Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Ειδική Σχετικότητα - Λυμένα Προβλήματα - III

2.11.2011

Άσκηση 1: Θεωρήστε δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς $O,\ O'$ και ας υποθέσουμε ότι το δεύτερο κινείται με ταχύτητα V κατά τη διεύθυνση του άξονα των χ σε σχέση με το πρώτο. Τη χρονική στιγμή που οι αρχές των δύο συστημάτων συμπίπτουν, μία πηγή φωτός στο Ο εκπέμπει δέσμη φωτός στη διεύθυνση του άξονα των χ. Υπολογίστε την ταχύτητα του φωτός και στα δύο συστήματα. Χρησιμοποιήστε το μετασχηματισμό Lorentz.

<u>Λύση:</u> Στο σύστημα Ο η ταχύτητα του φωτός είναι:

$$\frac{x}{t} = c$$

Στο σύστημα Ο' η ταχύτητα του φωτός είναι:

$$\frac{x'}{t'}$$

Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς του Lorentz θα υπολογίσουμε την ταχύτητα του φωτός στο σύστημα Ο'.

$$x' = \gamma(x-\beta ct) = \gamma ct(\frac{x}{ct}-\beta) = \gamma ct(1-\beta) = ct\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = ct\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad (1)$$

$$ct' = \gamma(ct-\beta x) = \gamma ct(1-\frac{\beta x}{ct}) = \gamma ct(1-\beta) = ct\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad (2)$$

Συνεπώς από (1) και (2) έχουμε:

$$x' = ct' \Rightarrow \frac{x'}{t'} = c$$

Άσκηση 2: Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς του Lorentz, ότι ένα σφαιρικό ηλεκτρομαγνητικό κύμα στο αδρανειακό συστήματα αναφοράς O παραμένει σφαιρικό στο αδρανειακό συστήματα αναφοράς O'

Λύση: Αρχίζουμε με τους μετασχηματισμούς Lorentz:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση της επιφάνειας του κύματος στο **Ο'** έχουμε ότι

$$(ct')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = \gamma^2(ct - \beta x)^2 - \gamma^2(x - \beta ct)^2 - y^2 - z^2 =$$

$$= \gamma^2(c^2t^2 - x^2) + \beta^2\gamma^2(x^2 - c^2t^2) - y^2 - z^2 = \gamma^2(1 - \beta^2)(c^2t^2 - x^2) - y^2 - z^2 \qquad (1)$$

Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς τη σχέση:

$$\gamma^2(1 - \beta^2) = \frac{1 - \beta^2}{(\sqrt{1 - \beta^2})^2} = 1 \qquad (2)$$

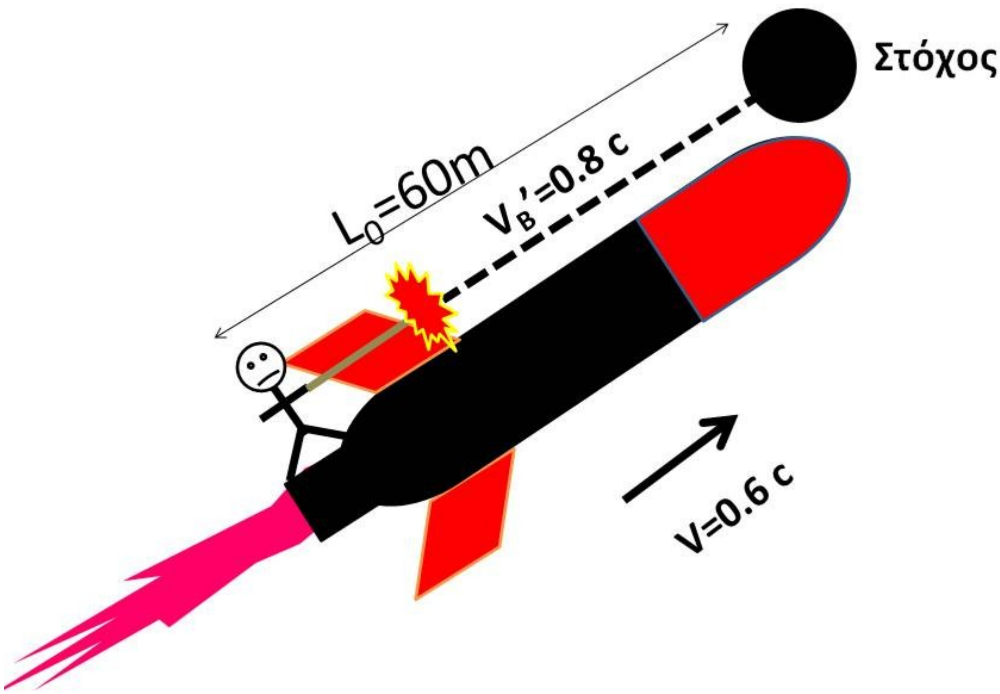
έτσι από τις (1) και (2) έχουμε:

$$(ct')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Με λίγα λόγια η σχέση

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz. Στη συγκεκριμένη περίπτωση του φωτός έχουμε ότι: $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$. Γενικά για σωματίδια με μη μηδενική μάζα έχουμε: $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ (σωματίδια με μη μηδενική μάζα έχουν πάντα ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός στο κενό.



