



Ο Πυρήνας του Ατόμου

Σκοποί:

15/06/12

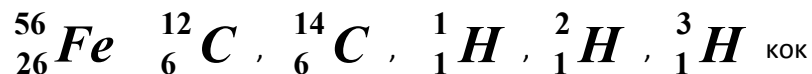
- I. Να δώσει μία εισαγωγική περιγραφή του πυρήνα του ατόμου, και της ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σωματίδιο για να παραμείνει δέσμιο μέσα στον πυρήνα.
- II. Να εισάγει την έννοια της ενέργειας σύνδεσης και της πυρηνικής σταθερότητας.
- III. Να εισάγει το πυρηνικό σπίν.

Οι διαστάσεις του πυρήνα

Οι πυρήνες των ατόμων αποτελούνται από πρωτόνια και νετρόνια. Τα πρωτόνια είναι σωματίδια με μάζα ίση με $m_p c^2 = 938.27 \text{ MeV}$ και θετικό φορτίο ίσο με την απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου, ενώ τα νετρόνια είναι ουδέτερα σωματίδια με μάζα $m_n c^2 = 939.56 \text{ MeV}$ (λίγο μεγαλύτερη από αυτή των πρωτονίων). Ο συνολικός αριθμός των πρωτονίων και των νετρονίων ενός πυρήνα ονομάζεται **μαζικός αριθμός** και συμβολίζεται με το γράμμα **A**. Ο αριθμός των πρωτονίων ενός πυρήνα ονομάζεται **ατομικός αριθμός** και συμβολίζεται με το γράμμα **Z**. Έτσι για να περιγράψουμε κάθε πυρήνα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό



όπου το **X** είναι το χημικό σύμβολο που αντιστοιχεί σε κάθε ατομικό αριθμό **Z**. Έτσι έχουμε ένα αρκετά μεγάλο αριθμό πυρήνων όπως π. χ.



Ο ατομικός αριθμός **Z** του πυρήνα καθορίζει τις χημικές ιδιότητες του αντίστοιχου ατόμου. Πυρήνες με ίδιο **Z** αλλά διαφορετικό **A** ονομάζονται **ισοτοπικοί (ισότοπα)** και πυρήνες με το ίδιο **A** αλλά διαφορετικό **Z** ονομάζονται **ισοβαρείς**. Πρωτόνια και νετρόνια ονομάζονται με μία λέξη **νουκλεόνια**.

Η ηλεκτρομαγνητική δύναμη μεταξύ πρωτονίων είναι αποσπική και τα νετρόνια είναι ουδέτερα. Συνεπώς προκύπτει το ερώτημα για το τι κρατά τα πρωτόνια και τα νετρόνια δέσμια στον πυρήνα. Προφανώς πρέπει να είναι μία νέα αλληλεπίδραση η οποία δεν εξαρτάται από το φορτίο.



Η αλληλεπίδραση αυτή είναι η **ισχυρή πυρηνική αλληλεπίδραση** και η παρουσία της έγινε αισθητή την ίδια περίοδο με την ανακάλυψη του πυρήνα.

Το μέγεθος ενός πυρήνα είναι τις τάξης των $10 \text{ fm} = 10^{-14} \text{ m}$, τρεις τάξεις μεγέθους μικρότερο του ατόμου το οποίο είναι περίπου $10^{-10} \text{ m} = 0.1 \text{ nm}$.

Στο Σχήμα 1 φαίνονται δύο πιθανά μοντέλα για την κατανομή του φορτίου ενός πυρήνα σαν συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο του.

Μοντέλο 1:

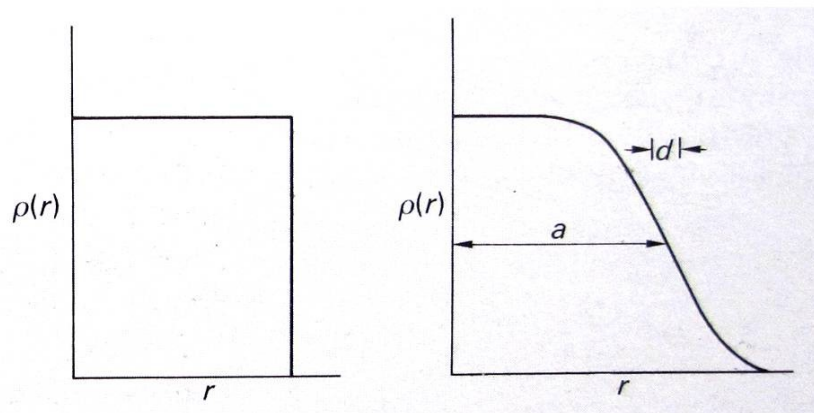
$$\rho(r) = \rho_0 \quad r \leq a$$

$$\rho(r) = 0 \quad r > a$$

Μοντέλο 2 (Saxon-Woods):

