμε:

$$0 - (4 \times 10^8 \text{ m/sec}) t'_A = -(3 \times 10^8) \left(30 \text{ sec} - \frac{t'_A}{0.6} \right) \Rightarrow t'_A = 10 \text{ sec}$$

Προσοχή: Το πρόβλημα αυτό δείχνει την διαφορά μεταξύ του παρατηρώ ένα γεγονός και του υπολογίζω τις συντεταγμένες του ίδιου γεγονότος. Με υπόδειγμα το παραπάνω προσπαθήστε να λύσετε το πρόβλημα 4.5.7.

4.4.8 Το διαστημόπλοιο Α ταξιδεύει προς τα δεξιά και το διαστημόπλοιο Β προς τα αριστερά με ταχύτητες $0.8c$ και $0.6c$ ως προς τη Γη, αντίστοιχα. Ποια η ταχύτητα του διαστημοπλοίου Α σε σχέση με το Β;

Θεωρούμε την εξής αντιστοιχία: ο παρατηρητής Ο αντιστοιχεί στην Γη, ο παρατηρητής Ο' στο διαστημόπλοιο Β και στο κινούμενο σώμα αντιστοιχεί στο διαστημόπλοιο Α. Έχουμε:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{(0.8c) - (-0.6c)}{1 - \frac{(-0.6c)(0.8c)}{c^2}} = 0.946c$$

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε την εξής αντιστοιχία: ο παρατηρητής Ο αντιστοιχεί στο διαστημόπλοιο Α, ο παρατηρητής Ο' στο διαστημόπλοιο Β και στο κινούμενο σώμα αντιστοιχεί η Γη. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \Rightarrow 0.6c = \frac{-(0.8c) - v}{1 - (v/c^2)(-0.8c)} \Rightarrow v = -0.946c$$

Η τελευταία απάντηση συμφωνεί με την πρώτη. Το αρνητικό πρόσημο εμφανίζεται γιατί η ταχύτητα v είναι η ταχύτητα του O' σε σχέση με τον O , δηλαδή η ταχύτητα του B ως προς το A .

4.4.9 Λύστε το προηγούμενο πρόβλημα θεωρώντας πως το διαστημόπλοιο A ταξιδεύει με ταχύτητα $0.8c$ στην διεύθυνση $+y$ σε σχέση με την Γ . (Το διαστημόπλοιο B ταξιδεύει πάντα με ταχύτητα $0.6c$ στην διεύθυνση $-x$ σε σχέση με την Γ).

Θεωρούμε την εξής αντιστοιχία: Ο παρατηρητής O αντιστοιχεί στην Γ , ο παρατηρητής O' στο διαστημόπλοιο B και στο κινούμενο σώμα αντιστοιχεί στο διαστημόπλοιο A . Έχουμε:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (v/c^2)u_x} = \frac{(0) - (-0.6c)}{1 - 0} = 0.6c$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{1 - (v/c^2)u_x} = \frac{(0.8c) \sqrt{1 - (0.6)^2}}{1 - 0} = 0.64c$$

Άρα:

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{(0.6c)^2 + (0.64c)^2} = 0.88c$$

και

$$\tan(\varphi') = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{0.64c}{0.6c} = 1.07 \Rightarrow \varphi' = 46.8^\circ$$

4.4.10 Δείξτε ότι η ποσότητα:

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz.

Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Lorentz έχουμε:

$$\Delta x^2 = \left[\frac{\Delta x' + v \Delta t'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right]^2 = \frac{1}{1 - (v^2/c^2)} (\Delta x'^2 + v^2 \Delta t'^2 + 2v \Delta x' \Delta t')$$

$$\Delta y^2 = \Delta y'^2$$

$$\Delta z^2 = \Delta z'^2$$

$$\Delta t^2 = \left[\frac{\Delta t' + (v/c^2) \Delta x'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right]^2 = \frac{1}{1 - (v^2/c^2)} \left(\frac{v^2}{c^4} \Delta x'^2 + \Delta t'^2 + \frac{2v}{c^2} \Delta x' \Delta t' \right)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω στην ποσότητα βρίσκουμε πως:

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$$

4.5 Προβλήματα

4.5.1 Το τραίνο που εικονίζεται στο σχήμα 4.1 συνεχίζει την πορεία του προς τα μπροστά. Τη στιγμή που το ρολόι 3 στο πίσω μέρος του βαγονιού περνά μπροστά από το ρολόι 2 του εδάφους, βρείτε τι δείχνουν τα δύο αυτά ρολόγια. Θεωρείστε L την απόσταση των ρολογιών 1 και 2.

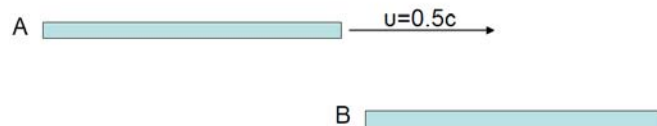
(Απάντηση: Ένδειξη ρολογιού 2 = $t_1 + \frac{L}{v}$, Ένδειξη ρολογιού 3 = $t_1 + \frac{L}{v} \sqrt{1 - \beta^2}$)

4.5.2 Ένας παρατηρητής Ο παρατηρεί πως δύο γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα και σε χωρική απόσταση 600 Km. Ένας δεύτερος παρατηρητής Ο' κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς τον Ο και παρατηρεί πως τα δύο γεγονότα λαμβάνουν χώρα σε απόσταση 1200 Km το ένα μακριά από το άλλο. Πόση είναι η χρονική διαφορά των δύο γεγονότων σύμφωνα με τον Ο' ;

(Απάντηση: $-3.46 \times 10^{-3} \text{ sec}$).

4.5.3 Η ράβδος Α μήκους ενός μέτρου, κινείται με την μισή ταχύτητα του φωτός και περνά τη ράβδο του ενός μέτρου Β η οποία είναι ακίνητη στο εργαστήριο (βλέπε παρακάτω σχήμα). Τη χρονική στιγμή, στο εργαστήριο, που η αρχή της κινούμενης ράβδου συμπίπτει με την αρχή της ακίνητης ράβδου, πού, σύμφωνα με τον παρατηρητή στο εργαστήριο, βρίσκεται το τέλος της κινούμενης ράβδου;

(Απάντηση: 0.134 m).



4.5.4 Ένα φανταστικό σχετικιστικό βαγόνι τραίνου, όταν είναι ακίνητο, έχει μήκος 14m. Για να μετρήσουν το μήκος του καθώς κινείται με 99% της ταχύτητας του φωτός, οι παρατηρητές του εδάφους σημειώνουν τη θέση της αρχής του βαγονιού σε μια δεδομένη χρονική στιγμή και τη θέση του τέλους του κατά την ίδια χρονική στιγμή. (α) Δείξτε ότι οι παρατηρητές που βρίσκονται πάνω στο τραίνο θεωρούν ότι πέρασαν 46 nsec μεταξύ των δύο αυτών μετρήσεων. (β) Ποιο είναι το μήκος του κινούμενου βαγονιού που μετρούν οι παρατηρητές στο έδαφος.

4.5.5 Ένα διαστημόπλοιο με μήκος 90m ταξιδεύει με ταχύτητα $0.8c$ ως προς το έδαφος. Καθώς η μύτη του διαστημοπλοίου περνά μπροστά από έναν ακίνητο παρατηρητή στο έδαφος, ένα φωτόνιο εκπέμπεται από την μύτη του διαστημοπλοίου προς την ουρά του. Πόσο χρόνο

κάνει το φωτόνιο να φτάσει στην ουρά (α) σύμφωνα με έναν ακίνητο παρατηρητή μέσα στο διαστημόπλοιο και (β) σύμφωνα με τον παρατηρητή στο έδαφος;

(Απάντηση: (α) $3 \times 10^{-7} \text{ sec}$ (β) $1 \times 10^{-7} \text{ sec}$)

4.5.6 Στο προηγούμενο πρόβλημα: Πότε η ουρά του διαστημοπλοίου περνά μπροστά από τον παρατηρητή στο έδαφος (α) σύμφωνα με τον ακίνητο παρατηρητή μέσα στο διαστημόπλοιο και (β) σύμφωνα με τον παρατηρητή στο έδαφος;

(Απάντηση: (α) $3.75 \times 10^{-7} \text{ sec}$ (β) $2.25 \times 10^{-7} \text{ sec}$)

4.5.7 Αναφερόμενοι στο λυμένο πρόβλημα 4.4.7 : Εάν αντίστοιχα ο O' παρατηρεί το ρολόι του O με ένα τηλεσκόπιο, τι ώρα βλέπει σε αυτό όταν και το δικό του δείχνει 30 sec;

