

Κεφάλαιο 1 :

Μετασχηματισμοί Γαλιλαίου.

1.1 Γεγονότα, συστήματα αναφοράς και η αρχή της Νευτώνειας Σχετικότητας.

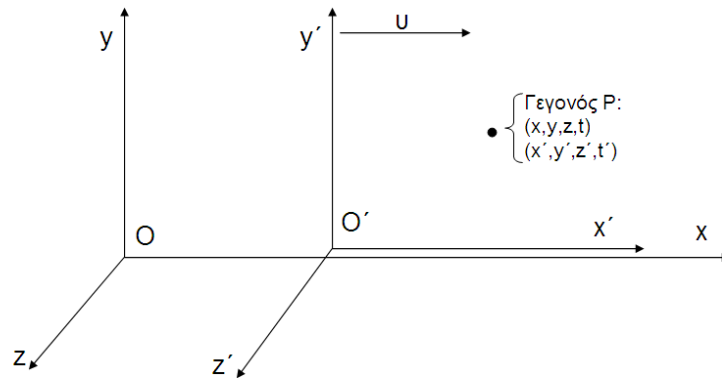
Ως **φυσικό γεγονός** ορίζεται ένα συμβάν το οποίο λαμβάνει χώρα σε ένα σημείο του χώρου μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Το γεγονός καθορίζεται πλήρως από ένα παρατηρητή, ο οποίος βρίσκεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων, με τέσσερις συντεταγμένες: τρεις χωρικές συντεταγμένες της θέσης (x, y, z) που μετράνε την απόσταση του γεγονότος από την αρχή των αξόνων και μία χρονική συντεταγμένη t την οποία ο παρατηρητής καταγράφει με το ρολόι του.

Ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων (x, y, z, t) βάσει του οποίου περιγράφουμε ένα φυσικό γεγονός ονομάζεται **Σύστημα Αναφοράς**. Ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο ισχύει ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα ονομάζεται **Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς**.

Σύμφωνα με την αρχή της **Νευτώνειας Σχετικότητας** (αρχή της σχετικότητας του Γαλιλαίου), όλοι οι νόμοι της μηχανικής είναι ίδιοι (αναλλοίωτοι) σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

1.2 Οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου

Θεωρείστε δύο παρατηρητές τον O και τον O' ο οποίος ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα v ως προς τον O κατά μήκος του κοινού τους άξονα $x-x'$, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1. Και οι δύο παρατηρητές είναι εφοδιασμένοι με ένα μέτρο ώστε να μετρούν αποστάσεις και ένα ρολόι ώστε να μετρούν τον χρόνο. Υποθέτουμε πως οι δύο παρατηρητές ρυθμίζουν τα ρολόγια τους έτσι ώστε όταν ο ένας περνά δίπλα από τον άλλον για $x = x' = 0$ τα ρολόγια τους να δείχνουν $t = t' = 0$. Τότε ένα φυσικό γεγονός P θα περιγράφεται από τις συντεταγμένες (x, y, z, t) ως προς τον O και από τις συντεταγμένες (x', y', z', t') ως προς τον O' .



Σχήμα 1.1

Οι συντεταγμένες-μετρήσεις (x, y, z, t) και (x', y', z', t') συνδέονται μεταξύ τους με τον Μετασχηματισμό Συντεταγμένων του Γαλιλαίου.

$$\begin{aligned} x &= x' + vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \quad (1.1)$$

Διαφορίζοντας τους παραπάνω μετασχηματισμούς ως προς τον χρόνο προκύπτουν οι παρακάτω Μετασχηματισμοί Ταχύτητας του Γαλιλαίου:

$$\begin{aligned} u_x &= u'_x + v \\ u_y &= u'_y \\ u_z &= u'_z \end{aligned} \quad (1.2)$$

Διαφορίζοντας τους μετασχηματισμούς ταχύτητας ως προς τον χρόνο προκύπτουν οι παρακάτω Μετασχηματισμοί Επιτάχυνσης του Γαλιλαίου:

$$\begin{aligned} a_x &= a'_x \\ a_y &= a'_y \\ a_z &= a'_z \end{aligned} \quad (1.3)$$

Η χωρική και χρονική απόσταση μεταξύ δύο γεγονότων μπορεί να δηλωθεί με $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$, όπου $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, κτλ. Οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου που συνδέουν τις αποστάσεις δύο γεγονότων είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \Delta x' + v\Delta t \\
\Delta y &= \Delta y' \\
\Delta z &= \Delta z' \\
\Delta t &= \Delta t'
\end{aligned}
\tag{1.4}$$

Αν και οι εξισώσεις (1.4) μοιάζουν πολύ με τις εξισώσεις (1.1) στην πραγματικότητα είναι κάπως πιο γενικές. Απαιτούν μονάχα ότι οι x , y και z άξονες είναι παράλληλοι προς τους x' , y' και z' άξονες αντίστοιχα, και ότι η σχετική κίνηση των συστημάτων αναφοράς είναι κατά την x διεύθυνση. Οι άξονες x και x' δεν χρειάζεται να βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Ούτε και είναι αναγκαίο οι αρχές των δύο συστημάτων συντεταγμένων να περάσουν η μία από την άλλη κατά μία ορισμένη στιγμή.

1.3 Το αναλλοίωτο μιας εξίσωσης

Το αναλλοίωτο μιας εξίσωσης η οποία περιγράφει έναν φυσικό νόμο σημαίνει πως η εξίσωση έχει την ίδια μορφή (μαθηματικό τύπο) όταν καθορίζεται από δύο διαφορετικούς παρατηρητές. Στην κλασική θεωρία οι χωρικές και χρονικές μετρήσεις δύο παρατηρητών συσχετίζονται μέσω των μετασχηματισμών του Γαλιλαίου. Έτσι εάν μια εξίσωση καθορίζεται με ένα συγκεκριμένο μαθηματικό τύπο από ένα παρατηρητή, μπορούμε να εφαρμόσουμε τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου και να υπολογίσουμε τον μαθηματικό της τύπο για τον άλλο παρατηρητή. Εάν οι δύο μαθηματικοί τύποι έχουν την ίδια μορφή τότε λέμε πως η εξίσωση είναι αναλλοίωτη (και κατά συνέπεια ο φυσικός νόμος που εκφράζει είναι αντίστοιχα αναλλοίωτος) κάτω από τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου.

Για παράδειγμα ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα γράφεται για τον πρώτο παρατηρητή ως: $\vec{F} = m\vec{a}$ ενώ για τον δεύτερο ως: $\vec{F}' = m\vec{a}'$, κατά συνέπεια είναι αναλλοίωτος κάτω από τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου. Όλοι οι νόμοι της μηχανικής είναι αναλλοίωτοι κάτω από τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου (για παράδειγμα δες τα προβλήματα 1.4.4, 1.4.5, 1.5.3 και 1.5.5). Δεν ισχύει όμως το ίδιο για τον ηλεκτρομαγνητισμό (για παράδειγμα πρόβλημα 1.5.6).

1.4 Λυμένα Προβλήματα

1.4.1 Ένας κυνηγός στο έδαφος πυροβολεί προς την βορειοανατολική κατεύθυνση και χτυπάει ένα ελάφι 350m μακριά του. Η σφαίρα ταξιδεύει με ταχύτητα 700m/sec. Τη στιγμή που η σφαίρα φεύγει από το όπλο του κυνηγού ένα αεροπλάνο πετάει ακριβώς από πάνω του σε ύψος 5km και κατευθύνεται ανατολικά με ταχύτητα 170m/sec. Όταν η σφαίρα χτυπά το ελάφι, ποιες είναι οι συντεταγμένες όπως προσδιορίζονται από ένα παρατηρητή στο αεροπλάνο;

Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου έχουμε:

$$\begin{aligned}t' &= t = \frac{350 \text{ m}}{700 \text{ m/sec}} = 0.5 \text{ sec} \\x' &= x - vt = (350\text{m}) \cdot \cos(45^\circ) - (170\text{m/sec}) \cdot 0.5 \text{ sec} = 162.48\text{m} \\y' &= y = (350\text{m}) \cdot \sin(45^\circ) = 247.48\text{m} \\z' &= z - h = 0 - 5000\text{m} = -5000\text{m}\end{aligned}$$

1.4.2 Ένα ραδιενεργό υλικό, το οποίο βρίσκεται σε ηρεμία στο σύστημα του εργαστηρίου, εκπέμπει δύο ηλεκτρόνια σε αντίθετες διευθύνσεις. Το ένα ηλεκτρόνιο κινείται με ταχύτητα 0.6c και το άλλο με ταχύτητα 0.7c ως προς έναν παρατηρητή ακίνητο στο σύστημα του εργαστηρίου. Ποια θα είναι η ταχύτητα του ενός ηλεκτρονίου ως προς το άλλο σύμφωνα με τους κλασικούς μετασχηματισμούς της ταχύτητας;

Ας υποθέσουμε ότι ο παρατηρητής Ο είναι ο ακίνητος παρατηρητής στο σύστημα του εργαστηρίου και ο παρατηρητής Ο' είναι ακίνητος ως προς το ηλεκτρόνιο το οποίο κινείται προς την θετική κατεύθυνση με ταχύτητα 0.6c. Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς ταχύτητας του Γαλιλαίου έχουμε:

$$u'_x = u_x - v = -0.7c - 0.6c = -1.3c$$

Αυτό το πρόβλημα αποδεικνύει ότι σύμφωνα με τους κλασικούς μετασχηματισμούς της ταχύτητας είναι δυνατές ταχύτητες μεγαλύτερες από αυτή του φωτός, πράγμα το οποίο δεν είναι σύμφωνο με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας.

