



Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Τα Μοντέλα των J.J. Thompson και E. Rutherford – Σκέδαση Rutherford

Σκοποί της πρώτης διάλεξης:

03/06/12

- I. Να εισάγει τους φοιτητές στα ατομικά μοντέλα των J.J. Thompson και E. Rutherford.
- II. Την κατανόηση των πειραματικών αποτελεσμάτων του E. Rutherford και των συνεργατών του H. Geiger και E. Marsden τα οποία οδήγησαν στην απόρριψη του μοντέλου του J.J. Thompson και στην δημιουργία του μοντέλου του E. Rutherford.
- III. Την κατανόηση της έννοιας της ενεργού διατομής (cross-section), της διαφορικής ενεργού διατομής (differential cross-section) καθώς επίσης και της μέσης ελεύθερης διαδρομής (mean free path).
- IV. Την κατανόηση του νόμου των ραδιενεργών μεταπτώσεων.

Ιστορική Εισαγωγή

Η ιστορία των πρώτων ανακαλύψεων της Πυρηνικής Φυσικής συνοψίζεται στον Πίνακα 1.

Έτος	Ανακάλυψη
1895	Ακτίνες-Χ, Rödgen
1896	Ραδιενέργεια, Becquerel
1897	Ηλεκτρόνιο, J. J. Thompson
1900-1910	Ακτίνες/μεταπτώσεις α, β, γ, Rutherford
1911	Πειράματα Rutherford, Geiger, Marsden – Ατομικό Μοντέλο Rutherford - $R_{\text{Πυρήνα}} \approx 10 \text{ fm}$
1930	Πυρηνικές αντιδράσεις με επιταχυντές, Cockroft-Walton
1932	Νετρόνιο, Chadwick
1933	Τεχνητή ραδιενέργεια Curie
1938	Πυρηνική σχάση, Hahn, Strassmann
1942	Πυρηνικός αντιδραστήρας, Fermi

Πίνακας 1: Ιστορία της Πυρηνικής Φυσικής.

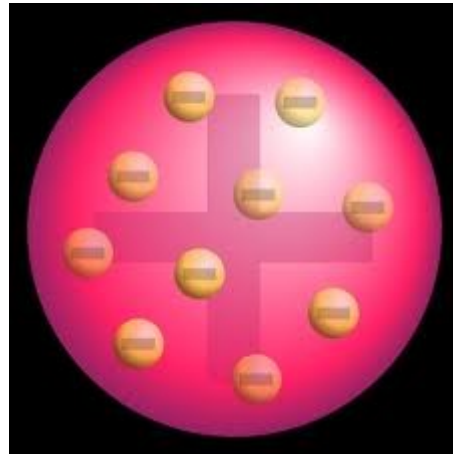
Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή – Σκέδαση Rutherford – Ραδιενεργές Μεταπτώσεις

Το Ατομικό Μοντέλο του J. J. Thompson

Το ατομικό μοντέλο του J.J. Thompson περιέγραφε το άτομο σαν μία κατανομή θετικού φορτίου μέσα στο οποίο υπήρχε ικανός αριθμός ηλεκτρονίων έτσι ώστε το άτομο να είναι ουδέτερο (όπως φαίνεται στο Σχήμα 1).



Σχήμα 1: Το μοντέλο του J.J. Thompson

Το 1911 οι H. Geiger και E. Marsden σε συνεργασία με τον E. Rutherford στο παν/μιο του Manchester στην Αγγλία έκαναν μία σειρά πειραμάτων με σκοπό να ελέγξουν την ισχύ του μοντέλου αυτού. Στα πειράματα αυτά ένα λεπτό φύλλο χρυσού βομβαρδίστηκε με σωματίδια α (δύο πρωτόνια και δύο νετρόνια) τα οποία είχαν παραχθεί από μία ραδιενεργό πηγή όπως φαίνεται στο Σχήμα 2 και οι αποκλίσεις στις τροχιές τους μετρήθηκαν λεπτομερώς.

Αν το μοντέλο του J.J. Thompson ήταν σωστό δεν θα έπρεπε να παρατηρηθούν μεγάλες αποκλίσεις στις τροχιές των σωματιδίων α για τους εξής λόγους: Ας υποθέσουμε ότι σωματίδια α σκεδάζονται από κάποιο ακίνητο στόχο Σ όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Στο τελικό στάδιο της σκέδασης τα δύο σωματίδια κινούνται σε κατευθύνσεις οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τις αρχές της διατήρησης της ορμής και της ενέργειας.

Στις περισσότερες περιπτώσεις το πρόβλημα μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας τις κλασσικές σχέσεις για την ορμή και ενέργεια. Ο λόγος είναι ότι όπως θα δούμε αργότερα τα σωματίδια α παράγονται από ραδιενεργές πηγές και έχουν κινητική ενέργεια της τάξης των μερικών MeV ενώ η μάζα τους είναι περίπου 4 GeV. Συνεπώς τα α σωματίδια έχουν πολύ μικρό $\beta = v/c$ και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κλασσικές σχέσεις για ορμή και κινητική ενέργεια. Έστω λοιπόν ότι η αρχική ταχύτητα των σωματιδίων α είναι v_0 . Διατήρηση της ενέργειας δίνει,

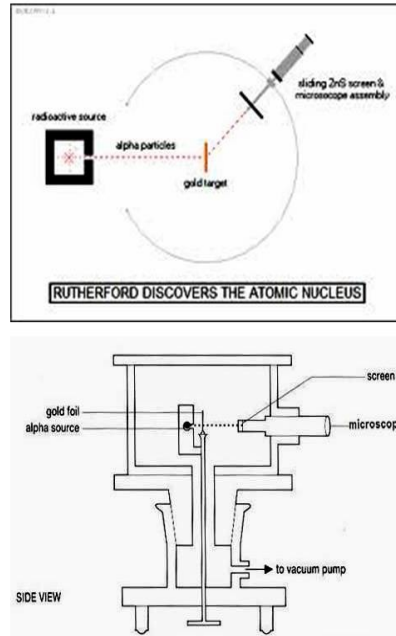
$$\frac{1}{2} m_{\alpha} v_0^2 = \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_{\Sigma} v_{\Sigma}^2 \Rightarrow v_0^2 = v_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_{\Sigma}}{m_{\alpha}} v_{\Sigma}^2 \quad (1)$$

και διατήρηση της ορμής δίνει,

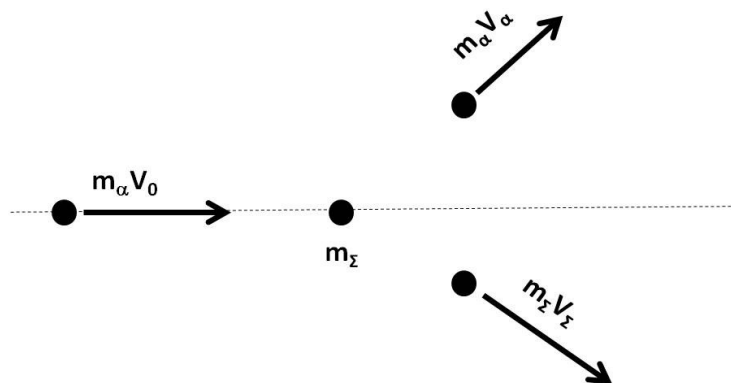
$$m_{\alpha} \vec{v}_0 = m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} + m_{\Sigma} \vec{v}_{\Sigma} \Rightarrow \vec{v}_0 = \vec{v}_{\alpha} + \frac{m_{\Sigma}}{m_{\alpha}} \vec{v}_{\Sigma} \quad (2)$$

Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1



Σχήμα 2: Η Πειραματική διάταξη των Geiger και Marsden. Η πηγή α Ραδίου φαίνεται αριστερά στο επάνω σχήμα και στο κέντρο στο κάτω σχήμα. Τα σκεδαζόμενα σωματίδια παρατηρούνται μέσω παραπετάματος σπινθηρισμού. Οι σπινθηρισμοί παρατηρούνται με μικροσκόπιο.



Σχήμα 3: Σκέδαση σωματιδίων α από κάποιο στόχο Σ.

Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Από (2) και (1) έχουμε ότι

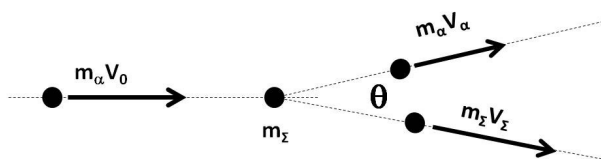
$$\Rightarrow \vec{v}_0^2 = \vec{v}_\alpha^2 + \left(\frac{m_\Sigma}{m_\alpha}\right)^2 \vec{v}_\Sigma^2 + 2 \frac{m_\Sigma}{m_\alpha} \vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\Sigma \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{m_\Sigma}{m_\alpha}\right) \vec{v}_\Sigma^2 = 2 \vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\Sigma \quad (3)$$

Ας δούμε τι δίνει η (3) για δύο περιπτώσεις:

(1) $m_\Sigma \ll m_\alpha$. Παραδείγματος χάριν όταν ο στόχος είναι ένα ηλεκτρόνιο με μάζα 0.511 MeV. Η μάζα των σωματιδίων α είναι 4 GeV. Συνεπώς έχουμε,

$$\frac{m_\Sigma}{m_\alpha} \approx 10^{-4} \Rightarrow \vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\Sigma > 0$$



Σχήμα 4: Σκέδαση σωματιδίων α από σωματίδια με πολύ μικρότερη μάζα. Η απόκλιση των σωματιδίων α είναι σχετικά μικρή.

Συνεπώς σ' αυτή την περίπτωση οι τροχιές των σωματιδίων α παρουσιάζουν μικρές αποκλίσεις σε σχέση με τον στόχο όπως φαίνεται στο σχήμα 4. Αυτό μπορούμε να το δούμε και από τα εξής:

Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Από την (3) και για στόχο ηλεκτρονίων έχουμε

$$v_e^2 = v_\Sigma^2 \approx 2\vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\Sigma \leq 2v_\alpha v_e \Rightarrow v_e \leq 2v_\alpha \Rightarrow m_e v_e = m_a \frac{m_e}{m_a} v_e \leq m_a \frac{m_e}{m_a} 2v_\alpha \Rightarrow$$

$m_e v_e \leq 2 \times 10^{-4} m_a v_\alpha$. Από την (3) έχουμε επίσης ότι $v_\alpha \approx v_0$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$m_e v_e \leq 2 \times 10^{-4} m_a v_0$$

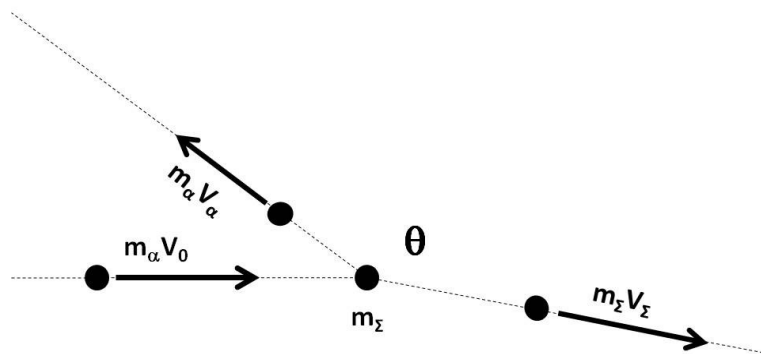
Δηλαδή δεν λαμβάνει χώρα μεγάλη μεταφορά ορμής από τα σωματίδια α στα ηλεκτρόνια. Έτσι τα σωματίδια α δεν σκεδάζονται με μεγάλες γωνίες.

(2) $m_\Sigma \gg m_\alpha$ Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε ότι $\vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\Sigma < 0$ και συνεπώς τα σωματίδια α σκεδάζονται με μεγάλες αποκλίσεις όπως φαίνεται στο Σχήμα 5. Ας υποθέσουμε ότι ο στόχος είναι πυρήνες χρυσού. Η μάζα ενός πυρήνα χρυσού είναι

$$m_\Sigma = m_{Au} \approx 200 \text{ GeV}$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$\frac{m_\Sigma}{m_\alpha} = \frac{m_{Au}}{m_\alpha} \approx 50$$



Σχήμα 5: Σκέδαση σωματιδίων α από πού βαρύτερα σωματίδια. Η απόκλιση των σωματιδίων α είναι μεγάλη.



Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Στην περίπτωση αυτή η (3) μας δίνει

$$-\frac{m_{\Sigma}}{m_{\alpha}} \vec{v}_{\Sigma}^2 \approx 2 \vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\Sigma} \Rightarrow$$

$$\frac{m_{\Sigma}}{m_{\alpha}} v_{\Sigma} \leq 2 v_{\alpha} \quad (4)$$

Όμως από διατήρηση της ενέργειας έχουμε ότι

$$\Rightarrow \vec{v}_0^2 = \vec{v}_{\alpha}^2 + \left(\frac{m_{\Sigma}}{m_{\alpha}}\right)^2 v_{\Sigma}^2 \Rightarrow v_0 \geq v_{\alpha} \quad (5)$$

και από (4) και (5) έχουμε ότι

$$\frac{m_{\Sigma}}{m_{\alpha}} v_{\Sigma} \leq 2 v_{\alpha} \leq 2 v_0 \Rightarrow m_{\Sigma} v_{\Sigma} \leq 2 m_{\alpha} v_0$$

Προφανώς η μεταφορά ορμής στον στόχο είναι μεγαλύτερη από την περίπτωση (1) και οι τιμές της φτάνουν μέχρι και δύο φορές την αρχική ορμή των σωματιδίων α.

Επιστρέφουμε τώρα στο πείραμα των H. Geiger και E. Marsden που φαίνεται στο Σχήμα 2. Η πηγή σωματιδίων α ήταν ραδιενεργό Ράδιο τοποθετημένη μέσα σε μεταλλικό περίβλημα. Το περίβλημα είχε μία κυλινδρική τρύπα από την οποία έβγαινε η δέσμη των σωματιδίων α (σωματίδια με διάνυσμα ορμής που δεν ήταν στη διεύθυνση της τρύπας απορροφούνται από το μεταλλικό περίβλημα). Ο στόχος ήταν ένα πολύ λεπτό φύλλο χρυσού και τα σκεδαζόμενα σωματίδια α παρατηρούνταν πάνω σε παραπέτασμα το οποίο είχε επικαλυφτεί με ZnS. Όταν σωματίδια α προσπίπτουν πάνω σε άτομα ZnS τα διεγείρουν και αυτά παράγουν ορατό φως (σπινθηρισμούς/scintillations) οι οποίοι παρατηρούνταν από μικροσκόπιο. Το παραπέτασμα και το μικροσκόπιο μπορούσαν να περιστραφούν σε διάφορες γωνίες σκέδασης. Έτσι ο αριθμός των σκεδαζομένων σωματιδίων ανά λεπτό μετρήθηκε σαν συνάρτηση της γωνίας σκέδασης.

Οι μετρήσεις των έδειξαν ότι τα σωματίδια α σκεδάζονται και σε μεγάλες γωνίες κάτι που δεν μπορούσε να εξηγηθεί βάσει του μοντέλου του J. J Thomson οπού ο στόχος ήταν τα ηλεκτρόνια. Σκεδαζόμενα σωματίδια α σε μεγάλες γωνίες μπορούσαν να εξηγηθούν μόνο αν ο στόχος ήταν σωματίδια με μάζα πολύ μεγαλύτερη από αυτή των α.

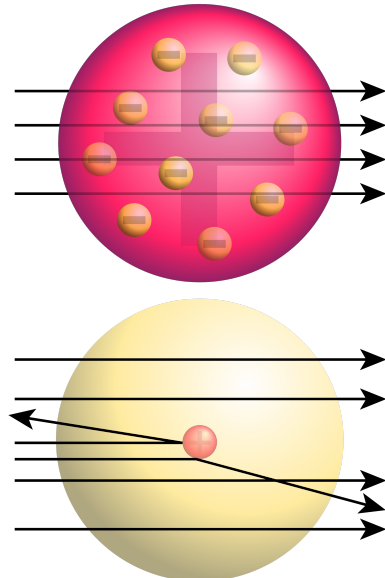
Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Το Μοντέλο του E. Rutherford

Την ίδια περίοδο ο E. Rutherford παρουσίασε ένα νέο μοντέλο για το άτομο. Το μοντέλο του E. Rutherford βασίστηκε στην υπόθεση ότι το άτομο αποτελείται από

1. Ένα Πυρήνα με φορτίο Ze (όπου Z είναι ο ατομικός αριθμός και e το φορτίο του ηλεκτρονίου) και μάζα ίση περίπου με τη μάζα του ατόμου.
2. Z τον αριθμό ηλεκτρόνια τα οποία κινούνται γύρω από τον πυρήνα.



Σχήμα 6: Η διαφορά στη σκέδαση μεταξύ μοντέλου J. J. Thompson και E. Rutherford.