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-a}{d}}}$$

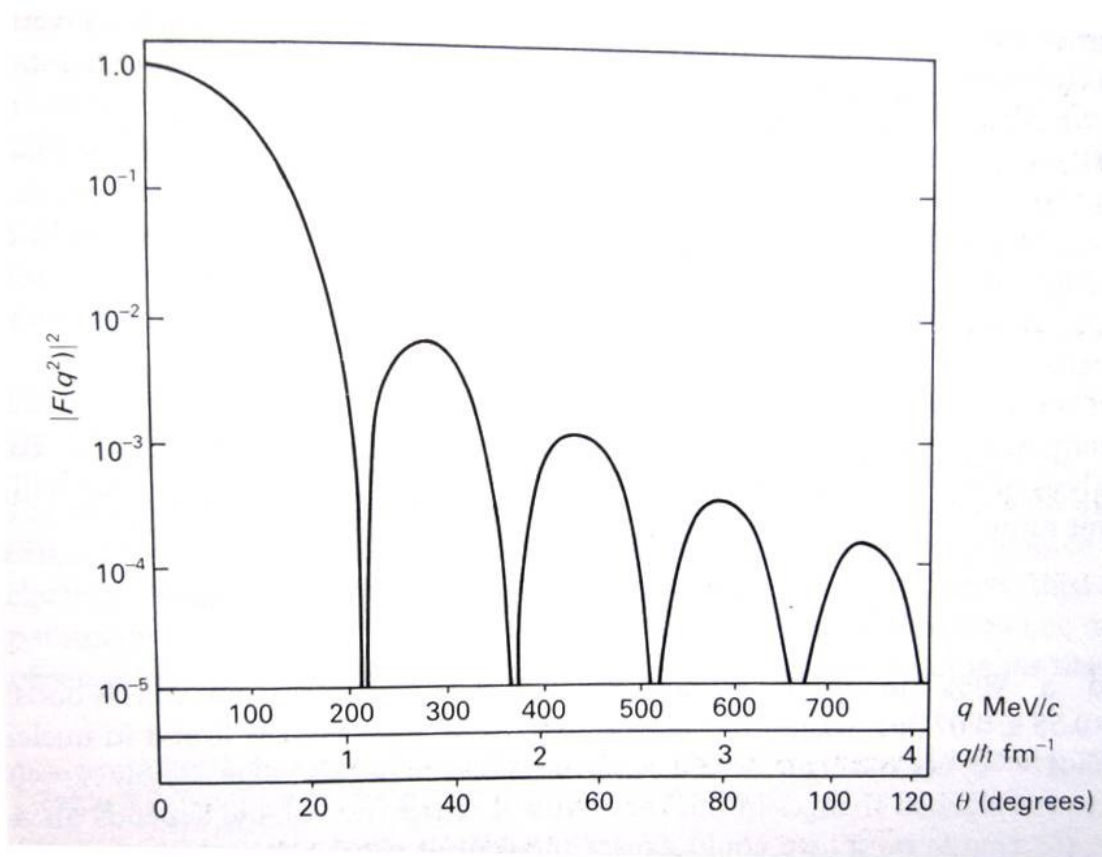
Προφανώς το Μοντέλο 1 είναι ιδιαίτερα απλοϊκό και θα περιγράψουμε πώς μπορεί να ελεγχθεί η ισχύς το Μοντέλου Saxon-Woods.



Σχήμα 1: Δύο μοντέλα της κατανομής του φορτίου του πυρήνα.



Στο Σχήμα 2 δείχνουμε τα αποτελέσματα θεωρητικών υπολογισμών για σκέδαση Rutherford από ηλεκτρόνια με κινητική ενέργεια **450 MeV** από πυρήνα με κατανομή φορτίου Saxon-Woods για παράμετρο **$a = 4.1 \text{ fm}$** . Η ποσότητα στον άξονα y είναι ανάλογη της διαφορικής ενεργού διατομής και δίνεται σαν συνάρτηση της μεταφοράς ορμής από τα ηλεκτρόνια στον πυρήνα (άξονας x) η οποία είναι συνάρτηση της γωνίας σκέδασης θ .

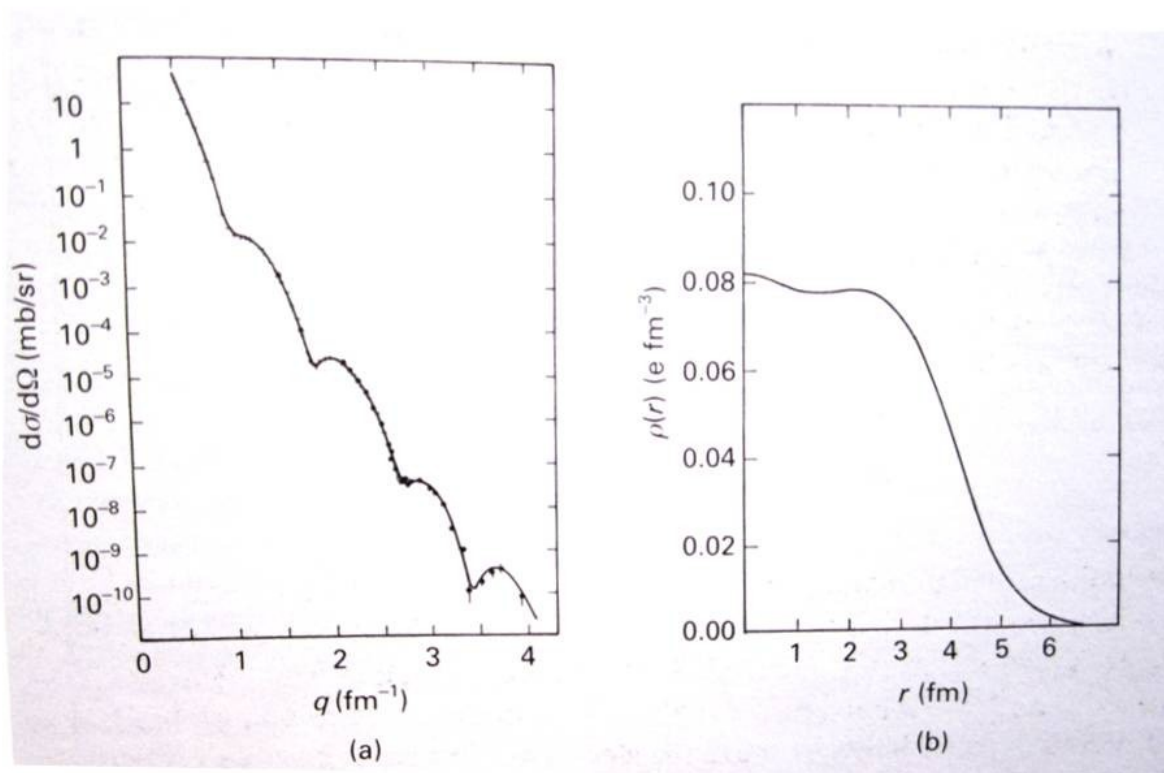


Σχήμα 2: Θεωρητικοί υπολογισμοί για το μοντέλο Saxon-Woods.

Λόγο της κυματικής φύσης των ηλεκτρονίων παρατηρούμε φαινόμενο περίθλασης ανάλογο με αυτό που παρατηρούμε στο εργαστήριο οπτικής όταν το φως πέσει πάνω σε ένα δίσκο.



Πειραματικά αποτελέσματα σκέδασης από ηλεκτρόνια με κινητική ενέργεια **450 MeV** από πυρήνες $^{58}_{28}\text{Ni}$ δίνονται στο Σχήμα 3 καθώς και η ανακατασκευή, βάση αυτών, του μοντέλου Saxon-Woods.



Σχήμα 3: Μετρήσεις σκέδασης ηλεκτρονίων με κινητική ενέργεια 450 MeV από νικέλιο (αριστερά). Η κατανομή του πυρηνικού φορτίου που εξάγεται από σύγκριση των μετρήσεων με τη θεωρία (δεξιά).

Παρατηρούμε ότι οι μετρήσεις, αν και όχι με μεγάλη ακρίβεια, συμφωνούν με τους θεωρητικούς υπολογισμούς και συγκρίνοντας τους με τα δεδομένα μπορούμε να ανακατασκευάσουμε την κατανομή φορτίου του πυρήνα που φαίνεται στο Σχήμα 3 (δεξιά). Από τέτοιου είδους μετρήσεις καταλήγουμε ότι ο πυρήνας προσεγγιστικά είναι σαν μία σφαίρα με ακτίνα

$$R = r_0 A^{1/3} \quad r_0 = 1.2 \text{ fm} \quad (\text{όπου } A \text{ ο μαζικός αριθμός})$$



Άσκηση 1: Υπολογίστε την πυκνότητα. Η μάζα ενός νουκλεονίου είναι $m_N = 1.67 \times 10^{-27} \text{ Kgr}$.

Λύση:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A \quad (1)$$

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (2)$$

και από (1) και (2) έχουμε ότι

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{m_N A}{\frac{4}{3} \pi r_0^3 A} = \frac{3m_N}{4\pi r_0^3} = \frac{3 \times 1.67 \times 10^{-27} \text{ Kgr}}{4\pi (1.2 \times 10^{-15})^3 \text{ m}^3} = 2.3 \times 10^{17} \frac{\text{Kgr}}{\text{m}^3}$$

Άσκηση 2: Ας υποθέσουμε ότι βομβαρδίζουμε πυρήνες ${}^{12}_6\text{C}$ με θετικά πιόνια π^+ ορμής $p = 40 \text{ MeV}/c$ με παράμετρο πρόσπτωσης ίση με μηδέν. Τα π^+ πιόνια έχουν μάζα ίση με $m_{\pi^+} = 140 \text{ MeV}/c^2$. Πόσο κοντά θα φτάσουν τα π^+ στον πυρήνα του ${}^{12}_6\text{C}$ πριν η αποσπτική δύναμη Coulomb τα εξαναγκάσει να γυρίσουν πίσω ;

Λύση:

Ας υποθέσουμε η μικρότερη απόσταση των πιονίων από τον πυρήνα είναι r_{min} . Στο σημείο αυτό τα πιόνια έχουν μόνο δυναμική ενέργεια η οποία ισούται με

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r_{min}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{6\hbar c}{\hbar c r_{min}} \quad (1)$$

Η κινητική τους ενέργεια στο σημείο αυτό είναι ίση με μηδέν γιατί είναι ακριβώς το σημείο που γυρίζουν πίσω.

Αρκετά μακριά από τον πυρήνα τα πιόνια έχουν μόνο κινητική ενέργεια καθότι δεν αισθάνονται το πεδίο Coulomb του πυρήνα. Η κινητική ενέργεια των πιονίων με ορμή p είναι

$$KE = E - m_{\pi^+} c^2 = \sqrt{(pc)^2 + m_{\pi^+}^2 c^4} - m_{\pi^+} c^2 \quad (2)$$



Από (1) και (2) και διατήρηση διατήρηση της ενέργειας έχουμε

$$\sqrt{(pc)^2 + m_{\pi^+}^2 c^4} - m_{\pi^+} c^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \frac{6\hbar c}{r_{min}} \Rightarrow$$

$$r_{min} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \frac{6\hbar c}{\sqrt{(pc)^2 + m_{\pi^+}^2 c^4} - m_{\pi^+} c^2} = \frac{1}{137} \frac{6 \times 197.3 \text{ MeV fm}}{\sqrt{40^2 + 140^2} - 140 \text{ MeV}} = 1.54 \text{ fm}$$

Άσκηση 3: Υπολογίστε την ενέργεια Coulomb μεταξύ δύο πρωτονίων σε απόσταση 1 fm.

Λύση:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \frac{\hbar c}{r} = \frac{1}{137} \frac{197.3 \text{ MeV fm}}{1 \text{ fm}} = 1.5 \text{ MeV}$$

Μάζες Πυρήνων και Ενέργεια Σύνδεσης

Μετρήσεις μαζών των πυρήνων $M(A, Z)$ με δεδομένο A και Z έχουν δείξει ότι η τιμές των μαζών είναι μικρότερες από το άθροισμα των μαζών των νουκλεονίων από τα οποία αποτελούνται. Δηλαδή

$$M(A, Z) < Z m_p + (A-Z) m_n$$

Αυτό δεν είναι παράξενο διότι ο πυρήνας πρέπει να έχει μικρότερη ενέργεια από αυτήν που έχουν τα συστατικά του όταν είναι ελεύθερα αλλιώς δεν θα ήταν σταθερός. Συνεπώς για να υπολογίσει κανείς τη μάζα του πυρήνα πρέπει να συμπεριλάβει και την ενέργεια σύνδεσης E_b με αρνητικό πρόσημο.

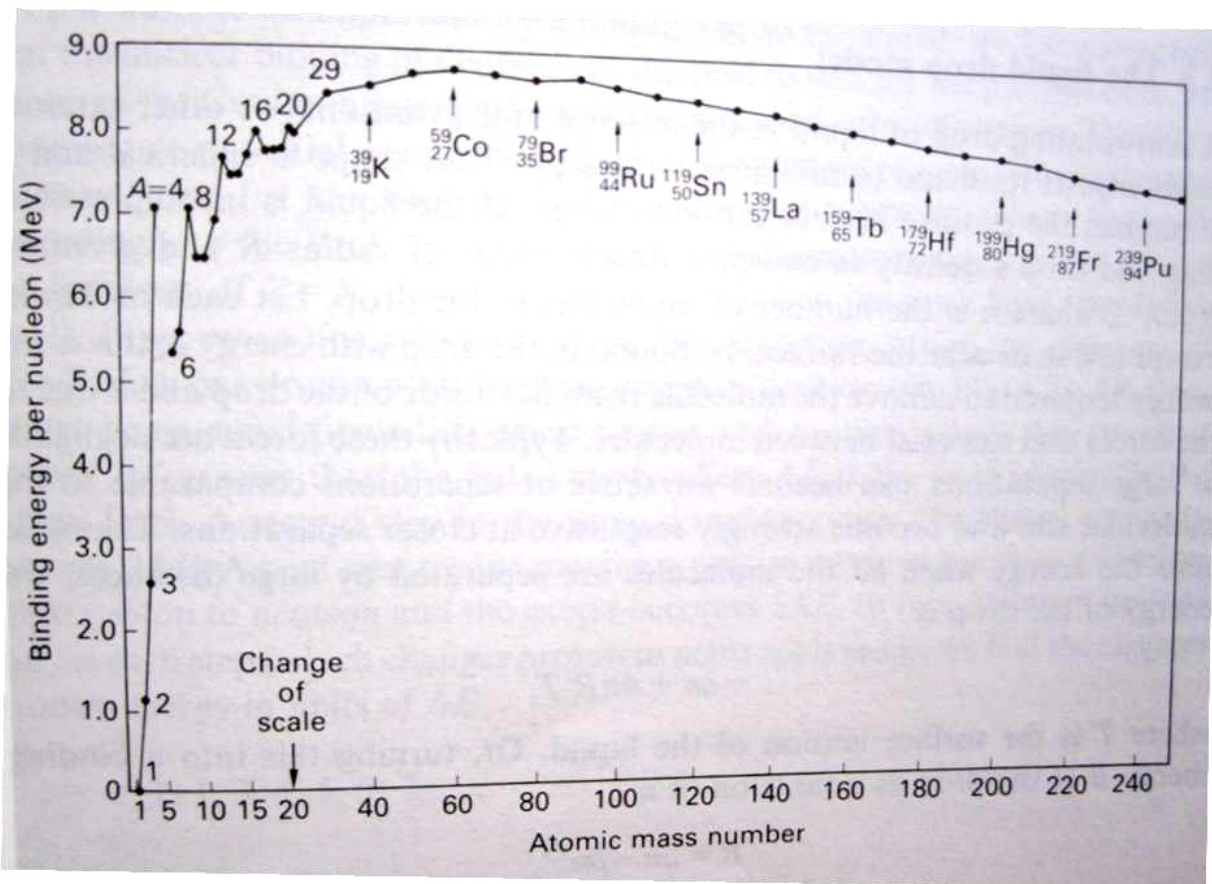
$$M(A, Z) c^2 = Z m_p c^2 + (A-Z) m_n c^2 - E_b$$



Η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο ορίζεται επίσης από

$$\frac{-\Delta M(A, Z)c^2}{A} = \frac{M(A, Z)c^2 - Z m_p c^2 - (A-Z)m_n c^2}{A}$$

και είναι θετική ποσότητα. Στο Σχήμα 4 βλέπουμε μετρήσεις της ενέργειας σύνδεσης για πυρήνες με διαφορετικό μαζικό αριθμό A .



Σχήμα 4: Μετρήσεις της ενέργειας σύνδεσης ανά νουκλεόνιο σαν συνάρτηση του μαζικού αριθμού A .



Από το σχήμα 4 βλέπουμε ότι η πλειοψηφία των πυρήνων έχει ενέργεια σύνδεσης γύρο στα **8.5 MeV ανά νουκλεόνιο** η οποία για σχετικά μεγάλο μαζικό αριθμό ($A > 20$) δεν μεταβάλλεται περισσότερο από $\pm 10\%$. Αυτό έχει να κάνει με τις ιδιότητες της ισχυρής αλληλεπίδρασης. Η ισχυρή αλληλεπίδραση έχει εμβέλεια περίπου **1-2 fm**, δηλαδή περίπου ίση με την ακτίνα των νουκλεονίων. Συνεπώς το κάθε νουκλεόνιο που βρίσκεται μέσα στον πυρήνα (όχι στην επιφάνεια του πυρήνα) δέχεται ελκτικές δυνάμεις μόνο από τα γειτονικά του νουκλεόνια. Έτσι η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο είναι περίπου η ίδια για όλα τα νουκλεόνια.

$$\frac{-\Delta M(A, Z)c^2}{A} = 8.5 \text{ MeV}$$

Το αποτέλεσμα θα ήταν πολύ διαφορετικό αν αντί της ισχυρής αλληλεπίδρασης είχαμε να κάνουμε την ηλεκτρομαγνητική και ο αναγνώστης μπορεί να αποδείξει ότι κάθε πρωτόνιο συνεισφέρει διαφορετικά στην ηλεκτροστατική ενέργεια που απαιτείται για να δημιουργηθεί μία κατανομή με ένα αριθμό πρωτονίων.