1.4.3 Ένα βαγόνι μήκους L κινείται κατά την διεύθυνση του άξονα των x με ταχύτητα v. Ένας άνθρωπος περπατά από το μπροστινό μέρος του βαγονιού στο πίσω μέσα σε χρόνο T. Ποια είναι η μέση ταχύτητά του στο σύστημα αναφοράς του τραίνου και ποια στο σύστημα αναφοράς του εδάφους; Ποια απόσταση έχει διανύσει ως προς το σύστημα του εδάφους;

Στο σύστημα αναφοράς του τραίνου μπορούμε να γράψουμε:

$$x'_1 = L, \quad x'_2 = 0, \quad \Delta x = -L, \\ t'_1 = 0, \quad t'_2 = T, \quad \Delta t' = T$$

Στο σύστημα του τραίνου η μέση συνιστώσα της ταχύτητας του ανθρώπου είναι:

$$\bar{v}'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = -\frac{L}{T}$$

Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου βρίσκουμε για το σύστημα αναφοράς του εδάφους:

$$\Delta x = \Delta x' + v\Delta t' = -L + vT$$

$$\Delta t = \Delta t' = T$$

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\left(\frac{L}{T}\right) + v$$

1.4.4 Δύο σώματα κινούνται και συγκρούονται μετωπικά κατά τον άξονα των x . Το πρώτο σώμα έχει μάζα $m_1 = 3\text{kg}$ και ταχύτητα $v_1 = 4\text{m/sec}$ ενώ το δεύτερο έχει μάζα $m_2 = 1\text{kg}$ και ταχύτητα $v_2 = -3\text{m/sec}$. Μετά την σύγκρουση ένας παρατηρητής ακίνητος ως προς το έδαφος βρίσκει πως το δεύτερο σώμα κινείται με ταχύτητα $v_2^* = 3\text{m/sec}$. (α) Υπολογίστε την ταχύτητα v_1^* του πρώτου σώματος μετά την σύγκρουση καθώς και την αρχική και τελική ορμή του συστήματος. (β) Ένας δεύτερος παρατηρητής κινείται με ταχύτητα $v = 2\text{m/sec}$ ως προς το έδαφος. Πόση είναι η ορμή σύμφωνα με αυτόν πριν και μετά την σύγκρουση;

(α) Λόγω της αρχής διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$\text{Αρχική Ορμή Συστήματος} = \text{Τελική Ορμή Συστήματος}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1^* + m_2 v_2^*$$

Με αντικατάσταση των τιμών βρίσκουμε ότι : $v_1^* = 2\text{m/sec}$ και $p_{ολ} = 9\text{kg} \cdot \text{m/sec}$

(β) Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου βρίσκουμε:

$$v'_1 = v_1 - v = 4\text{m/sec} - 2\text{m/sec} = 2\text{m/sec}$$

$$v'_2 = v_2 - v = -3\text{m/sec} - 2\text{m/sec} = -5\text{m/sec}$$

$$v'^*_1 = v_1^* - v = 2\text{m/sec} - 2\text{m/sec} = 0\text{m/sec}$$

$$v'^*_2 = v_2^* - v = 3\text{m/sec} - 2\text{m/sec} = 1\text{m/sec}$$

$$(\text{Αρχική Ορμή})' = m_1 v_1' + m_2 v_2' = 1 \text{ kgr} \cdot \text{m/s}$$

$$(\text{Τελική Ορμή})' = m_1 v_1'^* + m_2 v_2'^* = 1 \text{ kgr} \cdot \text{m/s}$$

Παρατηρούμε πως ο δεύτερος παρατηρητής μετρά διαφορετική ολική ορμή αλλά και γιαυτόν ισχύει ο νόμος της διατήρησης της ορμής.

1.4.5 Θεωρείστε ένα σώμα με μάζα m το οποίο είναι προσδεμένο σε ένα ελατήριο σταθεράς k . Το σώμα κινείται σε μια οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Να δείξετε ότι οι εξισώσεις κίνησής του είναι οι ίδιες όσον αφορά ένα παρατηρητή ο οποίος είναι ακίνητος σε σχέση με την επιφάνεια και έναν παρατηρητή ο οποίος κινείται με ταχύτητα v κατά μήκος της διεύθυνσης του ελατηρίου.