Άσκηση 3: Άνθρωπος πυροβολεί από το πίσω μέρος πυραύλου στόχο, ο οποίος βρίσκεται στην αρχή του πυραύλου, όπως φαίνεται στο πιο πάνω σχήμα. Στο αδρανειακό σύστημα του πυραύλου ο πύραυλος έχει μήκος 60m και ή σφαίρα κινείται με ταχύτητα 0.8c.

1. Υπολογίστε τον χρόνο πτήσης της σφαίρας, όπως μετράται από τον άνθρωπο πάνω στον πύραυλο.

Ας υποθέσουμε ότι η ταχύτητα του πυραύλου σε σχέση με την γη είναι 0.6c.

2. Υπολογίστε το χρόνο πτήσης της σφαίρας, όπως μετράται από παρατηρητή στη γη.

<u>Λύση:</u> Η άσκηση αυτή περιλαμβάνει 2 γεγονότα: Γεγονός **1** είναι ο πυροβολισμός και γεγονός **2** όταν η σφαίρα χτυπά το στόχο.

1. Στο αδρανειακό σύστημα του πυραύλου έχουμε ότι το μήκος του είναι:

$$L_0 = 60\,m$$

και στο ίδιο σύστημα η σφαίρα έχει ταχύτητα:

$$V_B' = 0.8\,c$$

Άρα ο χρόνος δίνεται από την σχέση:

$$\delta t' = \frac{L_0}{0.8\,c} = \frac{60\,m}{0.8\times 3\,10^8\,m/s} = 2.5\,10^{-7}\,s$$

2. Υπάρχουν δύο τρόποι να λύσει κανείς το δεύτερο ερώτημα. Ο πρώτος έχει περισσότερες πράξεις και αρχίζουμε με αυτόν. Επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς Lorentz όπως τους έχουμε μάθει:

$$ct' = \gamma(ct-\beta x) \qquad (1)$$

$$x' = \gamma(x-\beta ct) \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε για την χρονική διάφορα των δύο γεγονότων:

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t-\beta\Delta x) \qquad (3)$$

και για τη χωρική διαφορά των δύο γεγονότων:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x-\beta c\Delta t) \Rightarrow \beta\Delta x' = \beta\gamma(\Delta x-\beta c\Delta t) \qquad (4)$$

Οι (3) και (4) αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Ζητείται να υπολογίσουμε το Δt, άρα πρέπει να βρούμε τρόπο να απομακρύνουμε τον δεύτερο άγνωστο Δx. Προσθέτοντας τις (3) και (4) έχουμε:

$$c\Delta t'+\beta\Delta x' = \gamma c\Delta t-\gamma\beta^2 c\Delta t = \gamma(1-\beta^2)c\Delta t = \sqrt{1-\beta^2}\,c\Delta t \quad \Rightarrow$$

$$c\Delta t = \gamma(c\Delta t'+\beta\Delta x')$$

Ο δεύτερος τρόπος είναι αρκετά πιο γρήγορος. Θεωρήστε παρατηρητή πάνω στον πύραυλο. Για αυτόν το παρατηρητή το σύστημα της γης κινείται με ταχύτητα **-V**. Έτσι ο μετασχηματισμός Lorentz από το O' στο O έχει την μορφή:

$$c\Delta t = \gamma(c\Delta t' + \beta\Delta x')$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι φυσικά το ίδιο όπως και με την προηγούμενη μέθοδο καθότι η φυσική είναι ίδια ανεξάρτητα από το που βρίσκεται ο παρατηρητής. Αντικαθιστώντας νούμερα έχουμε:

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \beta\frac{\Delta x'}{c}) = \frac{2.5\times10^{-7}\,s + \frac{0.6\times60}{\sqrt{1-0.6^2}}}{\sqrt{1-0.6^2}} = 4.63\times10^{-7}\,s$$

Η άσκηση αυτή είναι κλασσικό παράδειγμα, όπου η κατάλληλη επιλογή του συστήματος αναφοράς μπορεί να ευκολύνει σημαντικά τους υπολογισμούς.