Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Ειδική Σχετικότητα - Λυμένα Προβλήματα - ΙΙ

2.11.2011

Άσκηση 1: Χρησιμοποιήστε την διωνυμική σχέση

$$(1+x)^N = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{N!}{i!(N-i)!} \right) x^i$$

για να υπολογίστε το $\sqrt{1-V^2/c^2}$ για (α) $V = 0.01c$ και (β) $V = 0.9998c$

Λύση:

(α) Η διωνυμική σχέση είναι ιδανική για προσεγγίσεις όταν $x \ll 1$ (πολύ μικρότερο τις μονάδας). Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$V = 0.01c \Rightarrow \beta = \frac{V}{c} = 0.01 \Rightarrow \beta^2 = 10^{-4}$$

Η διωνυμική σχέση γράφεται

$$(1+x)^N \simeq 1 + Nx + \frac{N(N-1)}{2}x^2 + ...+$$

Όπως βλέπουμε, για $x = \beta^2$ ο πρώτος όρος είναι της τάξης του 10^0, ο δεύτερος της τάξης του 10^{-4}, ο τρίτος της τάξης του 10^{-8} και συνεχίζεται έτσι μέχρι το άπειρο με τον κάθε όρο να είναι τέσσερις τάξεις μεγέθους μικρότερος από τον προηγούμενο. Συνεπώς με τους δύο πρώτους όρους έχουμε αποτέλεσμα που είναι ακριβές περίπου μέχρι το 4-5 δεκαδικό ψηφίο (διότι ο επόμενος όρος είναι της τάξης του 10^{-8}). Άρα

$$\sqrt{1-V^2/c^2} = (1-\beta^2)^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2}10^{-4} = 1 - 0.00005 = 0.99995$$

(β) Στην περίπτωση αυτή το **β** δεν είναι πολύ μικρότερο της μονάδας, αντιθέτως είναι σχεδόν μονάδα. Άρα για να εφαρμόσουμε την διωνυμική σχέση χρειαζόμαστε μία ποσότητα, **ε**, που είναι πολύ μικρότερη της μονάδας και η οποία ορίζεται από την $\beta = 1 - \epsilon$. Έτσι έχουμε

$$\sqrt{1-V^2/c^2} = (1-\beta^2)^{1/2} = (1 - (1-\epsilon)^2)^{1/2} \simeq (1 - (1-2\epsilon))^{1/2} =$$

$$\sqrt{2\epsilon} = \sqrt{2(1-0.9998)} = \sqrt{2\times 0.0002} = \sqrt{4\times 10^{-4}} = 0.02$$

Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Ειδική Σχετικότητα - Λυμένα Προβλήματα - II

Άσκηση 2: Θεωρήστε δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς **O** και **O'** . Το **O'** κινείται με σχετική ταχύτητα $V = -0.8\,c$ κατά τη διεύθυνση του κοινού άξονα των χ. Παρατηρητής στο **O** μετρά (παρατηρεί) εκπομπή φωτός προερχόμενη από το χωροχρονικό σημείο (γεγονός) $t= 5\times10^{-4}\,s;\ x = 100\,km;\ y = 10\,km;\ z = 1\,km$. Υπολογίστε τι μετρά παρατηρητής που βρίσκεται ακίνητος στο αδρανειακό σύστημα **O'.** Θεωρήστε ότι τα δύο συστήματα αναφοράς **O** και **O'** συμπίπτουν όταν $t = t' = 0$.

Λύση:

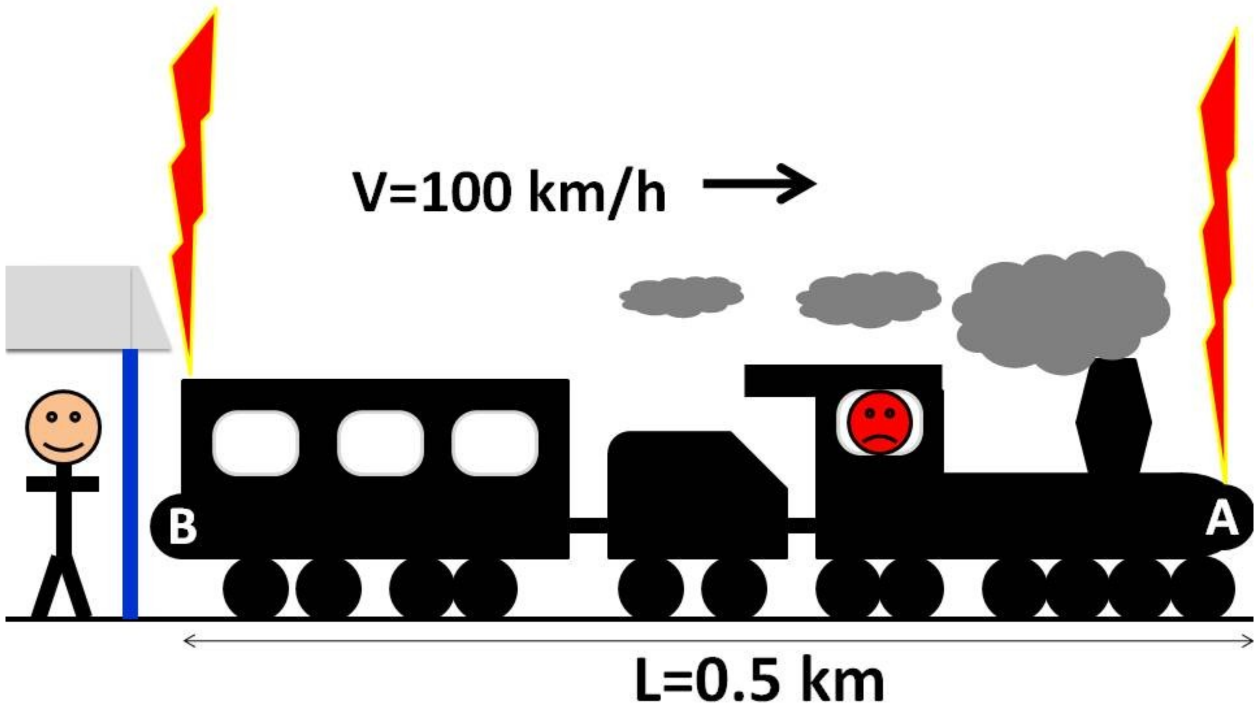
Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Lorentz της αντίστοιχης διάλεξης έχουμε:

$$ct' = \gamma(ct-\beta x) = \frac{ct-(V/c)x}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow t' = \frac{t-(V/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{5\times10^{-4}\,s - \dfrac{(-0.8)(100\,km)}{3\times10^5\,km/s}}{\sqrt{1-0.8^2}} = 12.8\times10^{-4}\,s$$

$$x' = \gamma(x-\beta ct) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x-Vt) = \frac{100\,km-(-0.8\times3\times10^5\,km/s)(5\times10^{-4}\,s)}{\sqrt{1-0.8^2}} = 367\,km$$

$$y' = y = 10\,km$$
$$z' = z = 1\mathrm{km}$$

Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Ειδική Σχετικότητα - Λυμένα Προβλήματα - ΙΙ



Άσκηση 3: Τρένο μήκους 0.5 km (όπως μετράται από παρατηρητή πάνω στο τρένο) κινείται με ταχύτητα 100 km/h. Ακίνητος παρατηρητής ευρισκόμενος στο σταθμό παρατηρεί δύο κεραυνούς οι οποίοι χτυπούν το τρένο ταυτόχρονα στα δύο άκρα του. Με τι χρονική διαφορά φαίνονται οι δυο κεραυνοί σε επιβάτη του τρένου ?

Λύση:

Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε δύο γεγονότα:

Γεγονός 1: Κεραυνός χτυπά την αρχή **Α** του τρένου.

Γεγονός 2: Κεραυνός χτυπά το τέλος **Β** του τρένου.

Στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή στο σταθμό τα δυο γεγονότα έχουν συντεταγμένες:

Γεγονός 1: $(ct_A ; x_A, y_A, z_A)$, **Γεγονός 2:** $(ct_B = ct_A ; x_B, y_B, z_B)$ και <u>επειδή ο παρατηρητής στο αυτός μετρά τα δύο γεγονότα να συμβαίνουν ταυτόχρονα, έχουμε ότι $t_A = t_B$.</u>

Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Ειδική Σχετικότητα - Λυμένα Προβλήματα - ΙΙ

Στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή στο τρένο τα δυο γεγονότα έχουν συντεταγμένες:

Γεγονός 1: $(ct_A';x_A',y'_A,z'_A)$, **Γεγονός 2:** $(c'_B';x_B',y_B',z_B')$ όπου

$$x_A' - x_B' = 500\,m$$

Η ταχύτητα του τρένου (κινούμενο σύστημα αναφοράς **O'**) ως προς τον παρατηρητή στο σταθμό (ακίνητο σύστημα αναφοράς **O**)είναι

$$V = 100\,km/h = \frac{10^5\,m}{3600\,s} = 27.8\,m/s$$

Οι χωροχρονικές συντεταγμένες του κάθε γεγονότος στα δύο συστήματα αναφοράς συνδέονται μεταξύ τους με τούς μετασχηματισμούς Lorentz

$$c(t_A-t_B)=\frac{c(t'_A-t'_B)-(-\beta)(x'_A-x'_B)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \Rightarrow (t_A-t_B)=\frac{(t'_A-t'_B)+(\frac{\beta}{c})(x'_A-x'_B)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(t'_A-t'_B)+(\frac{V}{c^2})(x'_A-x'_B)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$0=(t'_A-t'_B)+(\frac{V}{c^2})(x'_A-x'_B)\Rightarrow(t'_A-t'_B)=-(\frac{27.8\,m/s}{(3\times10^8\,m/s)^2})(500\mathrm{m})=-4.02\times10^{-13}\,s$$

Δηλαδή ο παρατηρητής πάνω στο τρένο βλέπει τον κεραυνό στο Α να χτυπά πρώτος και τον κεραυνό στο Β δεύτερος.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ένα παράδειγμα όπου γεγονότα τα οποία συμβαίνουν ταυτόχρονα σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς δεν παρατηρούνται ταυτόχρονα σε άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται σε σχέση με το πρώτο. Το συμπέρασμα αυτό πηγάζει από το γεγονός ότι η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα και συνεπώς οι '*σωστοί'* μετασχηματισμοί χωροχρονικών συντεταγμένων μεταξύ των δύο συστημάτων είναι οι μετασχηματισμοί του Lorentz.

Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Ειδική Σχετικότητα - Λυμένα Προβλήματα - ΙΙ

Άσκηση 4: Παρατηρητής στο σύστημα **O** βλέπει δύο γεγονότα τα οποία λαμβάνουν χώρα σε απόσταση **600 m** το ένα από το άλλο και με χρονική διαφορά $8\times10^{-7}\,s$. Με τι ταχύτητα πρέπει να κινείται δεύτερος παρατηρητής έτσι ώστε να δει τα δυο γεγονότα να συμβαίνουν ταυτόχρονα ?

Λύση:

$$c(t'_A-t'_B)=\gamma[c(t_A-t_B)-\beta(x_A-x_B)] = 0 \Rightarrow c(t_A-t_B)-\beta(x_A-x_B) = 0 \Rightarrow$$

$$\beta=\frac{c(t_A-t_B)}{(x_A-x_B)}=\frac{3\times10^8\,m/s\times8\times10^{-7}s}{600\,m} = 0.4$$

Άσκηση 5: Πόσο γρήγορα πρέπει να κινείται ένας πύραυλος έτσι ώστε παρατηρητής επί της γης να τον βλέπει να έχει συσταλεί στο 99% ?

Λύση:

$$\frac{L}{L_0}=0.99=\sqrt{1-\beta^2}\Rightarrow\beta=0.141\Rightarrow V=0.141\,c$$

Άσκηση 6: Υπολογίστε τη συστολή Lorentz της διαμέτρου της γης όπως φαίνεται από παρατηρητή **O'** που βρίσκεται ακίνητος σε σχέση με τον ήλιο. Η ταχύτητα της γης στο σύστημα **O'** είναι $3\times10^4\,m/s$ και η διάμετρος της είναι $D=12756\,km$.

Λύση:

$$D=D_0\sqrt{1-\beta^2}=D_0\left(1-\left(\frac{3\times10^4}{3\times10^8}\right)^2\right)^{1/2}\simeq D_0\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)\times10^{-8}\right)\Rightarrow$$

$$D-D_0=-0.5\times D_0\times10^{-8}=-\frac{12756\times10^3\,m}{2}\times10^{-8}=0.064\,m=6.4\,cm$$

Φυσικό Τμήμα Παν/μιο Ιωαννίνων - Ειδική Σχετικότητα - Λυμένα Προβλήματα - II

Άσκηση 7: Μεταλλική ράβδος βρίσκεται υπό γωνία $\theta'=35^o$ ως προς τον άξονα χ' στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς **O'** το οποίο κινείται με ταχύτητα V στη διεύθυνση του άξονα χ ως προς το σύστημα **O.** Υπολογίστε την ταχύτητα του **O'** αν η ράβδος φαίνεται σε γωνία $\theta=45^o$ ως προς τον άξονα χ στο σύστημα **O.**

Λύση:

Στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς O' έχουμε

$$L_y'=L'\sin\theta' \qquad (1)$$

$$L_x'=L'\cos\theta' \qquad (2)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς O μόνο η χ-συνιστώσα υπόκειται σε συστολή μήκους μέσω της (1) και (2) έχουμε

$$L_y=L_y'=L'\sin\theta' \qquad (3)$$

$$L_x=\frac{L_x'}{\gamma}=\frac{L'\cos\theta'}{\gamma} \qquad (4)$$

Τέλος από (3) και (4) έχουμε

$$\tan\theta=\frac{L_y}{L_x}=\gamma\tan\theta'\Rightarrow\frac{1}{\gamma}=\sqrt{1-\beta^2}=\frac{\tan\theta'}{\tan\theta}=\frac{\tan 30^o}{\tan 45^o}\Rightarrow\beta=0.816$$

Άσκηση 8: Ένας κύβος έχει όγκο $1000\,cm^3$, όπως μετράται από παρατηρητή που βρίσκεται σε ηρεμία σε σχέση με τον κύβο. Δεύτερος παρατηρητής (ευρισκόμενος σε ηρεμία στο σύστημα **O'** κινείται με ταχύτητα $0.8c$ σε σχέση με τον πρώτο κατά τη διεύθυνση μιας από τις ακμές του κύβου. Υπολογίστε τον όγκο που βλέπει ο δεύτερος παρατηρητής.

Λύση:

Μόνο οι ακμή κατά τη διεύθυνση της κίνησης υφίσταται συστολή:

$$l_x' = \frac{l_x}{\gamma} = l_x\sqrt{1-\beta^2} = 10\text{cm}\sqrt{1-0.8^2} = 6\text{cm} \Rightarrow$$

Οι άλλες διαστάσεις παραμένουν οι ίδιες και στα δύο συστήματα. Έτσι ο όγκος που βλέπει ο παρατηρητής στο **O'** είναι

$$V' = l_x' \times l_y' \times l_z' = 10\,cm \times 10\text{cm} \times 6\,cm = 600\,cm^3$$