Ο E. Rutherford υπέθεσε ότι

1. Ο πυρήνας είναι αρκετά βαρύς έτσι σε πειράματα σκέδασης δεν υπόκειται σε ανάκρουση (no recoil).
2. Η κλασσική (μη σχετικιστική) μηχανική περιγραφεί με αρκετή ακρίβεια το πρόβλημα.
3. Ο στόχος και το προσπίπτον σωματίδιο είναι σημειακά και συνεπώς η δυναμική ενέργεια δίνεται από το νόμο του Coulomb: $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Zze^2}{r}$ όπου z το φορτίο των σωματιδίων με τα οποία βομβαρδίστηκε ο πυρήνας.
4. Κατά την διάρκεια του πειράματος ούτε το προσπίπτον σωματίδιο ούτε ο πυρήνας διεγείρονται.

Ας δούμε λοιπόν πως μπορεί κανείς να υπολογίσει τις τροχιές σωματιδίων υπό την επίδραση ενός πεδίου Coulomb όπως φαίνεται στα σχήματα 7 και 8.

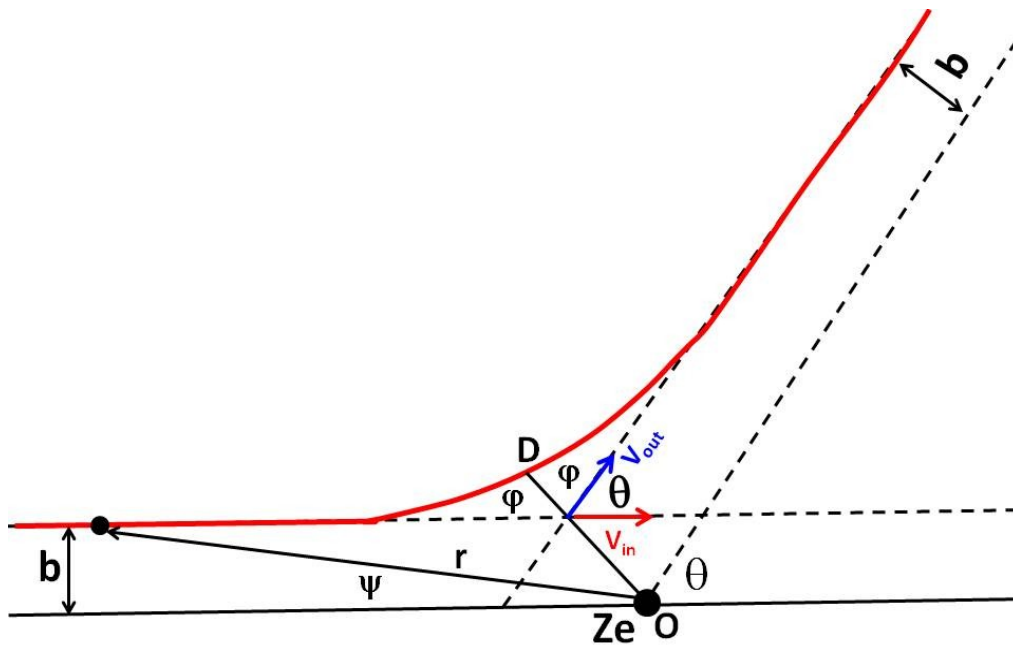
Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Στο Σχήμα 7 φαίνεται η σκέδαση όταν το προσπίπτον σωματίδιο κατευθύνεται προς το στόχο με παράμετρο πρόσπτωσης $b = 0$ ενώ στο Σχήμα 8 φαίνεται παράδειγμα σκέδασης με μη μηδενική παράμετρο πρόσπτωσης.



Σχήμα 7: Σκέδαση Rutherford με μηδενική παράμετρο πρόσπτωσης



Σχήμα 8: Σκέδαση Rutherford με μη μηδενική παράμετρο πρόσπτωσης.



Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Αρχίζουμε από το δεύτερο νόμο του Newton:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \Delta\vec{P} = \int \vec{F} dt \quad (1)$$

Πρώτα υπολογίζουμε τη διαφορά ορμής του σκεδαζόμενου σωματιδίου. Επειδή η δύναμη Coulomb είναι κεντρική χρειαζόμαστε τη διαφορά ορμής στη διεύθυνση OD.

$$P_{\text{εισερχόμενο-OD}} = -mv_0 \cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = -mv_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2)$$

$$P_{\text{εξερχόμενο-OD}} = +mv_0 \cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = +mv_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3)$$

από (2) και (3) έχουμε ότι $\Delta P = 2m v_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (4)

Στο επόμενο βήμα πρέπει να μετατρέψουμε την ολοκλήρωση ως προς το χρόνο σε ολοκλήρωση ως προς τη γωνία φ για να διευκολύνουμε την ολοκλήρωση. Σ' αυτό χρησιμοποιήσουμε την διατήρηση της στροφορμής σε κεντρικές δυνάμεις.

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (bmv_0)\hat{e}$ όπου το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{e} είναι κάθετο στο σχήμα 8 με κατεύθυνση προς τα μέσα. Έτσι

$$L = mrv = m r \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right) = m v_0 b \Rightarrow \frac{d\varphi}{v_0 b} = \frac{dt}{r^2} \quad (5)$$

Από (1) (4) και (5) έχουμε ότι

$$2m v_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\varphi dt = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r^2} \cos\varphi dt = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{+\frac{\pi-\theta}{2}} \frac{1}{v_0 b} \cos\varphi d\varphi \Rightarrow$$

$$2m v_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 v_0 b} \left[\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi-\theta}{2}\right) \right] = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 v_0 b} 2\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) \Rightarrow$$

$$2m v_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 v_0 b} 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow m v_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 v_0 b} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow$$



Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

$$2 m v_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 v_0 b} 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2 b} \quad (7)$$

Από το Σχήμα 7 έχουμε ότι

$$KE = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 p} \Rightarrow p = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 KE} \quad (8)$$

και από (7) και (8) έχουμε ότι

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2 b} = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 2 KE b} \Rightarrow$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{p}{2b}$$

Συνεπώς για να σκεδαστούν τα σωματίδια σε γωνίες μεγαλύτερες από Θ θα πρέπει να έχουν παράμετρο πρόσπτωσης μικρότερη από

$$\frac{p}{2} \frac{1}{\tan\left(\frac{\Theta}{2}\right)}$$

Έτσι ο στόχος εμφανίζεται να έχει μια ενεργό διατομή η οποία είναι ίση με

$$\sigma(\theta > \Theta) = \pi \left[\frac{p}{2} \tan^{-1}\left(\frac{\Theta}{2}\right) \right]^2 = \frac{\pi p^2}{4} \tan^{-2}\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \left[\frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 KE} \right]^2 \tan^{-2}\left(\frac{\Theta}{2}\right) \quad (9)$$

αν κανείς μελετά σκεδάσεις με γωνία $\theta > \Theta$.



Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Χρήσιμη είναι επίσης η έννοια της **διαφορικής ενεργού διατομής** η οποία ορίζεται ως

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi \sin\theta} \frac{d\sigma}{d\theta} \quad (10)$$

όπου η απειροστή στερεά γωνία ορίζεται ως $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ όπου θ, φ είναι οι πολικές γωνίες. Στη σχέση (10) έχουμε ολοκληρώσει ως προς $d\varphi$ (σκέδαση είναι συμμετρική ως προς φ) και από εκεί προέρχεται ο παράγων 2π . Ο υπολογισμός της διαφορικής ενεργού διατομής γίνεται ως εξής.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left[\tan^{-2}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] &= (-2) \tan^{-3}\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{d}{d\theta} \left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] = \\ &= (-2) \tan^{-3}\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{(1/2)\cos^2(\theta/2) + (1/2)\sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} = (-2) \tan^{-3}\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{1}{2 \cos^2(\theta/2)} = \\ &= -\frac{\cos^3(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2) \cos^2(\theta/2)} = -\frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)} \end{aligned} \quad (11)$$

και από (9,10,11) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2\pi \sin\theta} \frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{1}{2\pi 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} \frac{\pi \left[\frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 KE} \right]^2 \cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)} \Rightarrow \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2\pi 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} \frac{\pi \left[\frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 KE} \right]^2 \cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)} \Rightarrow \end{aligned}$$

Αυτή είναι η γνωστή σχέση σκέδασης του Rutherford:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{Zze^2}{16\pi\epsilon_0 KE} \right]^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (12)$$



Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Οι σχέσεις (9) και (12) μπορούν να γραφτούν σε πιο χρήσιμη μορφή αν κανείς χρησιμοποιήσει τις σταθερές

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad \hbar c \approx 197.3 \text{ MeV fm} \quad 1\text{fm} = 10^{-15} \text{ m}$$

Έτσι η (9) γράφεται ως

$$\begin{aligned} \sigma(\theta > \Theta) &= \frac{\pi}{4} (Zz)^2 \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right]^2 \left[\frac{1}{KE} \right]^2 \tan^{-2}\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{\pi}{4} (Zz)^2 \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \right]^2 \left[\frac{\hbar c}{KE} \right]^2 \tan^{-2}\left(\frac{\Theta}{2}\right) \Rightarrow \\ \sigma(\theta > \Theta) &= \frac{\pi}{4} (Zz)^2 \left[\frac{1}{137} \right]^2 \left[\frac{197.3 \text{ MeV fm}}{KE} \right]^2 \tan^{-2}\left(\frac{\Theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

και η (12) ως

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left[\frac{Zze^2}{16\pi\epsilon_0 KE} \right]^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} = \frac{Z^2 z^2}{16} \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right]^2 \left[\frac{1}{KE} \right]^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \Rightarrow \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{Z^2 z^2}{16} \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \right]^2 \left[\frac{\hbar c}{KE} \right]^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} = \frac{Z^2 z^2}{16} \left[\frac{1}{137} \right]^2 \left[\frac{197.3 \text{ MeV fm}}{KE} \right]^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \Rightarrow \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{Z^2 z^2}{16} \left[\frac{1}{137} \right]^2 \left[\frac{197.3 \text{ MeV fm}}{KE} \right]^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \end{aligned} \quad (14)$$

Οι μετρήσεις των H. Geiger και E. Marsden συμφωνούσαν με μεγάλη ακρίβεια με τις προβλέψεις του μοντέλου του Rutherford το οποίο ισχύει μέχρι σήμερα ως το καθιερωμένο ατομικό μοντέλο σύμφωνα με το οποίο το άτομο αποτελείται από ένα βαρύ πυρήνα θετικά φορτισμένο στον οποίο έχει συγκεντρωθεί σχεδόν όλη η μάζα του ατόμου γύρω από τον οποίο κινούνται αρνητικά φορτισμένα ηλεκτρόνια.

Η μονάδα που συχνά χρησιμοποιείται στην πυρηνική και σωματιδιακή φυσική για μετρήσεις ενεργών διατομών είναι το **barn** και ορίζεται ως

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2 \Rightarrow 1 \text{ barn} = 100 \text{ fm}^2$$

Μια τυπική ακτίνα ενός πυρήνα είναι **10 fm**. Έτσι **1 barn** είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τη ενεργό διατομή ενός πυρήνα.



Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Σκέδαση δέσμης σωματιδίων από επίπεδο στόχο

Μέχρι ώρα μιλήσαμε για σκέδαση ενός μοναδικού σωματιδίου από ένα πυρήνα. Στην πράξη όμως έχουμε μία πηγή ή μία δέσμη που έχει μία δεδομένη ροή σωματιδίων. Η Ροή σωματιδίων ορίζεται ως

$$F = \frac{\Delta N_0}{\Delta t}$$

όπου είναι ο αριθμός των σωματιδίων ΔN_0 ανά μονάδα χρόνου Δt και έχει μονάδες sec^{-1} .

Καθώς επίσης ο στόχος περιέχει πολλούς πυρήνες ανά μονάδα επιφανείας. Ας υποθέσουμε ότι ο στόχος είναι ένα επίπεδο φύλλο πάχους Δx από κάποιο υλικό με πυκνότητα ρ και ατομικό βάρος A , τότε ο αριθμός πυρήνων (ατόμων) ανά μονάδα επιφανείας είναι

$$T = \frac{\rho \Delta x N_A}{A}$$

όπου N_A είναι ο αριθμός του Ανογadro. Το T έχει μονάδες cm^{-2} .

Συνεπώς η ενεργός διατομή πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το γινόμενο $T \times F$ έτσι ώστε να υπολογίσουμε σωστά τον ολικό αριθμό σκεδαζομένων σωματιδίων. Έτσι ο ολικός αριθμός σωματιδίων που σκεδάζονται σε στερεά γωνία είναι

$$\frac{dN}{d\Omega} = T \times F \times \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

Όπως φαίνεται εδώ το γινόμενο $T \times F$ έχει μονάδες αντίστροφης επιφάνειας επί αντίστροφο χρόνο ($\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$) ενώ η διαφορική ενεργός διατομή έχει μονάδες επιφανείας ανά μονάδα στερεάς γωνίας. Συνεπώς το αποτέλεσμα $dN/d\Omega$ είναι αριθμός σωματιδίων ανά μονάδα στερεάς γωνίας.



Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Άσκηση 1: Υπολογίστε την ενεργό διατομή της σκέδασης σωματιδίων α ($z=2$), με κινητική ενέργεια **1 MeV**, από πυρήνα χρυσού (ο **Au** έχει **Z=79**, **$\rho=19.32 \text{ gr/cm}^3$** , **A=196.97 gr**) για γωνία σκέδασης μεγαλύτερη από 10° , 15° , 25° , 45° . Ας υποθέσουμε ότι έχουμε πηγή α η οποία είναι τοποθετημένη σε μεταλλικό κουτί με κυλινδρική τρύπα από την οποία εκπέμπονται $N_0 = 1 \times 10^{10}$ σωματίδια α ανά δευτερόλεπτο και τα οποία προσπίπτουν κάθετα πάνω στο φύλλο χρυσού πάχους $\Delta x = 50 \mu\text{m}$. Υπολογίστε πόσα σωματίδια σκεδάζονται ανά δευτερόλεπτο σε γωνία μεγαλύτερη από 45° .

Λύση: Χρησιμοποιώντας την σχέση

$$\sigma(\theta > \Theta) = \frac{\pi}{4} (Zz)^2 \left[\frac{1}{137} \right]^2 \left[\frac{197.3 \text{ MeV fm}}{KE} \right]^2 \tan^{-2} \left(\frac{\Theta}{2} \right)$$

έχουμε

$$\sigma(\theta > 10^\circ) = \frac{\pi}{4} (79 \times 2)^2 \left[\frac{1}{137} \right]^2 \left[\frac{197.3 \text{ MeV fm}}{1 \text{ MeV}} \right]^2 \tan^{-2} \left(\frac{10^\circ}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\sigma(\theta > 10^\circ) = 5,312,678,4 \text{ fm}^2 \Rightarrow$$

$$\sigma(\theta > 10^\circ) \approx 53126,8 \text{ barn}$$

και με τον ίδιο τρόπο έχουμε ότι

$$\sigma(\theta > 15^\circ) = 2,346,166.8 \text{ fm}^2 \approx 23,461.668 \text{ barn}$$

$$\sigma(\theta > 25^\circ) = 827,383.0 \text{ fm}^2 \approx 8,273.83 \text{ barn}$$

$$\sigma(\theta > 45^\circ) = 237,011.0 \text{ fm}^2 \approx 2,370.11 \text{ barn}$$



Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Ο αριθμός των σωματιδίων ανά δευτερόλεπτο τα οποία σκεδάζονται με γωνία μεγαλύτερη από 45° υπολογίζεται ως εξής:

Η ροή των σωματιδίων α είναι

$$F = 1 \times 10^{10} \text{ sec}^{-1} \quad (1)$$

Το φύλο χρυσού περιέχει

$$T = \frac{\rho_{Au} A \chi}{A} N_A = \frac{19.32 \text{ gr cm}^{-3} \times 50 \mu\text{m}}{196.97 \text{ gr}} \times 6.023 \times 10^{23} \Rightarrow$$

$$T = \frac{19.32 \text{ gr} \times (10^{-2} \text{ m})^{-3} \times 50 \times 10^{-6} \text{ m}}{196.97 \text{ gr}} 6.023 \times 10^{23} =$$

$$T = 29.54 \times 10^{23} \text{ m}^{-2}$$

πυρήνες χρυσού ανά μονάδα επιφάνειας.

$$N(\theta > 45^\circ) = L \times T \times \sigma(\theta > 45^\circ) = 10^{10} \text{ sec}^{-1} \times 29.54 \times 10^{23} \text{ m}^{-2} \times 237,011.0 \text{ fm}^2 \Rightarrow$$

$$N(\theta > 45^\circ) = L \times T \times \sigma(\theta > 45^\circ) = 10^{10} \text{ sec}^{-1} \times 29.54 \times 10^{23} \text{ m}^{-2} \times 237,011.0 \times 10^{-30} \text{ m}^2 \Rightarrow$$

$$N(\theta > 45^\circ) = L \times T \times \sigma(\theta > 45^\circ) = 29.54 \times 237,011.0 \times 10^3 \text{ sec}^{-1} \Rightarrow$$