Ας δούμε λοιπόν τι μήκος κύματος De Broglie έχει ένα πρωτόνιο ($m_p = 938.3 \text{ MeV}$) με κινητική ενέργεια ίση με $KE = 8.5 \text{ MeV}$. Από την σχέση του κύματος De Broglie έχουμε ότι

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p} \quad (1)$$

όπου η ορμή σαν συνάρτηση της κινητικής ενέργειας δίνεται από την κλασσική σχέση (γιατί;)

$$p = \sqrt{2 \times M \times KE} \quad (2)$$

Έτσι από (1) και (2) έχουμε

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2MKE}} = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{2Mc^2KE}} = \frac{6.283 \times 197.3 \text{ MeV fm}}{\sqrt{2 \times 938.3 \text{ MeV} \times 8.5 \text{ MeV}}} = 9.8 \text{ fm}$$

Το μήκος κύματος αυτό δεν είναι πολύ διαφορετικό από το μήκος της ακτίνας του πυρήνα. Συνεπώς σύμφωνα με τις αρχές της θεωρίας του De Broglie το πρωτόνιο με κινητική ενέργεια 8.5 MeV είναι συμβατά με στάσιμα κύματα μέσα σε ένα πηγάδι άπειρου δυναμικού με εύρος περίπου 10 fm. Με άλλα λόγια 'χωράνε' μέσα στον πυρήνα.



Αντιθέτως τα ηλεκτρόνια με $KE = 8.5 \text{ MeV}$, τα οποία έχουν $m_p = 0.511 \text{ MeV}$, δεν 'χωράνε' στον πυρήνα διότι η ορμή τους υπολογίζεται (γιατί σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας;) ως εξής

$$KE + m_e c^2 = E = \sqrt{(pc)^2 + m_e^2 c^4} \Rightarrow (pc) = \sqrt{(KE + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4} \Rightarrow$$

$$pc = 9.00 \text{ MeV}$$

Από την ορμή μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος κύματος De Broglie

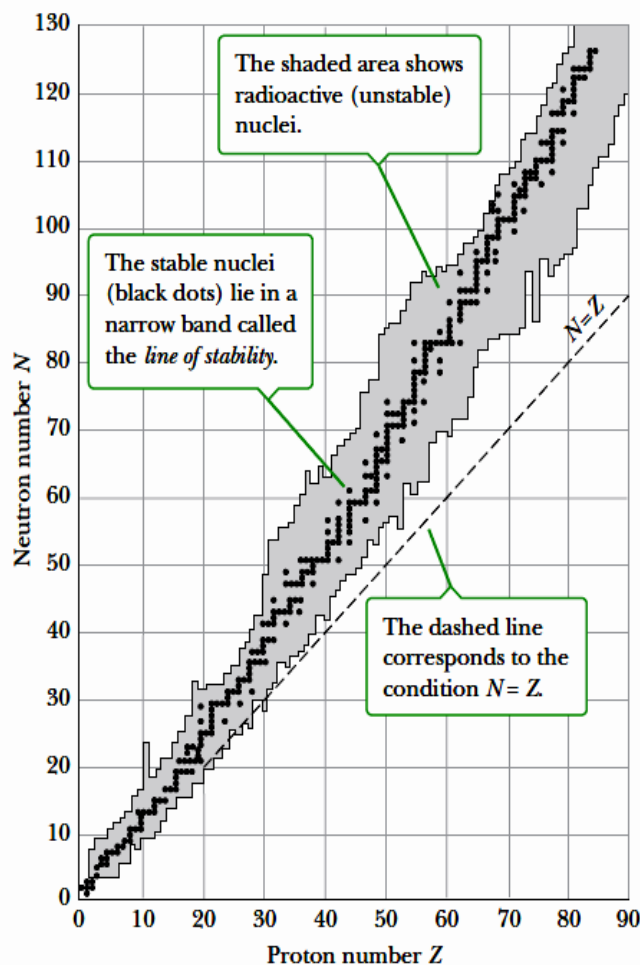
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{pc} = \frac{6.283 \times 197.3 \text{ MeV fm}}{9 \text{ MeV}} = 137.7 \text{ fm}$$

Όπως βλέπουμε το μήκος κύματος De Broglie για ηλεκτρόνια με κινητική ενέργεια 8.5 MeV είναι πολύ μεγαλύτερο από την ακτίνα οποιουδήποτε πυρήνα. Έτσι δεν μπορούν να είναι συστατικά του πυρήνα.



