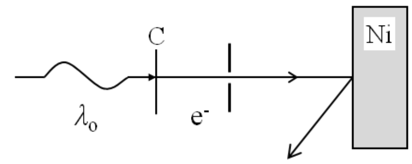
Θέμα 2^o: Φωτόνια ακτίνων Χ μήκους κύματος λ_o προσπίπτουν σε στόχο από C («ακίνητων, ελεύθερων» ηλεκτρονίων). Συλλέγονται μόνο τα ηλεκτρόνια που σκεδάζονται κατά την κατεύθυνση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, όπως στο σχήμα.



(α) Σχεδιάστε και αιτιολογήστε την κατεύθυνση της ορμής των σκεδαζόμενων φωτονίων, μήκους κύματος λ, που αντιστοιχούν στα ηλεκτρόνια που συλλέγονται. [Μονάδες 7]

(β) Τα ηλεκτρόνια προσπίπτουν σε κρύσταλλο Ni όπου και υφίστανται περίθλαση Bragg. Μετρώντας τη γωνία περίθλασης βρίσκουμε ότι το μήκος κύματος de Broglie που τους αντιστοιχεί είναι λ_{dB}=0.9075 pm. Βρείτε το μήκος κύματος λ_o. [Μονάδες 10]

(γ) Βρείτε το μέτρο της ορμής (εκφρασμένο σε MeV/*c*) και την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων (MeV). [Μονάδες 8]

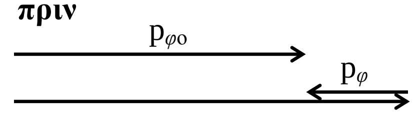
Δίδονται: $m_e c^2$=0.511 MeV, $\Delta\lambda=\lambda_C(1-\cos\theta)$, $\lambda_C= h/m_e c$ =2.42 pm, $\hbar c$ = 197.3 eV·nm=197.3 MeV·fm.

Λύση:

(α) Εφόσον τόσο το εισερχόμενο φωτόνιο όσο και το εξερχόμενο ηλεκτρόνιο έχουν μηδενική ορμή στον άξονα *y*, η διατήρηση της ορμής απαιτεί ότι και το εξερχόμενο φωτόνιο έχει μηδενική ορμή στον άξονα αυτόν. Συνεπώς είτε $\theta=0^o$ είτε $\theta=180^o$. Για $\theta=0^o$ η γνωστή σχέση Compton (τυπολόγιο) δίνει $\Delta\lambda=0$. Δηλαδή το εισερχόμενο και το εξερχόμενο φωτόνιο θα είχαν την ίδια ενέργεια και το ηλεκτρόνιο θα έπρεπε να παραμείνει ακίνητο, ενώ γνωρίζουμε ότι κινείται. Συνεπώς $\theta=180^o$ και το φωτόνιο σκεδάζεται προς κατεύθυνση αντίθετη του ηλεκτρονίου.

(β) Με δεδομένο πλέον ότι $\theta=180^o$ και όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα, η διατήρηση της ορμής στον άξονα *x* επιβάλλει ότι,

$$p_{\varphi o} = p_e - p_\varphi \qquad (1)$$



όπου $p_{\varphi o}$ και p_φ η ορμή του προσπίπτοντος και σκεδαζόμενου φωτονίου, αντίστοιχα, και p_e η ορμή του ηλεκτρονίου. Για τα φωτόνια έχουμε,

$$\mathbf{p}_{\varphi o} = \frac{h\nu_o}{c} = \frac{h}{\lambda_o} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{p}_\varphi = \frac{h}{\lambda}, \qquad (2\alpha)$$

ενώ για το ηλεκτρόνιο χρησιμοποιούμε τη σχέση de Broglie

$$\mathbf{p}_e = \frac{h}{\lambda_{dB}}. \qquad (2\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις (2α,β) στην (1) έχουμε,

$$\frac{h}{\lambda_o} = \frac{h}{\lambda_{dB}} - \frac{h}{\lambda} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{\lambda_o} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_{dB}} \qquad (3)$$

Επιπλέον, από τη σχέση Compton έχουμε ότι,

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o = \lambda_C(1-\cos 180^o) \qquad \rightarrow \qquad \lambda - \lambda_o = 2\cdot\lambda_C \qquad (4)$$

Οι (3) και (4) αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, εκ των οποίων αυτός που ενδιαφέρει είναι το λ_o. Απαλείφοντας το λ, καταλήγουμε στη δευτεροβάθμια εξίσωση,

$$\lambda_o^2 + 2\cdot(\lambda_C - \lambda_{dB})\cdot\lambda_o - 2\cdot\lambda_C\cdot\lambda_{dB} = 0, \qquad (5)$$

της οποίας η μία ρίζα είναι αρνητική και απορρίπτεται. Η άλλη ρίζα είναι λ_o=1.072 pm.

(γ) Η ορμή του ηλεκτρονίου υπολογίζεται μέσω της (2β):

$$\mathbf{p_e} = \frac{h}{\lambda_{\mathbf{dB}}} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_{\mathbf{dB}}} \cdot \frac{1}{c} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 197.3\,\mathbf{MeV} \cdot \mathbf{fm}}{0.9075 \times 10^{3}\,\mathbf{fm}} \cdot \frac{1}{c} = 1.366\ \mathbf{MeV}/c \qquad (6)$$

όπου τα pm μετατράπηκαν σε fm.
Η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων υπολογίζεται από τη σχέση,

$$\mathbf{K_e} = \sqrt{\mathbf{p_e^2}c^2 + m_{\mathbf{e}}^{\mathbf{2}}c^4} - m_{\mathbf{e}}c^2 = m_{\mathbf{e}}c^2\left[\sqrt{\mathbf{1} + \left(\frac{\mathbf{p_e}c}{m_{\mathbf{e}}c^2}\right)^{\mathbf{2}}} - 1\right]$$

και χρησιμοποιώντας την γνωστή μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου και την (6) βρίσκουμε

$$\mathbf{K_e} = 0.511 \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1.366}{0.511}\right)^2} - 1\right] = 0.947\,\mathbf{MeV}$$