Η εξίσωση κίνησης του σώματος για τον ακίνητο παρατηρητή είναι $F = ma$, ή

$$-k(x - x_0) = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1)$$

Για να υπολογίσουμε την εξίσωση κίνησης του σώματος για τον κινούμενο παρατηρητή χρησιμοποιούμε τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου από τους οποίους έχουμε:

$$x = x' + vt' \quad x_0 = x'_0 + vt' \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x'}{dt'^2}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω στην (1) έχουμε:

$$-k(x' - x'_0) = m \frac{d^2 x'}{dt'^2} \quad (2)$$

Οι εξισώσεις (1) και (2) έχουν την ίδια μορφή, πράγμα που σημαίνει πως η εξίσωση κίνησης είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου.

1.5 Προβλήματα

1.5.1 Γενικεύστε τις εξισώσεις μετασχηματισμού του Γαλιλαίου, ώστε να συμπεριλάβετε την περίπτωση μιας αυθαίρετης διεύθυνσης κίνησης του κινούμενου συστήματος αναφοράς και επίσης την δυνατότητα ότι οι δύο αρχές συντεταγμένων δεν συμπίπτουν για $t=0$. Συμπύξτε τρεις από τις εξισώσεις αυτές σε μια ανυσματική εξίσωση.

1.5.2 Ένας παρατηρητής βρίσκεται μέσα σε μια βάρκα και κινείται ανατολικά με ταχύτητα 5 m/sec. Την στιγμή κατά την οποία η βάρκα περνάει μπροστά από έναν ακίνητο παρατηρητή ο οποίος βρίσκεται στην όχθη, αυτός ρίχνει μια πέτρα με κατεύθυνση τον βορά. Η πέτρα πέφτει στο νερό 6 sec αργότερα σε απόσταση 30 m από την όχθη. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της πτώσης της πέτρας στο νερό σύμφωνα με τον παρατηρητή πάνω στη βάρκα. (Απάντηση: $(x,y,z,t)=(-30\text{ m}, 30\text{ m}, 0\text{ m}, 6\text{ sec})$).

1.5.3 Μία μπάλα βάρους 1 kgρ κινείται προς τον βορά με ταχύτητα 3 m/sec και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με μια δεύτερη ίδια μπάλα η οποία βρίσκεται σε ηρεμία. Υπολογίστε (α) στο σύστημα του εργαστηρίου και (β) ως προς ένα παρατηρητή ο οποίος κινείται βόρεια με ταχύτητα 1.5 m/sec, την ορμή και την ολική κινητική ενέργεια του συστήματος πριν και μετά την σύγκρουση.

(Απάντηση: (α) $p_{\text{tot}} = 3\text{kg}\cdot\text{m/sec}$ $E_{\text{κιν}} = 4.5\text{J}$ (β) $p_{\text{tot}} = 0\text{kg}\cdot\text{m/sec}$ $E_{\text{κιν}} = 2.25\text{J}$)

1.5.4 Ένα καμπριολέ αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 30m/sec. Ένα αγόρι μέσα στο αυτοκίνητο ρίχνει μια μπάλα προς τα πάνω με ταχύτητα 7m/sec. Να γράψετε την εξίσωση κίνησης της μπάλας σύμφωνα με τον (α) με το αγόρι και (β) με έναν ακίνητο ως προς τον δρόμο παρατηρητή. Δίνεται $g=10\text{m/sec}^2$.

(Απάντηση: (α) $y' = 7t' - 5t'^2$ $x' = z' = 0$, (β) $y = 7t - 5t^2$ $x = 30t$ $z = 0$)

1.5.5 Το σωματίο 1 έλκεται από το σωματίο 2 με μια δύναμη $\vec{F}_1$ η οποία εξαρτάται μόνο από την μετατόπιση $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ μεταξύ των δύο σωματίων. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα εφαρμοζόμενος στο σωματίο 1 μπορεί να γραφεί ως:

$$\vec{F}_1(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = m_1 \vec{a}_1$$

Δείξτε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.

1.5.6 Δείξτε ότι η ηλεκτρομαγνητική κυματική εξίσωση,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.

1.5.7 Ένα σύστημα αναφοράς με καρτεσιανούς άξονες x, y, z είναι ακίνητο. Ένα άλλο σύστημα με καρτεσιανούς άξονες x', y', z' κινείται κατά την θετική κατεύθυνση του x με σταθερή επιτάχυνση a_0 . Κατά την χρονική στιγμή $t = 0$, οι άξονες των δύο συστημάτων συμπίπτουν και η ταχύτητα του δευτέρου συστήματος σε σχέση με το πρώτο είναι v_0 . Να γράψετε εξισώσεις μετασχηματισμού ανάλογες με αυτές του μετασχηματισμού του Γαλιλαίου για τη θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση.