Θέμα 3ο:

(α) Δείξτε ότι η ποσότητα $E^2-(cp)^2=m^2c^4$ παραμένει αναλλοίωτη σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. [5 μονάδες]

(β) Δείξτε μέσω της σχέσης του (α) ότι η ορμή ενός φωτονίου δίνεται από τη σχέση

$$p = \frac{hf}{c}$$

όπου h η σταθερά του Plank και f η συχνότητα . [5 μονάδες]

(γ) Έστω φωτεινή πηγή η οποία κινείται με ταχύτητα $V=\beta c$ προς τα δεξιά πάνω στο θετικό άξονα x ενός ακίνητου συστήματος αναφοράς Ο. Η πηγή εκπέμπει φωτόνια συχνότητας f_0 τα οποία ανιχνεύονται από ακίνητο παρατηρητή που βρίσκεται στο σημείο ($x=0,\ y=0,\ z=0$). Δείξτε χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Lorentz ότι η συχνότητα των φωτονίων f τα οποία ανιχνεύει ο ακίνητος παρατηρητής δίνεται από την σχέση Doppler

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}f_0$$

[8 μονάδες]

(δ) Ουδέτερο πιόνιο το οποίο κινείται προς την θετική κατεύθυνση του άξονα x, διασπάται σε δύο φωτόνια. Το ένα φωτόνιο κινείται προς την θετική κατεύθυνση του άξονα x στο σύστημα του εργαστηρίου και το άλλο προς την αρνητική. Το φωτόνιο που κινείται προς τη θετική κατεύθυνση έχει διπλάσια ενέργεια από αυτό που κινείται στην αρνητική κατεύθυνση. Αποδείξτε ότι το πιόνιο κινείται με ταχύτητα ίση με το ένα τρίτο της ταχύτητας του φωτός. [7 μονάδες]

Λύση:

(α)

Δίνεται ότι $E' = \gamma(E-\beta cp_x)$, $cp'_x = \gamma(cp_x-\beta E)$, $cp'_y = cp_y$, $cp'_z = cp_z$. Συνεπώς ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι $E = \gamma(E'+\beta cp_x')$, $cp_x = \gamma(cp_x'+\beta E')$, $cp_y = cp_y'$, $cp_z = cp_z'$.

Έτσι έχουμε ότι $E^2-(cp)^2=m^2c^4 \Rightarrow \quad \gamma^2(E'+\beta cp'_x)^2-\gamma^2(cp'_x+\beta E')^2-c^2p'^2_y-c^2p'^2_z=m^2c^4 \Rightarrow$

$\gamma^2E'^2+\gamma^2\beta^2c^2p'^2_x-\gamma^2c^2p'^2_x-\gamma^2\beta^2E'^2-c^2p'^2_y-c^2p'^2_z=m^2c^4 \Rightarrow \quad E'^2-(cp')^2=m^2c^4$

(β)

Για την ενέργεια και τη μάζα του φωτονίου ισχύει ότι $E_\gamma=hf$, $m_\gamma=0$. Συνεπώς έχουμε ότι

$E^2-(cp)^2=m^2c^4 \ \Rightarrow \ (hf)^2-c^2p_\gamma^2=0 \ \Rightarrow \ p_\gamma=hf/c$

(γ)

Το φωτόνιο κινείται στην αρνητική κατεύθυνση του άξονα x και έχουν ορμή και ενέργεια $p=-hf_0/c$, $E=hf_0$. Συνεπώς ο παρατηρητής στο $x=0,\ y=0,\ z=0$ μετράει ενέργεια

$E=\gamma(hf_0+\beta c(-hf_0/c))=\gamma(1+\beta)hf_0 \Rightarrow \quad hf=\gamma(1+\beta)hf_0 \Rightarrow f=\sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}\,f_0$

(δ)

Για το φωτόνιο που κινείται στην κατεύθυνση του πιονίου έχουμε ότι $E_\gamma^+=\sqrt{\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}}f_0$ και για το φωτόνιο που κινείται αντίθετα με την κατεύθυνση του πιονίου έχουμε ότι $E_\gamma^-=\sqrt{\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}}f_0$. Συνεπώς έχουμε ότι

$$\frac{E_\gamma^+}{E_\gamma^-}=\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}=2 \Rightarrow \beta=1/3$$

Θέμα 4ο:

Θεωρήστε δέσμη θετικά φορτισμένων πιονίων π^+ με ολική ενέργεια 220 MeV στο σύστημα του εργαστηρίου. Τα π^+ διασπώνται σε ένα θετικά φορτισμένο μιόνιο και ένα νετρίνο μιονίου μέσω της αντίδρασης $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$.

(α) Υπολογίστε την κινητική ενέργεια των π^+ . [5 μονάδες]

(β) Υπολογίστε τα β και γ του π^+ στο σύστημα του εργαστηρίου. [5 μονάδες]

(γ) Αν ο μέσος χρόνος ζωής των πιονίων είναι $\tau = 2.6 \times 10^{-8} sec$ υπολογίστε την μέση απόσταση που διανύουν τα πιόνια στο εργαστήριο πριν διασπαστούν. [5 μονάδες]

(δ) Υπολογίστε την ορμή και ολική ενέργεια του νετρίνου και του μιονίου στο αδρανειακό σύστημα του πιονίου. [5 μονάδες]

(ε) Υπολογίστε την μέγιστη ολική ενέργεια και ορμή του μιονίου στο σύστημα του εργαστηρίου.[5 μονάδες]

Λύση:

(α) $E_{\pi^+} = 220\,\mathrm{MeV}$ $\quad m_{\pi^+} c^2 = 140\,\mathrm{MeV}$ $\quad KE_{\pi^+} = E_{\pi^+} - m_{\pi^+} c^2 = 220 - 140\,\mathrm{MeV} = 80\,\mathrm{MeV}$

(β) $\gamma = \dfrac{E_{\pi^+}}{m_{\pi^+} c^2} = \dfrac{220}{140} = 1.5714$ $\quad \beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}} = 0.7714$

(γ) $l = \beta c \gamma \tau = 9.46\,\mathrm{m}$

(δ) Από διατήρηση της ενέργειας στο σύστημα του πιόνιου έχουμε ότι: $m_{\pi^+} c^2 \;=\; E_{\nu_\mu} + E_\mu$ (1)

Οι ενέργειες του νετρίνου και μιονίου δίνονται από:

$$E_{\nu_\mu} = \sqrt{(q_{\nu_\mu} c)^2 + m_{\nu_\mu}^2 c^4} \;=\; q_{\nu_\mu} c \tag{2}$$

$$E_\mu = \sqrt{(p_\mu c)^2 + m_\mu^2 c^4} \tag{3}$$

Από διατήρηση της ορμής στο σύστημα του πιόνιου έχουμε ότι:

$$\vec{P}_{\pi^+} \;=\; 0 \;=\; \vec{q}_{\nu_\mu} + \vec{p}_\mu \;\Rightarrow\; |\vec{q}_{\nu_\mu}| \;=\; |\vec{p}_\mu| \;=\; q \tag{4}$$

Από (1),(2),(3),(4) έχουμε ότι

$$m_{\pi^+} c^2 \;=\; q_{\nu_\mu} c + \sqrt{(p_\mu c)^2 + m_\mu^2 c^4} \;\Rightarrow\; m_{\pi^+} c^2 - qc \;=\; \sqrt{(qc)^2 + m_\mu^2 c^4} \;\Rightarrow$$
$$(m_{\pi^+} c^2 - qc)^2 \;=\; (qc)^2 + m_\mu^2 c^4 \;\Rightarrow\; m_{\pi^+}^2 c^4 + q^2 c^2 - 2 m_{\pi^+} c^2 q c \;=\; (qc)^2 + m_\mu^2 c^4 \;\Rightarrow$$

$$m_{\pi^+}^2 c^4 - 2 m_{\pi^+} c^2 q c \;=\; m_\mu^2 c^4 \;\Rightarrow\; m_{\pi^+}^2 c^4 - m_\mu^2 c^4 \;=\; 2 m_{\pi^+} c^2 q c \;\Rightarrow\; q c \;=\; \frac{m_{\pi^+}^2 c^4 - m_\mu^2 c^4}{2 m_{\pi^+} c^2} \Rightarrow$$

$$q c \;=\; \frac{(140\;\; MeV)^2 - (106\;\; MeV)^2}{2 \times (140\;\; MeV)} \;=\; 30\;\; MeV \;\Rightarrow\; q \;=\; 30\, MeV/c$$ δηλαδή $E_{\nu_\mu} \;=\; 30\, MeV$

και $E_\mu = 110\;\; MeV$

(ε) Λαμβάνοντας υπ' όψιν τους μετασχηματισμούς Loretntz συμπεραίνουμε ότι το μιόνιο έχει την μέγιστη ενέργεια του όταν εκπέμπεται στη κατεύθυνση του πιονίου. Έτσι έχουμε:

$$E_\mu^{LAB} \; = \; \gamma\left(E_\mu + \beta\, p_\mu c\right) \; = \; 1.5714 \times \left(110 + 0.7714 \times 30\right) MeV \; \approx \; 209.2\, MeV$$

$$P_\mu^{LAB} \; = \; \sqrt{\left(E_\mu^{LAB}\right)^2 - m_\mu^2 c^4} \; \approx \; 180.4\, MeV/c$$

Τυπολόγιο σχετικότητας

Οι μάζες του πιονίου, μιονίου και νετρίνου δίνονται από $m_{\pi^+} c^2 = 140\text{MeV}$, $m_{\mu^+} c^2 = 106\, MeV$ και $m_{\nu_\mu} c^2 \approx 0 \;\; MeV$. Οι μετασχηματισμοί του Lorentz για ενέργεια και ορμή από το σύστημα Ο στο Ο' δίνονται από: $E' \; = \; \gamma\left(E - \beta c p_x\right)$, $cp'_x \; = \; \gamma\left(c p_x - \beta E\right)$, $cp'_y \; = \; c p_y$, $cp'_z \; = \; c p_z$ όπου E, p_x, p_y, p_z είναι η ενέργεια και οι τρεις συντεταγμένες της ορμής στο αδρανειακό σύστημα Ο και E', p'_x, p'_y, p'_z οι ίδιες ποσότητες στο αδρανειακό σύστημα Ο' . Οι μεταβλητές β, γ δίδονται από τις σχέσεις: $\beta = V/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ όπου V είναι η ταχύτητα του αδρανειακού συστήματος Ο' σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα Ο και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό.