

Σύγχρονη Φυσική Ι : Θέματα Σχετικότητας (22/1/2010)

Θέμα 1°

α.(1.5 μονάδες) Ένας κόκκινος λαμπτήρας ανάβει στη θέση Α με συντεταγμένες $x_A = 3\text{ m}$ και $t_A = 1 \times 10^{-9}\text{ sec}$, και ένας μπλε λαμπτήρας ανάβει στη θέση Β με συντεταγμένες $x_B = 5\text{ m}$ και $t_B = 9 \times 10^{-9}\text{ sec}$, όπως καθορίζονται από έναν ακίνητο παρατηρητή Ο. Ένας παρατηρητής Ο' κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος του κοινού άξονα $x-x'$. Σύμφωνα με τον Ο' οι δύο λαμπτήρες ανάβουν στην ίδια χωρική θέση. (α) Βρείτε την σχετική ταχύτητα των δύο παρατηρητών. (β) Βρείτε την κοινή χωρική θέση των λαμπτήρων σύμφωνα με τον Ο' (γ) Σε ποια χρονική στιγμή ανάβει το κόκκινο φως σύμφωνα με τον Ο' ;

β.(1 μονάδα) Ένα ηλεκτρόνιο κινείται στο εργαστήριο με ταχύτητα $0.6c$, ενώ ένας παρατηρητής κινείται με ταχύτητα $0.8c$ στη διεύθυνση κίνησης του ηλεκτρονίου. Υπολογίστε την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου σύμφωνα με τον παρατηρητή.

Δίνεται: $m_e = 0.511\text{ MeV}/c^2$. Εκφράστε την απάντησή σας σε μονάδες MeV .

Θέμα 2°

α. Τα κβάζαρ συχνά χαρακτηρίζονται από μια “παράμετρο ερυθρής μετατόπισης” Z που ορίζεται ως $Z = \Delta\lambda/\lambda_0$, όπου λ_0 είναι το μήκος κύματος μιας ορισμένης φασματικής γραμμής που παρατηρείται στο φως που εκπέμπεται από μια γήινη πηγή και $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ είναι η μετατόπιση του μήκους κύματος της γραμμής αυτής που παρατηρείται στο φως ενός κβάζαρ. Δείξτε ότι αν η ερυθρή μετατόπιση του κβάζαρ είναι μια μετατόπιση Doppler, η ταχύτητα απομακρύνσεώς του συνδέεται με το Z σύμφωνα με τον τύπο:

$$\frac{v}{c} = \frac{(Z+1)^2 - 1}{(Z+1)^2 + 1}$$

β. Μία μελανή οπή χαρακτηρίζεται από ακτίνα Schwarzschild $R = 1000\text{ m}$. (α) Υπολογίστε τη μάζα της μελανής οπής. (β) Υπολογίστε το βάρος ενός σώματος με μάζα $m = 70\text{ Kgr}$ το οποίο βρίσκεται ακριβώς στον ορίζοντα των γεγονότων της μελανής οπής.

Δίνεται

$$\begin{aligned}x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x' + vt') \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \\u_y &= \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)} \\u_z &= \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)}\end{aligned}$$

$$f = f_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos(\theta)}, \quad R = \frac{2GM}{c^2}, \quad G = (6.67 \times 10^{-11}) \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ sec}^{-2}$$

Απαντήσεις:

Θέμα 1:

α) (α) Είναι:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0 \Rightarrow v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\text{m}}{8 \times 10^{-9} \text{ sec}} = 2.5 \times 10^8 \text{ m/sec}$$

(β) Μπορούμε να υπολογίσουμε πχ το x_A' :

$$x_A' = \frac{x_A - vt_A}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{3\text{m} - (2.5 \times 10^8 \text{ m/sec})(1 \times 10^{-9} \text{ sec})}{\sqrt{1-(2.5/3)^2}} = 4.97 \text{ m}$$

(γ) Πρέπει να υπολογίσουμε το t_A'

$$t_A' = \frac{t_A - \frac{v}{c^2} x_A}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dots = -1.33 \times 10^{-8} \text{ sec}$$

β) Η ταχύτητα του ηλεκτρονίου ως προς τον κινούμενο παρατηρητή είναι:

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = \frac{0.6c - 0.8c}{1 - 0.6 \cdot 0.8} = -0.38c \text{ και } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1.08$$

άρα

$$K = (\gamma - 1)m_e c^2 = 0.041 \text{ MeV}$$

Θέμα 2:

α) Έχουμε:

$$Z = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - \lambda_0}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \Rightarrow$$
$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = (Z+1)^2 \Rightarrow 1+\beta = (Z+1)^2 - (Z+1)^2 \beta \Rightarrow \beta[(Z+1)^2 + 1] = (Z+1)^2 - 1 \Rightarrow$$
$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{(Z+1)^2 - 1}{(Z+1)^2 + 1}$$

β) (α) Έχουμε για τη μάζα:

$$R = \frac{2GM}{c^2} \Rightarrow M = \frac{Rc^2}{2G} = \frac{1000\text{m} \times (3 \times 10^8 \text{ m/sec})^2}{2(6.67 \times 10^{-11})\text{m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ sec}^{-2}} = 0.67 \times 10^{30} \text{ kg}$$

(β) Το βάρος είναι η βαρυτική δύναμη που ασκεί η μελανή οπή πάνω στο σώμα:

$$F = G \frac{Mm}{R^2} = (6.67 \times 10^{-11})\text{m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ sec}^{-2} \frac{0.67 \times 10^{30} \text{ kg} \times 70\text{kg}}{(1000\text{m})^2} = 3.13 \times 10^{15} \text{ N}$$