

Σύγχρονη Φυσική Ι : Θέματα Σχετικότητας (16/2/2009)

Θέμα 1^ο

α)(1.5 μονάδες) Μια ράβδος μήκους L_0 κινείται με ταχύτητα v κατά την οριζόντια διεύθυνση x , σε σχέση με ένα ακίνητο παρατηρητή ο οποίος βρίσκεται στην αρχή των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων yOx . Η ράβδος, στο σύστημα ηρεμίας της $y'O'x'$, σχηματίζει γωνία θ_0 με τον οριζόντιο άξονα x' .

1. Αποδείξτε ότι το μήκος της ράβδου όπως αυτό μετρείται από τον ακίνητο παρατηρητή δίνεται από την σχέση: $L = L_0 \left[1 - (v^2 / c^2) \cos^2 \theta_0 \right]^{1/2}$.
2. Αποδείξτε ότι η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με τον άξονα x δίνεται από την έκφραση $\tan \theta = \gamma \tan \theta_0$.

β)(1 μονάδα) Δύο πίδακες ύλης εκτοξεύονται από το κέντρο ενός ραδιογαλαξία σε αντίθετες κατευθύνσεις. Η ταχύτητα των δύο πιδάκων σε σχέση με τον γαλαξία είναι $0.75c$. Υπολογίστε την ταχύτητα του ενός πίδακα σε σχέση με τον άλλο.

Θέμα 2^ο

α) Ένα πιόνιο π^+ με μάζα ηρεμίας $140 \text{ MeV}/c^2$ δημιουργείται σε ύψος 100 Km από την επιφάνεια της θάλασσας, μέσα στη ατμόσφαιρα. Το πιόνιο έχει ολική ενέργεια $1.5 \times 10^5 \text{ MeV}$ και κινείται προς τα κάτω. Εάν διασπαστεί $2 \times 10^{-8} \text{ sec}$ μετά την δημιουργία του, όπως υπολογίζεται στο σύστημα ηρεμίας του, σε ποιο ύψος πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας λαμβάνει χώρα η διάσπαση;

β) Αποδείξτε ότι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να εκφραστεί σε σχετικιστική μορφή ως εξής:

$$F = m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-3/2} \frac{du}{dt}$$

Όπου m_0 είναι η μάζα ηρεμίας ενός αντικειμένου και u η ταχύτητά του.

Δίνονται:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}$$
$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right)}$$
$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right)}$$

Απαντήσεις:

Θέμα 1:

α) Στο κινούμενο σύστημα έχουμε:

$$L'_x = L_0 \cos \theta_0$$

$$L'_y = L_0 \sin \theta_0$$

Στο ακίνητο σύστημα είναι:

$$L_x = \frac{L'_x}{\gamma} = \frac{L_0 \cos \theta_0}{1/\sqrt{1-v^2/c^2}} = L_0 \cos \theta_0 \sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$L_y = L'_y = L_0 \sin \theta_0$$

Άρα :

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} = \sqrt{L_0^2 \cos^2 \theta_0 (1-v^2/c^2) + L_0^2 \sin^2 \theta_0} = \dots = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta_0}$$

Για τη γωνία ράβδου-άξονα x έχουμε:

$$\tan \theta = \frac{L_y}{L_x} = \frac{L_0 \sin \theta_0}{L_0 \cos \theta_0 \sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\tan \theta_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma \tan \theta_0$$

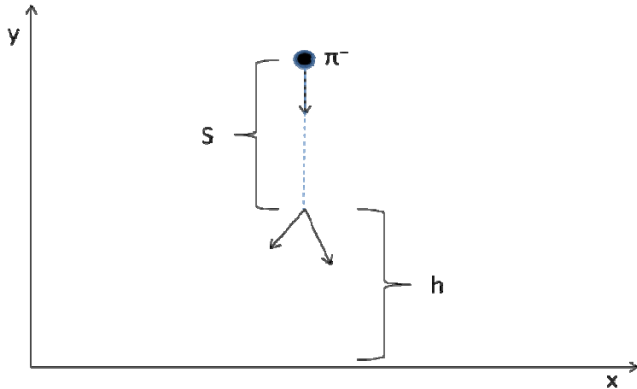
β) Έχουμε: Ο=> Γαλαξίας
 Ο'=> πίδακας 1
 Σώμα => πίδακας 2

Ο πίδακας 2 έχει u ως προς Ο και u' ως προς Ο'. Ψάχνουμε την u' . Έχουμε

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} = \frac{v-(-v)}{1-\frac{v(-v)}{c^2}} = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2 \times 0.75c}{1+\frac{0.75 \times 0.75c^2}{c^2}} \Rightarrow u' = 0.96c$$

Θέμα 2:

α)



Έχουμε πως: $S = \Delta t v$

Είναι όμως:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

$$E_{o\lambda} = \gamma m_{\pi} c^2 \Rightarrow \gamma = \frac{E_{o\lambda}}{m_{\pi} c^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \dots \Rightarrow v = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} c$$

Άρα:

$$S = \Delta t v = \gamma \Delta t' v \Rightarrow$$

$$S = \frac{E_{o\lambda}}{m_{\pi} c^2} \Delta t' \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} c = \frac{1.5 \times 10^5}{140} \times 2 \times 10^{-8} \times \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{1.5 \times 10^5}{140}\right)^2}} \times 3 \times 10^8 m = 6428 m$$

$$\text{Άρα: } h = 100 Km - 6.4 Km = 93.4 Km$$

β) Έχουμε πως: $p = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - (u^2 / c^2)}}$ άρα είναι :

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{m_0 \frac{du}{dt} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} - m_0 u \frac{1}{2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(-\frac{2u}{c^2}\right) \frac{du}{dt}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \Rightarrow$$

$$F = \frac{m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} + m_0 \frac{u^2}{c^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{du}{dt}$$

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με το $\sqrt{1 - (u^2 / c^2)}$ και έχουμε:

$$F = \frac{m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + m_0 \frac{u^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{du}{dt} \Rightarrow \dots \Rightarrow F = m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2} \frac{du}{dt}$$