

Σύγχρονη Φυσική Ι : Θέματα Σχετικότητας (11/9/2009)

Θέμα 1^ο

α) Υποθέστε ότι ένας παρατηρητής Ο προσδιορίζει ότι δύο γεγονότα απέχουν χωρικά 3.6×10^8 m και συμβαίνουν σε χρονική διαφορά 2 sec. Ποιος είναι ο ιδιοχρόνος μεταξύ των δύο αυτών γεγονότων;

β) Ένα φανταστικό σχετικιστικό βαγόνι τραίνου, όταν είναι ακίνητο, έχει μήκος 14m. Για να μετρήσουν το μήκος του καθώς κινείται με 99% της ταχύτητας του φωτός, οι παρατηρητές του εδάφους σημειώνουν τη θέση της αρχής του βαγονιού σε μια δεδομένη χρονική στιγμή και τη θέση του τέλους του κατά την ίδια χρονική στιγμή. (α) Δείξτε ότι οι παρατηρητές που βρίσκονται πάνω στο τραίνο θεωρούν ότι πέρασαν 46 nsec μεταξύ των δύο αυτών μετρήσεων. (β) Ποιο είναι το μήκος του κινούμενου βαγονιού που μετρούν οι παρατηρητές στο έδαφος.

Θέμα 2^ο

Ένα ηλεκτρόνιο έχει ταχύτητα $0.75c$. Βρείτε την ταχύτητα ενός πρωτονίου που έχει (α) την ίδια κινητική ενέργεια με το ηλεκτρόνιο και (β) την ίδια ορμή με το ηλεκτρόνιο.

Προσοχή: Στη λύση σας να χρησιμοποιήσετε μόνο μονάδες MeV ενώ την ταχύτητα του πρωτονίου να την εκφράσετε σε μονάδες της ταχύτητας του φωτός όπως πχ η ταχύτητα του ηλεκτρονίου που σας δίνεται.

Δίνονται:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ \Delta y &= \Delta y' \\ \Delta z &= \Delta z' \\ \Delta t &= \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'\right)\end{aligned}$$

$$m_e = 0.511 MeV/c^2$$

$$m_p = 939 MeV/c^2$$

Απαντήσεις:

Θέμα 1:

α) Υπάρχει ένας δεύτερος παρατηρητής O' , ο οποίος κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με τον O , και που παρατηρεί πως τα δύο γεγονότα λαμβάνουν χώρα στην ίδια χωρική θέση, δηλαδή $\Delta x' = 0$. Τότε ο ιδιοχρόνος μεταξύ των δύο γεγονότων είναι το χρονικό διάστημα $\Delta t'$ σύμφωνα με τον O' . Έχουμε:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 0 = \frac{(3.6 \times 10^8 \text{ m}) - v(2 \text{ sec})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v = 1.8 \times 10^8 \text{ m/sec} = 0.6c$$

και

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(2 \text{ sec}) - \frac{0.6 \times 3.6 \times 10^8 \text{ msec}}{3 \times 10^8 \text{ m/sec}}}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = 1.6 \text{ sec}$$

β) Για τους παρατηρητές στο έδαφος έχουμε $\Delta t = 0$ και $\Delta x = ?$ ενώ για τους παρατηρητές στο τρέινο $\Delta t' = ?$ και $\Delta x' = 14 \text{ m}$

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμούς Lorentz και έχουμε:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} = \Delta x' \sqrt{1 - (0.99)^2} \Rightarrow \Delta x = 1.97 \text{ m}$$

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.99)^2}} \left(0 - \frac{0.99}{3 \times 10^8 \text{ m/sec}} 1.97 \text{ m} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta t' = -4.6 \times 10^{-8} \text{ sec} = -46 \text{ nsec}$$

Θέμα 2:

α) Έχουμε πως $Z = \Delta\lambda/\lambda_0$, $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ και $\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ (πηγή και ο παρατηρητής απομακρύνονται).

Άρα:

$$Z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - \lambda_0}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = (z+1)^2 \Rightarrow 1+\beta = (z+1)^2 - (z+1)^2 \beta \Rightarrow$$

$$\beta[(z+1)^2 + 1] = (z+1)^2 - 1 \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}$$

β) (α) Έχουμε για την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου:

$$K_e = E_e - m_e c^2 = \gamma m_e c^2 - m_e c^2 = (\gamma - 1)m_e c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-0.75^2}} - 1 \right) \times 0.511 \text{ MeV} = 0.26 \text{ MeV}$$

Για την ταχύτητα του πρωτονίου έχουμε:

$$K_p = E_p - m_p c^2 = (\gamma - 1)m_p c^2 \Rightarrow \gamma - 1 = \frac{K_p}{m_p c^2} = \frac{0.26 \text{ MeV}}{939 \text{ MeV}} \Rightarrow \gamma = 1.00028$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1.00028 \Rightarrow \dots \Rightarrow \beta = 0.024$$

(β) Έχουμε για την ορμή του ηλεκτρονίου:

$$p_e = \gamma m_e v = \gamma m_e c^2 \frac{v}{c^2} = \dots = 0.58 \text{ MeV} / c$$

Για την ταχύτητα του πρωτονίου έχουμε:

$$p_p = \gamma m_p v = \frac{m_p v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \dots \Rightarrow v^2 = \frac{c^2}{\frac{m_p^2 c^4}{p^2 c^2} + 1} = \frac{c^2}{\frac{939^2 \text{ MeV}^2}{0.58^2 \frac{\text{MeV}^2}{c^2} c^2} + 1} = 3.8 \times 10^{-7} c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = 6.18 \times 10^{-4} c$$