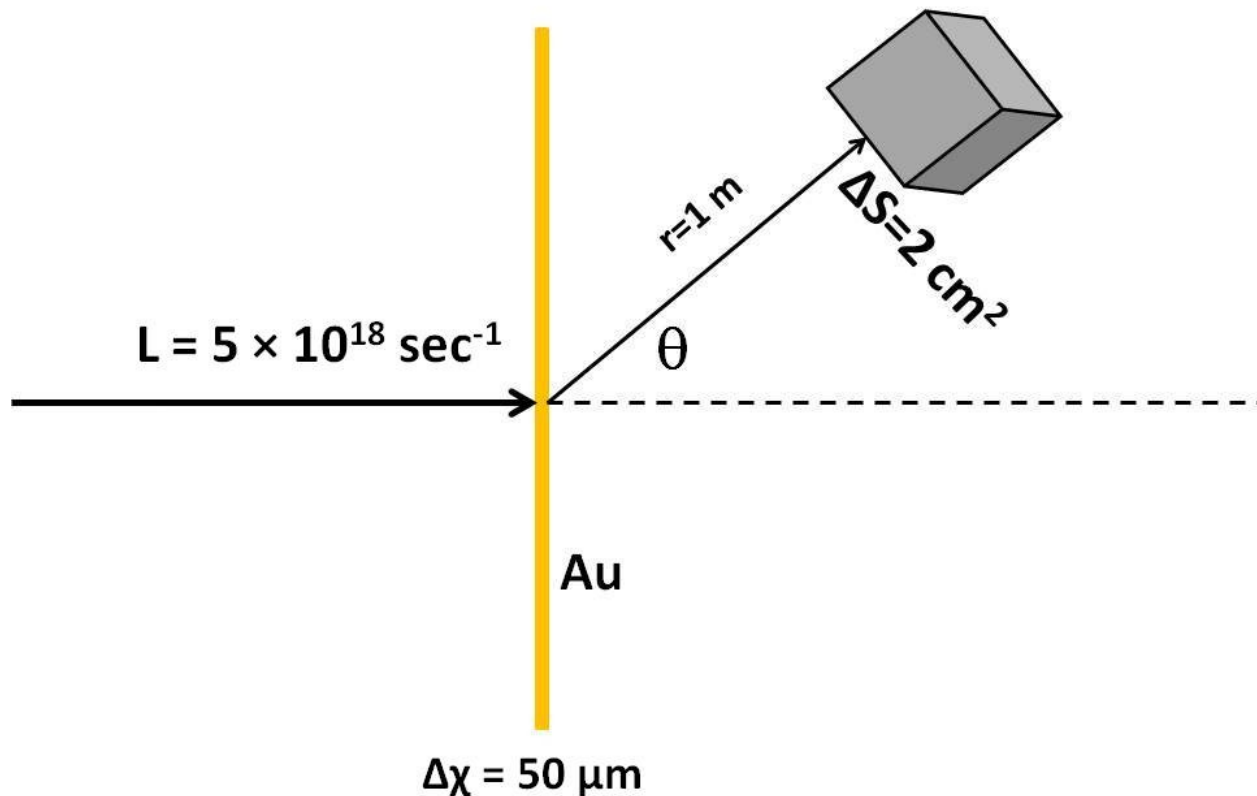
$$N(\theta > 45^\circ) = L \times T \times \sigma(\theta > 45^\circ) = 29.54 \times 237,011.0 \times 10^3 \text{ sec}^{-1} = 7 \times 10^9 \text{ sec}^{-1} \Rightarrow$$

$$N(\theta > 45^\circ) = 7.001 \text{ GHz}$$

Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Άσκηση 2: Υπολογίστε τη διαφορική ενεργό διατομή $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ σε $mbarn \times sr^{-1}$ της σκέδασης ποσιτρονίων ($z=1$) με κινητική ενέργεια **10 keV** από λεπτό φύλλο χρυσού (ο **Au** έχει **Z=79**, **$\rho=19.32 \text{ gr/cm}^3$** , **A=196.97 gr**). Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κυλινδρική δέσμη ποσιτρονίων η οποία μεταφέρει $L = 5 \times 10^{18} \text{ sec}^{-1}$ πρωτόνια ανά δευτερόλεπτο και τα οποία προσπίπτουν κάθετα πάνω στο φύλλο χρυσού πάχους $\Delta x = 50 \mu\text{m}$. Ανιχνευτής σωματιδίων α με επιφάνεια $\Delta S = 2 \text{ cm}^2$ τοποθετείται σε απόσταση $r = 1 \text{ m}$ από το σημείο πρόσπτωσης της δέσμης πάνω στο χρυσό και σε γωνία $\theta = 45^\circ$ από την διεύθυνση της δέσμης. Υπολογίστε πόσα σωματίδια ανιχνεύονται ανά δευτερόλεπτο από τον ανιχνευτή. Θεωρήστε ότι η γωνιακή μεταβολή της διαφορικής ενεργού διατομής πάνω στην επιφάνεια του ανιχνευτή είναι αμελητέα (στην πράξη είναι της τάξης του 5%).



Σχήμα 9: Σκέδαση πρωτονίων από λεπτό φύλλο χρυσού



Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Λύση:

Χρησιμοποιώντας την σχέση της διαφορικής ενεργού διατομής έχουμε ότι

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 z^2}{16} \left[\frac{1}{137} \right]^2 \left[\frac{197.3 \text{ MeV fm}}{KE} \right]^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \Rightarrow$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{79^2 \times 1^2}{16} \left[\frac{1}{137} \right]^2 \left[\frac{197.3 \text{ MeV fm}}{0.01 \text{ MeV}} \right]^2 \frac{1}{\sin^4(45^\circ/2)} \Rightarrow$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 390.0625 \left[\frac{1}{137} \right]^2 [19730 \text{ fm}]^2 \frac{1}{\sin^4(45^\circ/2)} = 377,214,687.0 \text{ fm}^2 \text{ sr}^{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 3,772,146.87 \text{ barn sr}^{-1} \quad (1)$$

Η στερεά γωνία την οποία καλύπτει ο ανιχνευτής δίνεται από τη σχέση

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{2 \text{ cm}^2}{1 \text{ m}^2} = 2 \times 10^{-4} \text{ sr} \quad (2)$$

Το φύλλο χρυσού περιέχει

$$T = \frac{\rho_{Au} \Delta \chi}{A} N_A = \frac{19.32 \text{ gr cm}^{-3} \times 50 \mu\text{m}}{196.97 \text{ gr}} \times 6.023 \times 10^{23} \Rightarrow$$

$$T = \frac{19.32 \text{ gr} \times (10^{-2} \text{ m})^{-3} \times 50 \times 10^{-6} \text{ m}}{196.97 \text{ gr}} 6.023 \times 10^{23} \Rightarrow$$

$$T = 29.54 \times 10^{23} \text{ m}^{-2} \quad (3)$$

πυρήνες χρυσού ανά μονάδα επιφάνειας.

Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

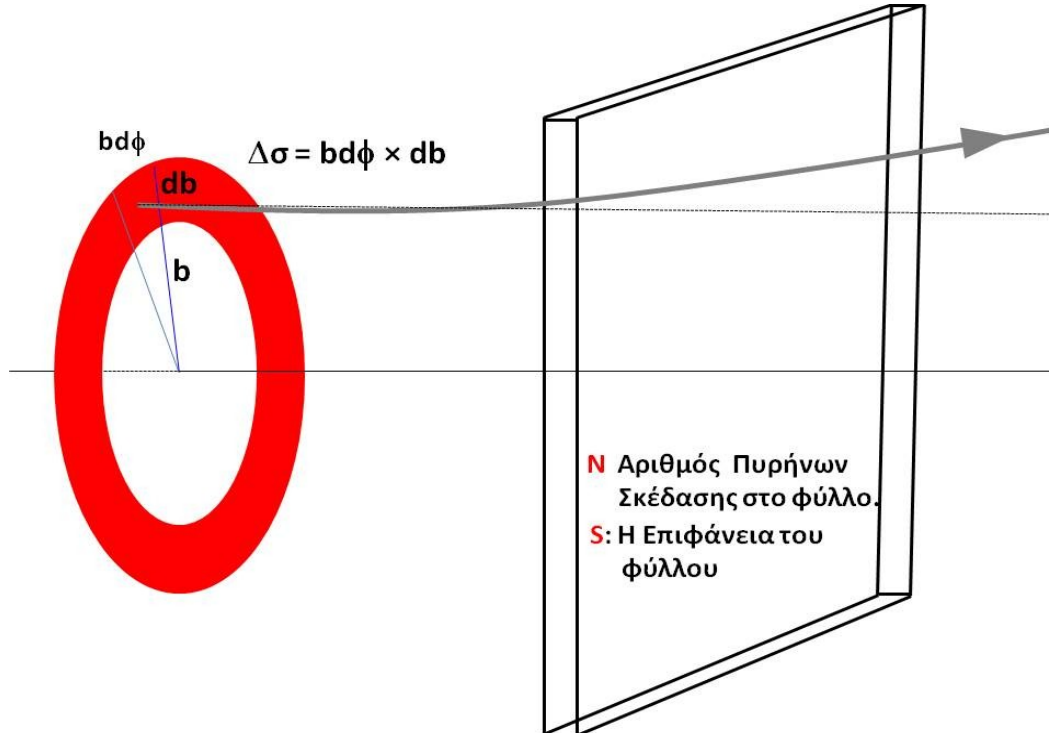
Συνεπώς από (1), (2) και (3) ο ανιχνευτής ανιχνεύει ανά δευτερόλεπτο

$$N = \frac{d\sigma}{d\Omega} \times d\Omega \times F \times T = 377,214,687.0 \text{ fm}^2 \text{ sr}^{-1} \times 2 \times 10^{-4} \text{ sr} \times 5 \times 10^{18} \text{ sec}^{-1} \times 29.54 \times 10^{23} \text{ m}^{-2}$$

$$N = 377,214,687.0 \times 10^{-30} \text{ m}^2 \text{ sr}^{-1} \times 2 \times 10^{-4} \text{ sr} \times 5 \times 10^{18} \text{ sec}^{-1} \times 29.54 \times 10^{23} \text{ m}^{-2}$$

$$N = 1.11 \times 10^{18} \text{ Hz}$$

Η Ενεργός Διατομή και η Πιθανότητα Σκέδασης



Σχήμα 10: Σωματίδια με παράμετρο πρόσπτωσης b σε επιφάνεια $\Delta\sigma$, σκεδάζονται σε γωνία ϑ . Ο Στόχος έχει επιφάνεια S και αριθμό πυρήνων N .



Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Ας υποθέσουμε ότι μία δέσμη σωματιδίων με ροή

$$F = N_0/sec$$

προσπίπτει πάνω σε ένα φύλλο κάποιου υλικού το οποίο έχει N πυρήνες και επιφάνεια S , όπως φαίνεται στο σχήμα 10. Σωματίδια με παράμετρο σκέδασης b ευρισκόμενα στην επιφάνεια $\Delta\sigma = (b \times d\varphi) \times db$ σκεδάζονται σε γωνία θ και αντιπροσωπεύουν το ποσοστό της δέσμης

$$-\frac{dn}{N_0}$$

που σκεδάζεται σε γωνία θ . Το ποσοστό αυτό είναι προφανώς ίσο με την πιθανότητα σκέδασης η οποία δίνεται από

$$\frac{N \times \Delta\sigma}{S} = \frac{(b \times d\varphi) \times db \times N}{S}$$

Άρα

$$-\frac{dn}{N_0} = \frac{N \times \Delta\sigma}{S} = \frac{\rho \delta\chi A_0 \Delta\sigma S}{AS} = \frac{\rho \delta\chi A_0 \Delta\sigma}{A} \Rightarrow$$

$$-\frac{dn}{N_0} = \frac{\rho \delta\chi A_0 \Delta\sigma}{A} = \frac{\rho \delta\chi A_0}{A} \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega \Rightarrow$$

$$-\frac{dn}{dt} = \frac{L \rho \delta\chi A_0}{A} \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega = L \times T \times \frac{d\sigma}{d\Omega} \times \Delta\Omega^1$$

Έτσι καταλήγουμε στην γνωστή από πριν σχέση. Όπως βλέπουμε η πιθανότητα σκέδασης $-\frac{dn}{N_0}$ είναι ανάλογη της ενεργού διατομής.

1 Εάν η διαφορική ενεργός διατομή δεν είναι σταθερά αλλά μεταβάλλεται πάνω στο $\Delta\Omega$ τότε δεν αρκεί απλά να πολλαπλασιάσει κανείς με $\Delta\Omega$ και χρειάζεται ολοκλήρωση.



Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Άσκηση 3: Δείξτε ότι η διαφορική ενεργός διατομή της σκέδασης του Rutherford μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi Z^2 z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{v_0^2 q^4}$$

όπου η μεταφορά ορμής από το προσπίπτον σωματίδιο στο στόχο δίνεται από τη σχέση

$$q = 2m v_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Λύση:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{Zze^2}{16\pi \epsilon_0 KE} \right]^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} = \frac{Z^2 z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{16} \left[\frac{1}{\frac{1}{2} m v_0^2} \right]^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} =$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{16} \frac{1}{\frac{1}{4} m^2 v_0^4} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} = \frac{Z^2 z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4 m^2 v_0^4} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (1)$$

$$q^2 = 4 m^2 v_0^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4 Z^2 z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 m^2}{q^4} \Rightarrow$$

$$\frac{d\sigma}{\sin\theta d\theta d\varphi} = \frac{4 Z^2 z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 m^2}{q^4} \Rightarrow \frac{d\sigma}{\sin\theta d\theta} = \frac{8\pi Z^2 z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 m^2}{q^4} \quad (3)$$

Από ((2) έχουμε ότι

$$dq^2 = 2 m^2 v_0^2 \sin(\theta) d\theta \quad (4)$$

και από (3) και (4) έχουμε ότι

$$\frac{d\sigma}{dq^2} 2 m^2 v_0^2 = \frac{8\pi Z^2 z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 m^2}{q^4} \Rightarrow \frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi Z^2 z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{v_0^2 q^4}$$



Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1 Μέση ελεύθερη διαδρομή (Mean free path)

Μία ενδιαφέρουσα παράμετρος είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή ενός προσπίπτοντος σωματιδίου πάνω σε ένα υλικό. Η παράμετρος αυτή είναι ο μέση διαδρομή του σωματιδίου μέσα στο υλικό μεταξύ δύο διαδοχικών συγκρούσεων με άτομα η πυρήνες του υλικού. Δηλαδή **πόσο μακριά μπορεί να κινηθεί το σωματίδιο πριν συγκρουστεί με άτομα του υλικού**. Ας δούμε λοιπόν πώς μπορεί να υπολογιστεί η μέση ελεύθερη διαδρομή.

Οι ποσότητες που χρειαζόμαστε είναι

1. Η πυκνότητα $\rho \rightarrow \frac{gr}{cm^3}$ (γραμμάρια ανά κυβικό εκατοστό)

2. Το ατομικό βάρος $A \rightarrow \frac{gr}{mole}$ (γραμμάρια ανά mole)

3. Ο αριθμός του Ανογαδρο $N_A \rightarrow \frac{\text{άτομα}}{mole}$ (άτομα ανά mole)

Ο αριθμός ατόμων ανά κυβικό εκατοστό είναι $\frac{N_A \rho}{A}$ ή αντιστρόφα όγκος που καταλαμβάνει ένα

άτομο είναι $\frac{A}{N_A \rho}$.

Προφανώς αν διαιρέσουμε τον όγκο ανά άτομο με την ενεργό διατομή βρίσκουμε την μέση ελεύθερη διαδρομή.

$$l_{MFP} = \frac{A}{N_A \rho \sigma}$$



Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Άσκηση 4: Η ενεργός διατομή νετρίνων-νουκλεονίων (πρωτόνια ή νετρόνια) είναι περίπου ίση με

$$\sigma_{\nu N} = 0.64 \times 10^{-38} \text{ cm}^2 = 0.64 \times 10^{-14} \text{ barn} \quad \text{για ενέργεια νετρίνου περίπου 800 MeV.}$$

Υπολογίστε τη μέση ελεύθερη διαδρομή νετρίνων σε σίδηρο (Fe, Z=26, A=56 gr/mole, $\rho=7.87 \text{ gr/cm}^3$).

Λύση:

$$l_{MFP} = \frac{A}{N_A \rho \sigma} = \frac{56 \text{ gr/mole}}{6.023 \cdot 10^{23} \text{ atoms/mole} \times 7.87 \text{ gr/cm}^3 \times 0.64 \times 10^{-38} \text{ cm}^2} \Rightarrow$$

$$l_{MFP} = \frac{56}{6.023 \times 7.87 \times 0.64} \times 10^{15} \text{ cm} = 1.85 \times 10^{15} \text{ cm} .$$

Όπως παρατηρούμε τα νετρίνα, λόγω της μικρής τους ενεργού διατομής μπορούν να διανύσουν τεράστιες αποστάσεις μέσα στην ύλη χωρίς καν να αντιδράσουν ή να αλλάξουν πορεία.

Άσκηση 5: Η ενεργός διατομή φωτονίων με σίδηρο είναι περίπου ίση με $\sigma_{\gamma Fe} \approx 1 \frac{\text{barn}}{\text{άτομο Fe}}$ για ενέργεια νετρίνου περίπου 800 MeV. Υπολογίστε τη μέση ελεύθερη διαδρομή φωτονίων σε σίδηρο (Fe, Z=26, A=56 gr/mole, $\rho=7.87 \text{ gr/cm}^3$).

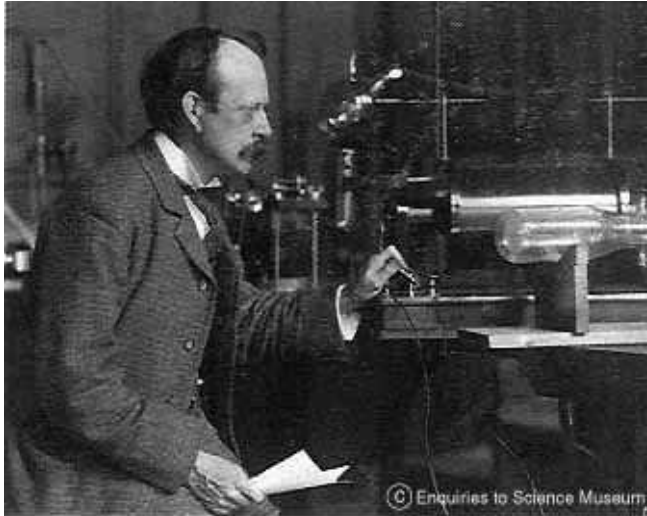
Λύση:

$$l_{MFP} = \frac{A}{N_A \rho \sigma} = \frac{56 \text{ gr/mole}}{6.023 \cdot 10^{23} \text{ atoms/mole} \times 7.87 \text{ gr/cm}^3 \times 1 \times 10^{-24} \text{ cm}^2} \Rightarrow$$

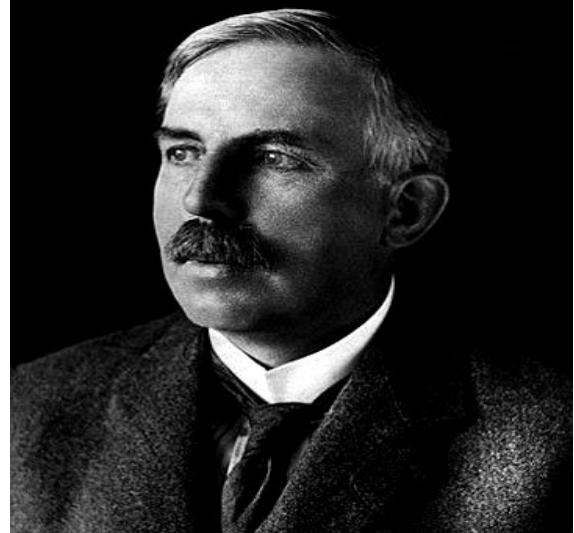
$$l_{MFP} = \frac{56}{6.023 \times 7.87 \times 1} \times 10^1 \text{ cm} = 1.18 \times 10^1 \text{ cm} = 11.8 \text{ cm} .$$

Προφανώς είναι πιά εύκολο να σταματήσει κανείς φωτόνια παρά νετρίνα. Ο λόγος φυσικά είναι πάλι η μεγάλη ενεργός διατομή των φωτονίων σε σχέση με αυτή των νετρίνων. Όπως θα δούμε αργότερα η τα φωτόνια αντιδρούν μέσω της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης ενώ τα νετρίνα μέσω της ασθενούς πυρηνικής αλληλεπίδρασης η οποία είναι πολύ πιο ασθενής από την ηλεκτρομαγνητική και για αυτό τα νετρίνα έχουν μικρότερη ενεργό διατομή από τα φωτόνια.

Κεφάλαιο 1



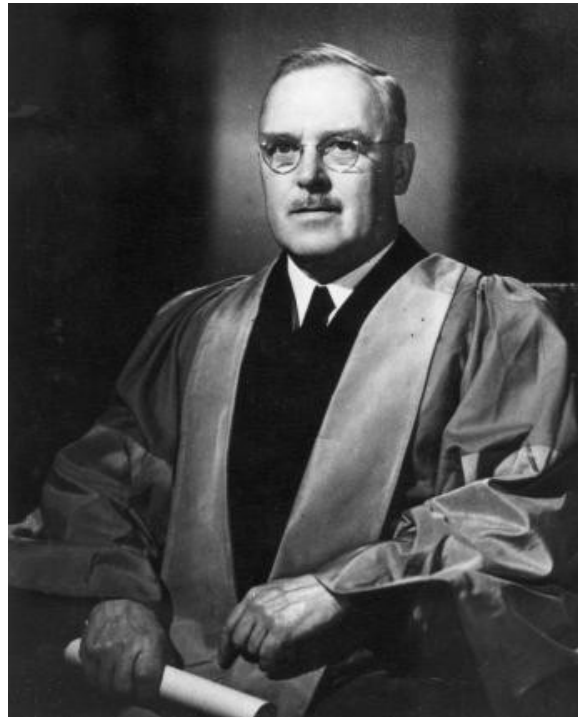
Εικόνα 2: J. J. Thomson



Εικόνα 1: E. Rutherford



Εικόνα 3: H. Geiger



Εικόνα 4: E. Marsden



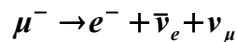
Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Ο νόμος των ραδιενεργών διασπάσεων:

Τα περισσότερα από τα σωματίδια, στοιχειώδη ή μη-στοιχειώδη, έχουν πεπερασμένο χρόνο ζωής και διασπώνται σε άλλα ελαφρότερα σωματίδια. Οι νόμοι που διέπουν την φυσική αυτών των διασπάσεων δεν είναι το θέμα της παρούσας διάλεξης και θα αρκεστούμε να πούμε μόνο ότι έχουν να κάνουν με την αλληλεπίδραση που είναι υπεύθυνη για κάθε συγκεκριμένη διάσπαση. Η πιθανότητα διάσπασης υπολογίζεται με μεθόδους της Κβαντικής Θεωρίας. Οι διασπάσεις των σωματιδίων διέπονται από τον νόμο των ραδιενεργών διασπάσεων ο οποίος είναι το θέμα της παρούσας παραγράφου.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα αρχικό αριθμό N_0 μιονίων σε ηρεμία τα οποία διασπώνται σε τρία άλλα σωματίδια μέσω της αντίδρασης:



Φυσικά δεν διασπώνται όλα τα μίονια μονομιάς. Έστω λοιπόν ότι την χρονική στιγμή t έχουμε $N(t)$ μίονια και ότι στο χρονικό διάστημα μεταξύ t και $t + \Delta t$ παρατηρήθηκαν $\Delta N(t)$ διασπάσεις. Τότε η πιθανότητα διάσπασης σε χρόνο Δt είναι $\Delta N(t)/N(t)$. Ο νόμος των ραδιενεργών διασπάσεων μας λέει ότι η πιθανότητα διάσπασης σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα Δt είναι σταθερά:

$$\frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta N(t)}{N(t)} = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda \quad (5)$$

Αυτό έρχεται σε αντίφαση με αυτό που θα περίμενε κανείς και το οποίο συμβαίνει σε βιολογικά όντα, δηλαδή ότι όσο πιο μεγαλύτερη είναι η ηλικία κάποιου ατόμου τόσο μεγαλύτερη η πιθανότητα να πεθάνει. Για σωματίδια αυτό δεν ισχύει και η πιθανότητα να διασπαστούν (πεθάνουν) παραμένει σταθερή καθ' όλη την διάρκεια της ζωής τους.

Έτσι από την (5) έχουμε ότι:

$$\frac{d \ln N(t)}{dt} = -\lambda \Rightarrow \ln N(t) = -\lambda t + C \Rightarrow N(t) = A e^{-\lambda t}$$

Όπου A είναι μια σταθερά που προέρχεται από την ολοκλήρωση και η οποία καθορίζεται από την αρχική συνθήκη:

$$N_0 = N(0) = A e^{-\lambda \cdot 0} = A \quad \Rightarrow \quad N_0 = A$$



Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Έτσι ο νόμος ραδιενεργών διασπάσεων γράφεται:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda \cdot t} \quad (6)$$

Όπως φαίνεται από την (6) ο πληθυσμός των σωματιδίων μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο και ο ρυθμός μείωσης καθορίζεται από την σταθερά $\lambda = 1/\tau$ όπου τ είναι ο **μέσος χρόνος ζωής** του σωματιδίου. Συνεπώς ο νόμος ραδιενεργών διασπάσεων μπορεί να γραφτεί:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

Η φυσική/πρακτική σημασία του μέσου χρόνου ζωής, τ , είναι ότι μετά την παρέλευση χρόνου τ απομένουν:

$$N(\tau) = \frac{N_0}{e}$$

σωματίδια.