Ο Πίνακας των Νουκλιδίων

Στο Σχήμα 5 βλέπουμε τους γνωστούς μέχρι σήμερα πυρήνες σαν συνάρτηση του αριθμού των νετρονίων N και του αριθμού των πρωτονίων Z . Παρατηρούμε για ελαφρούς πυρήνες η συνθήκη σταθερότητας είναι $N \approx Z$ ενώ για βαρύτερους πυρήνες η πυρηνική σταθερότητα επιτυγχάνεται για $N > Z$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η αποστική δύναμη Coulomb αυξάνεται σαν το τετράγωνο του Z λόγω της μεγάλης εμβέλειας της. Δηλαδή στην αποστική δυναμική ενέργεια Coulomb συνεισφέρουν όλα ζεύγη πρωτονίων οι συνδυασμοί των οποίων αυξάνονται σαν το τετράγωνο του Z . Προσθέτοντας περισσότερα νετρόνια έχει σαν αποτέλεσμα να αυξηθεί η απόσταση μεταξύ πρωτονίων και έτσι να μειωθεί η αποστική δύναμη ενέργεια Coulomb η οποία όπως ξέρουμε είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης.



Σχήμα 5: Σταθεροί και ασταθείς πυρήνες.



Πυρηνικό Σπίν και Μαγνητική Ροπή

Οι πυρήνες αποτελούνται από νετρόνια και πρωτόνια, τα οποία έχουν σπίν $\frac{1}{2}$ (φερμιόνια) καθώς επίσης έχουν και τροχιακή στροφορμή. Συνεπώς οι πυρήνες έχουν σπίν το οποίο προέρχεται από το άθροισμα της ολικής στροφορμής με το ολικό σπίν των νουκλεονίων από τα οποία αποτελούνται.

$$\vec{S} = \sum_i^A \vec{L}_i + \sum_i^A \vec{s}_i$$

Τα αθροίσματα αυτά ακολουθούν τους κανόνες άθροισης στροφορμών σύμφωνα με τους οποίους όταν αθροίζουμε τις στροφορμές ή τα σπίν δύο σωματιδίων ή την στροφορμή και το σπίν ενός σωματιδίου ο κβαντικός αριθμός της ολικής στροφορμής παίρνει τιμές από

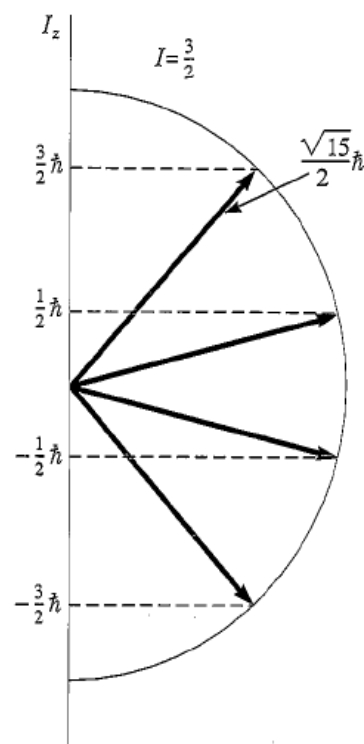
$$|I_1 - I_2| \leq J \leq |I_1 + I_2|$$

και η ολική στροφορμή είναι $\sqrt{J(J+1)}\hbar$. Ο κβαντικός αριθμός της z – συνιστώσας της ολικής στροφορμής παίρνει τιμές μεταξύ

$$-J \leq M_J \leq +J$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 6. και η τιμή της z – συνιστώσας της ολικής στροφορμής είναι $M_J \hbar$.

Τα σπίν των νουκλεονίων τείνουν να 'ζευγαρώνουν' και να αλληλοαναιρούνται. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι πυρήνες με άρτιο-άρτιο αριθμό πρωτονίων-νετρονίων έχουν σπιν μηδέν καθώς επίσης από το γεγονός ότι σχετικά μεγάλοι πυρήνες έχουν μικρό σπίν.



Σχήμα 6: Η τιμές της z- συνιστώσας της στροφορμής για ολική στροφορμή $3/2$.



Λόγω του ότι οι πυρήνες έχουν σπίν, έχουν και μαγνητική ροπή οι οποία δίνεται από

$$\vec{\mu} = \frac{g e}{2m} \vec{S}$$

όπου g είναι ο παράγων Lande ο οποίος για ηλεκτρόνια είναι ίσος με τον αριθμό δύο ($g=2$). Όταν ο παράγων Lande δεν είναι ίσος με το δύο συνήθως το σωματίδιο δεν είναι στοιχειώδες και αποτελείται από άλλα πιο στοιχειώδη σωματίδια. Η μαγνητική ροπή μετράται σε μονάδες της μαγνετόνης του Bohr

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_e} = 5.79 \times 10^{-11} \frac{\text{MeV}}{\text{Tesla}}$$

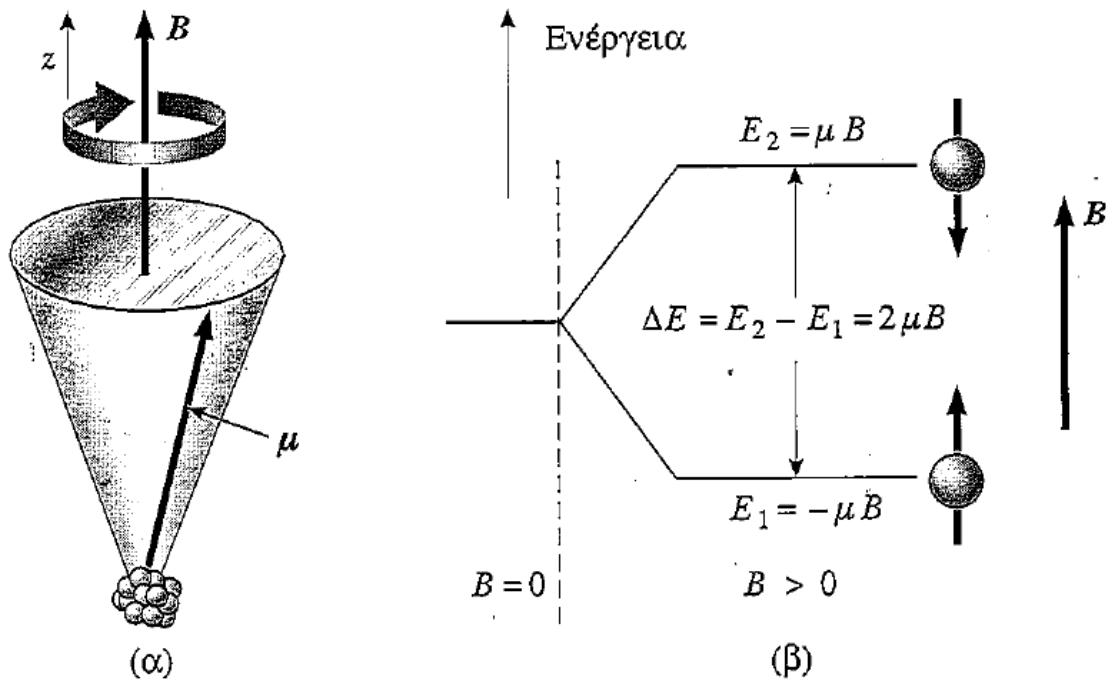
Ανάλογα η πυρηνική μαγνετόνη ορίζεται ως

$$\mu_N = \frac{e \hbar}{2 m_p} = 5.79 \times 10^{-11} \times 5,4510^{-4} \frac{\text{MeV}}{\text{Tesla}} = 3.15 \times 10^{-14} \frac{\text{MeV}}{\text{Tesla}}$$

και είναι μικρότερη από την μαγνετόνη του Bohr κατά ένα παράγοντα ίσο με το λόγο μαζών του ηλεκτρονίου δια του πρωτονίου. Μετρήσεις της μαγνητικής ροπής του πρωτονίου και νετρονίου δίνουν $\mu_p = 2.79 \mu_N$ και $\mu_n = -1.91 \mu_N$ πράγμα που μας λέει ότι και τα δύο σωματίδια μπορεί να αποτελούνται από άλλα (quarks).



Η μαγνητική ροπή ενός πυρήνα μπορεί να μετρηθεί μέσω της διαδικασίας που περιγράφεται στο Σχήμα 7.



Σχήμα 7: Μετάπτωση Larmor για μέτρηση μαγνητικής ροπής πυρήνα.

Η δυναμική ενέργεια ενός πυρήνα με μαγνητική ροπή $\vec{\mu}$ μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο \vec{B} δίνεται από την σχέση

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Από αυτή τη σχέση προκύπτει ότι μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο η μαγνητική ροπή υπόκειται σε μετάπτωση Larmor (Σχήμα 7α) σύμφωνα με την εξίσωση

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Η συχνότητα της μετάπτωσης (περιστροφής) αυτής δίνεται από

$$\omega = \frac{\mu B}{\hbar J}$$



Στο Σχήμα 7β φαίνεται πως διαχωρίζεται μια ενεργειακή στάθμη μέσα στο μαγνητικό πεδίο λόγω των διαφορετικών τιμών της z – συνιστώσας του πυρηνικού σπίν $M_z \hbar$. Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία η οποία προσπίπτει πάνω σε δείγμα υλικού το οποίο περιέχει τους συγκεκριμένους πυρήνες μέσα σε μαγνητικό πεδίο διεγείρει τους πυρήνες από την μία στάθμη στην άλλη και όταν μεταπίπτουν εκπέμπουν φωτόνια με ενέργεια ίση με

$$\Delta U = 2\mu B$$

Έτσι όταν η ενέργεια της προσπίπτουσας ακτινοβολίας ισούται με ΔU παρατηρείται φαινόμενο συντονισμού και έτσι μπορεί να μετρηθεί η μαγνητική ροπή.