Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Ειδική Σχετικότητα - Λυμένα Προβλήματα - IV

23.11.2011

Άσκηση 1: Χρησιμοποιώντας την διωνυμική σχέση για προσεγγίσεις υπολογίστε πόσο γρήγορα πρέπει να κινείται χρονόμετρο έτσι ώστε να χτύπα 10 φορές αργότερα ? 100 φορές αργότερα ? 1000 φορές αργότερα ? Αιτιολογήστε τις προσεγγίσεις που θα κάνετε. Δώστε τις απαντήσεις σαν συνάρτηση του $\varepsilon = 1-\beta$ όπου $\beta = V/c$ και V η ταχύτητα του χρονομέτρου.

Λύση:

Επειδή διαστολή του χρόνου δίδεται από την σχέση $\Delta t = \gamma \Delta\tau$, αυτό σημαίνει ότι το $\gamma = 10,\ 100,\ 1000$. Άρα το χρονόμετρο πρέπει να έχει ταχύτητα που προσεγγίζει την ταχύτητα του φωτός. Δηλαδή $\beta \approx 1 \quad \varepsilon = 1-\beta \ll 1$. Συνεπώς η διωνυμική σειρά πρέπει να γραφτεί ως προς το ε έτσι ώστε δυνάμεις του ε που είναι μεγαλύτερες της πρώτης να είναι αμελητέες σε σχέση με το ε και να μπορούν να αγνοηθούν. Έτσι οι δύο πρώτοι όροι της διωνυμικής σειράς θα μας δώσουν μία αρκετά καλή προσέγγιση.

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} = (1-(1-\varepsilon)^2)^{-1/2} = (1-(1 - 2\varepsilon + \ldots +))^{-1/2} \approx (2\varepsilon)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \Rightarrow$$

$$\gamma^2 \approx \frac{1}{2\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx \frac{1}{2\gamma^2} \quad \Rightarrow \quad \beta = 1-\varepsilon \approx 1-\frac{1}{2\gamma^2}$$

Άρα:

1. Για 10 φορές επιβράδυνση έχουμε:

$$\beta = 1-\varepsilon \approx 1-\frac{1}{2\times 10^2} = 1-\frac{1}{200} = 0.995$$

2. Για 100 φορές επιβράδυνση έχουμε:

$$\beta = 1-\varepsilon \approx 1-\frac{1}{2\times 100^2} = 1-\frac{1}{20000} = 0.99995$$

3. Για 1000 φορές επιβράδυνση έχουμε:

$$\beta = 1-\varepsilon \approx 1-\frac{1}{2\times 1000^2} = 1-\frac{1}{2000000} = 0.9999995$$

Άσκηση 2: Οι κοσμικές ακτίνες οι οποίες βομβαρδίζουν τη γη αποτελούνται σε μεγάλο ποσοστό από πρωτόνια. Τα πρωτόνια αυτά συγκρούονται με πρωτόνια και νετρόνια στους πυρήνες των ατόμων της ατμόσφαιρας και δημιουργούν κυρίως πιόνια και σε μικρότερα ποσοστά άλλα βαρύτερα σωματίδια το μεγαλύτερο ποσοστό των οποίων είναι καόνια. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε ένα θετικά φορτισμένο πιόνιο το οποίο παράγεται σε ύψος $h = 1.2\mathrm{Km}$ πάνω από την επιφάνεια της γης. Ο μέσος χρόνος ζωής φορτισμένων πιονίων είναι $\tau_{\pi^+} = 2.6\times 10^{-8}s$ και διασπώνται κυρίως μέσω της αντίδρασης $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$. Πόσο γρήγορα πρέπει να κινούνται τα πιόνια για να φτάσουν στην επιφάνεια της γης πριν διασπαστούν ? Θεωρήστε ότι $V=(1-\varepsilon)c$ και δώστε το αποτέλεσμα σαν συνάρτηση του του ε .

Λύση:

Όπως και στην προηγούμενη άσκηση:

$$\gamma = \approx (2\varepsilon)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \Rightarrow \qquad (1)$$

Η μικρότερη δυνατή ταχύτητα με την οποίαν το μιόνιο διασπάται ακριβώς πάνω στην επιφάνεια της γης δίνεται από την σχέση:

$$h = \beta c\gamma\tau \Rightarrow \beta\gamma = \frac{h}{c\tau} \qquad (2)$$

Μέσω της (1) έχουμε:

$$\beta\gamma \approx \frac{(1-\varepsilon)}{\sqrt{2\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} - \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \qquad (3)$$

Ο δεύτερος όρος μπορεί να αγνοηθεί καθότι το ε είναι πολύ μικρό και συνεπώς το $\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$ είναι πολύ μεγαλύτερο του $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Έτσι από (2) και (3) έχουμε ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} = \frac{h}{c\tau} \Rightarrow \varepsilon = \frac{(c\tau)^2}{2h^2} \Rightarrow V=(1-\frac{(c\tau)^2}{2h^2})c = (1-\frac{(7.8m)^2}{2(1200m)^2})c = (1-2.1\times 10^{-5})c$$

δηλαδή $V = (1-2.1\times 10^{-5})c = 0.999979c$.

Άσκηση 3: Τα μιόνια έχουν μέσο χρόνο ζωής $\tau_\mu = 2.2\times 10^{-6} s$. Θεωρήστε θετικό μιόνιο το οποίο παράγεται από διάσπαση θετικού πιονίου σε ύψος $h = 6000 m$ και με αρχική ταχύτητα $V = 0.998c$ στην διεύθυνση της γης.

1. Θα φτάσει το μιόνιο την επιφάνεια της γης ;h θα διασπαστεί στην πορεία του προς την γη ? (Υπολογίστε την απόσταση που θα κινηθεί το μιόνιο πριν διασπαστεί).
2. Παρατηρητής ευρισκόμενος πάνω στο μιόνιο μετρά το ύψος του μιονίου την στιγμή που δημιουργείται. Τι ύψος μετρά ?

Λύση:

1. Η απόσταση που διανύει το μιόνιο στο σύστημα της γης δίνεται από την σχέση

$$\Delta l = V \Delta t \quad (1)$$

όπου Δt είναι ο χρόνος ζωής του μιονίου στο σύστημα της γης (δηλαδή στο ίδιο σύστημα στο οποίο ορίζουμε το Δl). Ο μέσος χρόνος ζωής του μιονίου έχει υποστεί την σχετικιστική διαστολή χρόνου και είναι

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau \quad (2)$$

Συνεπώς από (1) και (2) έχουμε:

$$\Delta l = V \gamma \Delta \tau \quad (3)$$

Άρα πρέπει να λογαριάσουμε το

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.998)^2}} = 15.82 \quad (4)$$

Έτσι από (3) και (4) έχουμε ότι

$$\Delta l = 0.998\times 3\times 10^8 m/s \times 15.82\times 2.210^{-6} s = 10420.3 m$$

το οποίο είναι μεγαλύτερο από τα 6000 m και έτσι το μιόνιο θα φτάσει στην επιφάνεια τής γης πριν διασπαστεί.

2. Ας δούμε πως φαίνονται τα πράγματα από παρατηρητή που βρίσκεται πάνω στο μιόνιο. Αυτός μετρά χρόνο $\Delta \tau = 2.2\times 10^{-6} s$ και παρατηρεί την γη να τον πλησιάζει με ταχύτητα $V = 0.998c$. Έτσι υπολογίζει ότι το μιόνιο θα διανύσει απόσταση $\Delta l_0 = 0.998 c \Delta \tau = 660 m$. Επειδή όμως η γη κινείται ως προς αυτόν,

το μήκος $h = 6000\,m$ (στο σύστημα της γης) έχει υποστεί συστολή μήκους στο σύστημα του και αυτός το μετρά ίσο με $h_0 = \frac{h}{\gamma} = \frac{6000\,m}{15.82} = 379.27 < 660\,m$ έτσι και αυτός βλέπει ότι θα συγκρουστεί με την γη πριν προλάβει να διασπαστεί.