(Απάντηση: 100 sec)

4.5.8 Ένας κόκκινος λαμπτήρας ανάβει στη θέση A με συντεταγμένες $x_A = 3 \text{ m}$ και $t_A = 1 \times 10^{-9} \text{ sec}$, και ένας μπλε λαμπτήρας ανάβει στη θέση B με συντεταγμένες $x_B = 5 \text{ m}$ και $t_B = 9 \times 10^{-9} \text{ sec}$, όπως καθορίζονται από έναν ακίνητο παρατηρητή O . Ένας παρατηρητής O' κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος του κοινού άξονα $x-x'$. Σύμφωνα με τον O' οι δύο λαμπτήρες ανάβουν στην ίδια χωρική θέση. (α) Βρείτε την σχετική ταχύτητα των δύο παρατηρητών. (β) Βρείτε την κοινή χωρική θέση των λαμπτήρων σύμφωνα με τον O' (γ) Σε ποια χρονική στιγμή ανάβει το κόκκινο φως σύμφωνα με τον O' .

(Απάντηση: (α) $2.5 \times 10^8 \text{ m/sec}$ (β) 4.97 m (γ) $-1.33 \times 10^{-8} \text{ sec}$)

4.5.9 Δύο πίδακες ύλης εκτοξεύονται από το κέντρο ενός ραδιογαλαξία σε αντίθετες κατευθύνσεις. Η ταχύτητα των δύο πιδάκων σε σχέση με τον γαλαξία είναι $0.75c$. Υπολογίστε την ταχύτητα του ενός πίδακα σε σχέση με τον άλλο.

(Απάντηση: (α) $0.96 c$)

4.5.10 Ένα διαστημόπλοιο έχει μήκος 150 m και κινείται με ταχύτητα $0.6c$ σε σχέση με μια διαστημική αποβάθρα. Καθώς η ουρά του διαστημοπλοίου περνάει μπροστά από ένα ακίνητο παρατηρητή πάνω στην διαστημική αποβάθρα, αυτός ανάβει μια δέσμη φωτός προς την κατεύθυνση του μπροστινού μέρους του διαστημοπλοίου. (α) Σε ποια απόσταση από την αποβάθρα θα βρίσκεται το μπροστινό μέρος του διαστημοπλοίου όταν το φως φτάσει σε αυτό; (β) Πόσος χρόνος θα έχει παρέλθει μεταξύ της εκπομπής και της άφιξης του φωτός σε σχέση με τον παρατηρητή στην αποβάθρα; (γ) Πόσος χρόνος θα έχει παρέλθει μεταξύ της εκπομπής και της άφιξης του φωτός σε σχέση με έναν παρατηρητή ο οποίος βρίσκεται στο μπροστινό μέρος του διαστημοπλοίου;

(Απάντηση: (α) 300 m (β) 10^{-6} sec (γ) $0.5 \times 10^{-6} \text{ sec}$)

4.5.11 Ένα φως φάρου σε ένα ορισμένο πλανήτη ανάβει μια φορά κάθε ένα msec όπως μετριέται με τα ρολόγια του πλανήτη αυτού. Στο σύστημα αναφοράς ενός στόλου περαστικών Αρειανών το φως κινείται κατά 400m μεταξύ διαδοχικών εκπομπών του φάρου. (α) Ποια είναι η ταχύτητα του στόλου σε σχέση με τον πλανήτη; (β) Ποιος είναι ο χρόνος που μετρούν οι Αρειανοί μεταξύ διαδοχικών εκπομπών;

(Απάντηση: (α) $v = 0.8c$ (β) $\Delta t = 1.66 \text{ msec}$)

4.5.12 Ένα σωματίδιο κινείται με ταχύτητα $0.8c$ σχηματίζοντας γωνία 30° με το άξονα των x , σύμφωνα με έναν παρατηρητή O . Ποια είναι η ταχύτητα του σωματιδίου σύμφωνα με έναν δεύτερο παρατηρητή O' , ο οποίος κινείται με ταχύτητα $-0.6c$ κατά μήκος του κοινού άξονα $x-x'$;

(Απάντηση: $u' = 0.941c$ $\varphi' = 13.9^\circ$)

4.5.13 Ένας παρατηρητής O' κινείται κατά μήκος του άξονα $x-x'$ με ταχύτητα $c/2$ σε σχέση με τον ακίνητο παρατηρητή O . Ο παρατηρητής O διαπιστώνει πως ένα σωματίδιο κινείται στην διεύθυνση $+y$ με ταχύτητα $c/\sqrt{3}$. Υπολογίστε την ταχύτητα του σωματιδίου σε σχέση με τον O' .

(Απάντηση: $u' = c/\sqrt{2}$ / $\varphi' = 135^\circ$)

4.5.14 Μια ρουκέτα που πηγαίνει από την Γη στον Δία περνά δίπλα από τον Άρη με μια σχετική ταχύτητα $0.4c$. Οι πειραματικοί που βρίσκονται μέσα στη ρουκέτα παρατηρούν δύο άλλα άγνωστα διαστημόπλοια, που το ένα κινείται προς τον Δία και το άλλο προς την Γη, αμφότερα με ταχύτητα $0.8c$ σχετικά με την ρουκέτα. Ποια ταχύτητα έχουν τα δύο διαστημόπλοια σύμφωνα με τους κατοίκους του Άρη;

4.5.15 Θεωρήστε έναν ραδιενεργό πυρήνα ο οποίος κινείται με σταθερή ταχύτητα $0.5c$ σχετικά με το σύστημα του εργαστηρίου. (α) Ο πυρήνας εκπέμπει ένα ηλεκτρόνιο με ταχύτητα $0.9c$ σε σχέση με αυτόν κατά την διεύθυνση της κίνησής του. Υπολογίστε την ταχύτητα του ηλεκτρονίου στο σύστημα του εργαστηρίου. (β) Υποθέστε πως ο πυρήνας εκπέμπει το ηλεκτρόνιο με ταχύτητα $0.9c$ σε σχέση με αυτόν κάθετα στην διεύθυνση της κίνησής του. Υπολογίστε ξανά την ταχύτητα του ηλεκτρονίου στο σύστημα του εργαστηρίου.

(Απάντηση: (α) $u = 0.966c$ (β) $u = 0.926c$ $\varphi = 57.3^\circ$)

4.5.16 Σε χρόνο $t = 0$ ο παρατηρητής O εκπέμπει ένα φωτόνιο σε μια διεύθυνση 60° σε σχέση με το άξονα x . Ένας δεύτερος παρατηρητής O' ταξιδεύει με ταχύτητα $0.6c$ κατά μήκος του κοινού άξονα $x-x'$. Ποια η γωνία που σχηματίζει το φωτόνιο με τον άξονα x' ;

(Απάντηση: $\tan(\varphi') = -6.92$)

4.5.17 Η ταχύτητα του φωτός στο ακίνητο νερό είναι c/n , όπου ο δείκτης διάθλασης στο νερό είναι $n \cong 4/3$. Ο Fizeau, το 1851, βρήκε πως η ταχύτητα (σε σχέση με το σύστημα του εργαστηρίου) του φωτός σε νερό το οποίο κινείται με ταχύτητα V (σε σχέση με το σύστημα του εργαστηρίου) μπορεί να εκφραστεί ως:

$$u = \frac{c}{n} + kV$$

Όπου ο συντελεστής k μετρήθηκε από τον ίδιο να είναι $k \cong 0.44$. Υπολογίστε την τιμή του k σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz.

(Απάντηση: (α) $k \cong 0.438$, χρησιμοποιήστε την προσέγγιση $\left(1 + \frac{V}{nc}\right)^{-1} \cong 1 - \frac{V}{nc}$)

4.5.18 Η εξίσωση ενός σφαιρικού κύματος φωτός το οποίο ξεκινά από την αρχή των αξόνων $t = t' = 0$ είναι:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

Δείξτε, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Lorentz, ότι ο κινούμενος παρατηρητής O' θα διαπιστώσει πως ο ίδιος παλμός φωτός είναι και για αυτόν σφαιρικός.

4.5.19 Δείξτε ότι η ηλεκτρομαγνητική κυματική εξίσωση,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz.

4.5.20 Αναπτύξτε την πρώτη και την τέταρτη σχέση των εξισώσεων (4.3) σε δυναμοσειρές ως προς β μέχρι όρους τρίτης τάξης. Αναγνωρίστε τους όρους που δίνουν το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου και τους όρους που δίνουν την κύρια διόρθωση στον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου.

Υπόδειξη: Για την ανάπτυξη ως προς β χρησιμοποιείτε την

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$