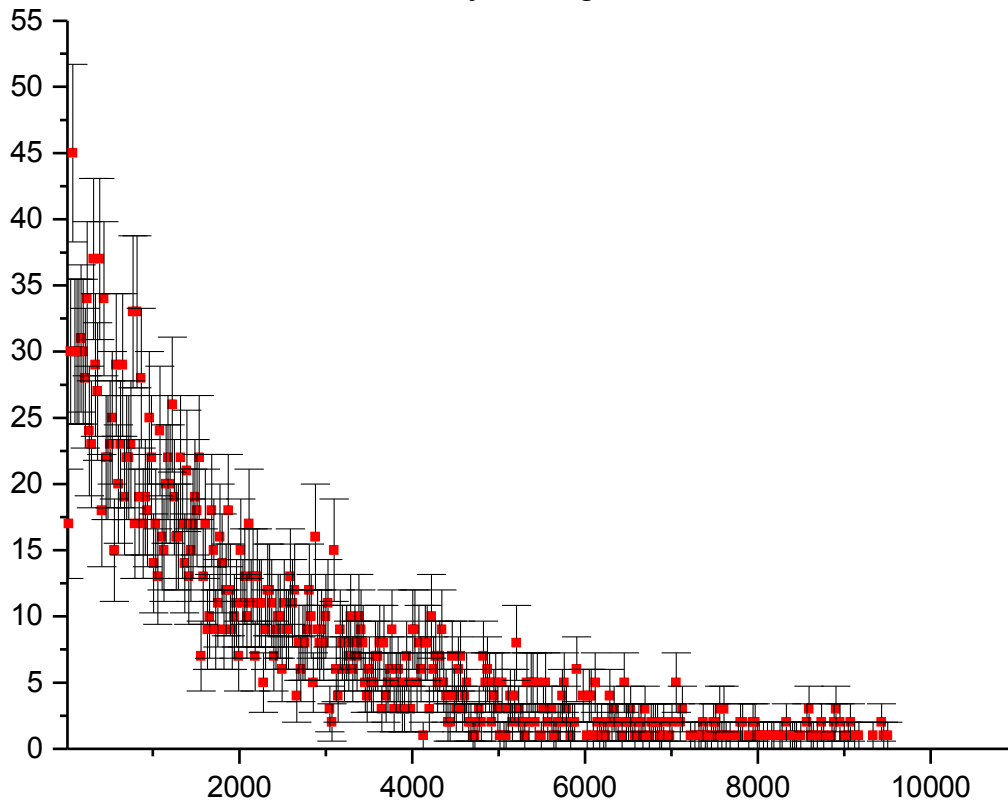
Έτσι στο εξής όταν λέμε ότι ο μέσος χρόνος ζωής σωματιδίου είναι τ δεν εννοούμε ποτέ ότι έχουμε ένα και μοναδικό σωματίδιο (πράγμα πολύ δύσκολο να επιτευχθεί πειραματικά) το οποίο διασπάται ακριβώς μετά από χρόνο τ αλλά εννοούμε ότι έχουμε μια συλλογή σωματιδίων και μετά από χρόνο τ απομένουν $N(\tau) = N_0/e$ από αυτά.

Στο Σχήμα 11 φαίνονται τα αποτελέσματα ενός πειράματος που μετρά το μέσο χρόνο ζωής μιονίων. Δεδομένα από μετρήσεις του αριθμού διασπάσεων ανά μονάδα χρόνου φαίνονται στον άξονα y και ο χρόνος που έγινε η μέτρηση στον άξονα x ($t=0$ είναι ο χρόνος δημιουργίας των σωματιδίων). Όπως φαίνεται εκεί ο αριθμός διασπάσεων ανά μονάδα χρόνου είναι μία εκθετικά φθίνουσα συνάρτηση σε συμφωνία με το νόμο των ραδιενεργών διασπάσεων που προβλέπει ότι:

$$-\Delta N(t) = -N_0 \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \Delta t$$

Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1



Σχήμα 11: Αριθμός γεγονότων διάσπασης μιονίων (άξονας y) σαν συνάρτηση του χρόνου σε $nsec$ (άξονας x) που έλαβε χώρα η διάσπαση. Μαζί με τα δεδομένα (κόκκινο) δίδονται και τα στατιστικά σφάλματα.

Σημαντική παρατήρηση:

Ο νόμος των ραδιενεργών διασπάσεων εκφρασμένος ως

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

ισχύει στο αδρανειακό σύστημα του συγκεκριμένου σωματιδίου που υπόκειται σε διάσπαση.



Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Ορίζουμε τον ρυθμό διασπάσεων (decay rate) ως τον αριθμό μεταπτώσεων ανά μονάδα χρόνου:

$$I(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = N(0)(-\lambda)e^{-\lambda t} \quad (7)$$

όμως από την (7) έχουμε

$$I(0) = N(0)(-\lambda) \quad (8)$$

Έτσι από (7) και (8) έχουμε ότι

$$I(t) = I(0)e^{-t/\tau}$$

Συνεπώς και ο ρυθμός μεταπτώσεων ακολουθεί τον ίδιο νόμο.

Μονάδες ραδιενέργειας:

οι πιο συνηθισμένες μονάδες ραδιενέργειας ορίζονται ως:

- **1 Curie (1 Ci):** Η ποσότητα ραδιενεργού υλικού το οποίο έχει τον ίδιο ρυθμό μεταπτώσεων όσο και ένα γραμμάριο από ράδιο δηλαδή $3.7 \cdot 10^{10} \text{ sec}^{-1}$.
- **1 Becquerel:** Η ποσότητα ραδιενεργού υλικού το οποίο έχει ρυθμό μεταπτώσεων ίσο με 1 sec^{-1} .

Παραδείγματα:

- Ένας άνθρωπος με βάρος περίπου 70 Kgr εκπέμπει ακτινοβολία ίση περίπου με 10^{-7} Ci . Δηλαδή $10^{-7} \times 3.7 \times 10^{10} \text{ sec}^{-1} = 3.7 \cdot 10^3 \text{ sec}^{-1}$ λόγω των ραδιενεργών στοιχείων ${}_{19}^{40}\text{K}$ και ${}_{6}^{14}\text{C}$ τα οποία βρίσκονται στην φύση άρα και στο σώμα μας.
- 1 m^3 αέρας μέσα στο σπίτι εκπέμπει 100 – 1000 Becquerel λόγω του ραδιενεργού αερίου που ονομάζεται ραδόνιο ${}_{86}^{222}\text{Rn}$.



Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Σύγχρονη Φυσική II

Κεφάλαιο 1

Χρονολόγηση υλικών με την μέθοδο του άνθρακα (Carbon Dating)

Στη φύση υπάρχει σε μεγάλες ποσότητες στο στοιχείο του άνθρακα ${}^{12}_6\text{C}$. Συγκρούσεις κοσμικών ακτίνων (πρωτόνια επί το πλείστον) με άτομα στην ατμόσφαιρα έχουν ως αποτέλεσμα την παραγωγή ενός άλλου είδους άνθρακα του ${}^{14}_6\text{C}$ ο οποίος έχει τον ίδιο αριθμό πρωτονίων με τον ${}^{12}_6\text{C}$ αλλά έχει δύο περισσότερα νετρόνια στον πυρήνα του και είναι ραδιενεργός με μέσο χρόνο ζωής ίσο με **5730** χρόνια. Το ποσοστό του ${}^{14}_6\text{C}$ στη φύση είναι πολύ μικρό και αναλογεί περίπου σε ένα άτομο ${}^{14}_6\text{C}$ για κάθε 10^{12} άτομα ${}^{12}_6\text{C}$. Όταν ένας βιολογικός οργανισμός δημιουργείται περιέχει το ίδιο ποσοστό σε ${}^{14}_6\text{C}$ το οποίο αρχίζει να μεταπίπτει. Χρησιμοποιώντας την $I(t) = I(0)e^{-t/\tau}$ με $I(0)$ το ρυθμό μετάπτωσης του ${}^{14}_6\text{C}$ στην ατμόσφαιρα και μετρώντας το $I(t)$ μπορεί κανείς να υπολογίσει την ηλικία υλικών. Μπορούμε πχ. να χρονολογήσουμε μία εικόνα, ένα μπουκάλι κρασί κ.ο.κ.