Όπως βλέπουμε και οι δύο παρατηρητές καταλήγουν στο ίδιο συμπέρασμα όπως απαιτείται από την πρώτη αρχή της ειδικής σχετικότητας που ορίζει ότι διάφοροι παρατηρητές σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα πρέπει να καταλήγουν στα ίδια συμπεράσματα για τα φυσικά φαινόμενα.

Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Ειδική Σχετικότητα - Λυμένα Προβλήματα - IV

Άσκηση 4: Όταν φορτισμένα σωματίδια περάσουν μέσα από ανιχνευτές μέτρησης φορτισμένων σωματιδίων (counters) ιονίζουν τα άτομα του υλικού τού ανιχνευτή τα οποία όταν μεταπίπτουν εκπέμπουν φωτόνια. Τα φωτόνια συλλέγονται από διατάξεις που λέγονται φωτοπολλαπλασιαστές (phototubes) οι οποίοι μετατρέπουν τα σήματα των φωτονίων σε ηλεκτρονικά σήματα. Η δίοδος λοιπόν ενός φορτισμένου σωματιδίου από ένα μετρητή χαρακτηρίζεται από ένα συγκεκριμένο ηλεκτρονικό παλμό ο οποίος αντιστοιχεί σε ένα χαρακτηριστικό φορτίο. Συνεπώς το συνολικό φορτίο που συλλέγεται από τους φωτοπολλαπλασιαστές ενός μετρητή φορτισμένων σωματιδίων είναι ανάλογο του αριθμού των σωματιδίων που πέρασαν μέσα από τον ανιχνευτή. Τα ηλεκτρονικά σήματα αυτά μπορούν να διαβαστούν από υπολογιστικές διατάξεις οι οποίες μετρούν τελικά τον αριθμό των σωματιδίων. Αυτός είναι ένας τρόπος να μετρήσουμε στο εργαστήριο τον αριθμό σωματιδίων μιας δέσμης και για αυτό το λόγο αυτές οι πειραματικές διατάξεις ονομάζονται στα αγγλικά Counters.

Μία δέσμη θετικά φορτισμένων καονίων, K^+ , με $\beta = \sqrt{3}/2$, διαπερνά δύο μετρητές φορτισμένων σωματιδίων (counters) οι οποίοι βρίσκονται σε απόσταση $D = 9\text{m}$. Οι δέσμη δεν χάνει ταχύτητα όταν διαπερνά τους μετρητές. Ο πρώτος μετρητής μετρά 1000 και ο δεύτερος 250. Η διαφορά αποδίδεται στις διασπάσεις των καονίων στην πορεία τους από τον ένα μετρητή στον άλλο. Υπολογίστε το μέσο χρόνο ζωής του K^+ .

Λύση:

Χρησιμοποιώντας το νόμο των ραδιενεργών διασπάσεων και την σχετικιστική διαστολή του μέσου χρόνου ζωής έχουμε ότι:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\gamma\tau} \Rightarrow \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = -\frac{t}{\gamma\tau} = -\frac{D}{\beta\gamma c\tau} \Rightarrow \tau = -\frac{D}{\beta\gamma c \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)} \quad (1)$$

όμως

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-3/4}} = 2 \Rightarrow \beta\gamma = \sqrt{3} \quad (2)$$

έτσι από (1) και (2) έχουμε:

$$\tau = -\frac{9\text{m}}{\sqrt{3}\times 3\times 10^8 m\, s^{-1} \ln\left(\frac{250}{1000}\right)} = 1.25\, 10^{-8} s = 12.5 ns$$

Άσκηση 5: Φορτισμένα πιόνια παράγονται όταν μια δέσμη πρωτονίων από ένα επιταχυντή συγκρούεται με ένα στόχο. Τα παραγόμενα πιόνια κινούνται κατά την διεύθυνση της αρχικής δέσμης πρωτονίων. Τα φορτισμένα πιόνια έχουν μέσο χρόνο ζωής $\tau_{\pi^\pm} = 2.6\times10^{-8}s$ και συνεπώς ένα μέρος από αυτά διασπάται κατά την διάρκεια του πειράματος. Δυο μετρητές φορτισμένων σωματιδίων έχουν εγκατασταθεί ακριβώς μετά το στόχο καθώς και σε απόσταση $S = 30\mathrm{m}$ από το στόχο στην διεύθυνση των πρωτονίων . Αν ο λόγος των μετρήσεων των δύο μετρητών είναι **0.75** υπολογίστε το γ των πιονίων.

Λύση:

Εφαρμόζουμε το νόμο των ραδιενεργών διασπάσεων και έχουμε:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\gamma\tau} \Rightarrow \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = -\frac{t}{\gamma\tau} = -\frac{S}{\beta\gamma c\tau} \Rightarrow \beta\gamma = -\frac{S}{c\tau\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)} \Rightarrow$$

$$\beta\gamma = -\frac{S}{c\tau\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)} = \frac{-30\,m}{2.6\times10^{-8}\times3\times10^{8}\times\ln(0.75)} = 13.37 \qquad (1)$$

Για τον υπολογισμό του γ μπορούμε να ακολουθήσουμε δυο μεθόδους:

(1) Ακριβής μέθοδος χωρίς προσέγγιση:

$$\beta^2\gamma^2+1 = \gamma^2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{\beta^2\gamma^2+1} = \sqrt{13.37^2+1} = 13.41$$

(2) Με διωνυμική προσέγγιση:

$$\beta\gamma \approx \frac{(1-\varepsilon)}{\sqrt{2\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}-\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2(\beta\gamma)^2} = \frac{1}{2\times13.37^2} = 13.38$$

Όπως φαίνεται η διωνυμική προσέγγιση είναι μόνο 2% μακριά από την ακριβή λύση.

Άσκηση 6: Δύο διαστημόπλοια **A** και **B** με μήκος $L_0 = 100\mathrm{m}$ (όπως μετράται από παρατηρητές ευρισκόμενους στο σύστημα του κάθε διαστημοπλοίου) κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση και περνά το ένα δίπλα από άλλο. Όργανα μέτρησης πάνω στο **A** μετρούν το χρόνο που χρειάζεται το εμπρόσθιο μέρος του **B** για να περάσει από το ένα άκρο του **A** μέχρι το άλλο και τον βρίσκουν $\Delta t_A = 5\times 10^{-6} s$. Υπολογίστε:

1. Την σχετική ταχύτητα με την οποία κινείται το **A** σε σχέση με το **B**.
2. Τον χρόνο που μετρά χρονόμετρο πάνω στο διαστημόπλοιο **B** από την στιγμή που περνά η αρχή του **A** δίπλα από το χρονόμετρο μέχρι την στιγμή πού περνά το τέλος του **A** δίπλα από το χρονόμετρο.

Λύση:

1. Η απάντηση είναι απλή

$$\Delta t_A \cdot V = L_0 \Rightarrow V = \frac{L_0}{\Delta t_A} = \frac{100\, m}{5\times 10^{-6} s} = 20\times 10^6 m/s$$

   με τίποτα το αξιοσημείωτο μία και το μήκος και ο χρόνος μετρούνται στο ίδιο σύστημα του **A**.

2. Στην περίπτωση αυτή ο χρόνος μετράται στο **B.** Το μήκος του A είναι L_0 στο σύστημα **A** και όχι στο **B.** Άρα ο παρατηρητής στο **B** μετρά L_0/γ ,δηλαδή μετρά ένα μήκος που έχει υποστεί σχετικιστική συστολή. Συνεπώς:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \approx 1.002 \quad \text{και} \quad L = \frac{L_0}{\gamma} \approx 99.78\, m$$. Άρα μετρά χρόνο ίσο με:

$$\Delta t_B = \frac{L_0}{\gamma V} = \frac{99.78\, m}{20\times 10^6 m/s} = 4.989\times 10^{-6} s$$