Θέμα 1ο: (α) Μέσω της σχέσης της φασματικής πυκνότητας ενέργειας μέλανος σώματος του Planck,

$$u(f,T)df = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{f^3}{e^{hf/kT}-1}df$$

βρείτε την αντίστοιχη κατανομή $u(\lambda,T)d\lambda$ ως προς το μήκος κύματος λ. Στην παραπάνω σχέση, $h=2\pi\hbar$ είναι η σταθερά Planck, c η ταχύτητα του φωτός στο κενό, k η σταθερά Boltzmann, T η απόλυτη θερμοκρασία του μέλανος σώματος και f η συχνότητα της ακτινοβολίας. [Μονάδες 6]

(β) Αποδείξτε ότι το μήκος κύματος λ_{max}, για το οποίο η $u(\lambda,T)$ εμφανίζει μέγιστο, υπακούει στη σχέση $\lambda_{max}\cdot T$=*σταθερά*. Δίδεται ότι οι λύσεις της εξίσωσης $5\cdot(e^x-1)-x\cdot e^x=0$ είναι $x_1=0$ και $x_2=4.96511$. [Μονάδες 7]

(γ) Σε ένα τζάκι μετράμε τη θερμοκρασία $\theta=4185$ °C των κάρβουνων που καίγονται και το μήκος κύματος $\lambda_{max}=650$ nm που εκπέμπουν. Επίσης, μετρήσεις της ακτινοβολίας που φτάνει στη Γη από την επιφάνεια του Ήλιου έδειξαν ότι $\lambda_{max}=499.655$ nm. Ποια η θερμοκρασία στην επιφάνεια του Ήλιου; [Μονάδες 6]

(δ) Εάν ακτινοβολία από τον Ήλιο, μήκους κύματος λ_{max}, προσπέσει σε μεταλλική επιφάνεια Li, παράγει φωτοηλεκτρόνια μέγιστης κινητικής ενέργειας $K_{max}=0.18$ eV. Ποιο το έργο εξαγωγής του Li ($\hbar c$ = 197.3 eV·nm); [Μονάδες 6]

<u>Λύση:</u>

(α) Δίνεται ότι $$u(f,T)df = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{f^3}{e^{hf/kT}-1}df \qquad (1)$$

Επίσης έχουμε ότι $$c=\lambda f \Rightarrow f=\frac{c}{\lambda} \Rightarrow df=-c\frac{d\lambda}{\lambda^2} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) έχουμε ότι $$u(\lambda,T)df = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}df \qquad (3)$$

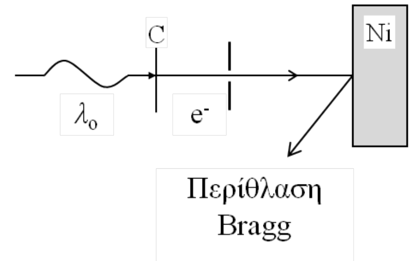
(β) $$\frac{du}{d\lambda}=8\pi hc[-5\lambda^{-6}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}+\frac{1}{\lambda^5}(-1)e^{hc/\lambda kT}\frac{1}{[e^{hc/\lambda kT}-1]^2}\frac{hc}{kT}\frac{(-1)}{\lambda^2}]=0 \quad \Rightarrow$$

$\dfrac{e^{hc/\lambda kT}}{e^{hc/\lambda kT}-1}\dfrac{hc}{\lambda kT}=5$ και θέτοντας $x=\dfrac{hc}{\lambda kT}$ βλέπουμε ότι παίρνουμε την εξίσωση $xe^x=5(e^x-1)$ η οποία μας δίνει $\dfrac{hc}{\lambda_{max}}kT=4.96511 \Rightarrow \dfrac{hc}{4.96511k}=\lambda_{max}T$ δηλαδή αποδείξαμε το νόμο του Wien. Η μηδενική λύση της πιο πάνω εξίσωσης προφανώς δεν έχει φυσική σημασία και απορρίπτεται.

(γ) $$\lambda^1_{max}T_1 = \lambda^2_{max}T_2 \Rightarrow (4185+273.15)\times 650\,nm = 499.655\,nm\times T_2 \Rightarrow T_2=5799.60\,K=5526.45\,C^0$$

(δ) $$hf=W+KE_e \Rightarrow W=\frac{hc}{\lambda}-KE_e=\frac{2\pi\hbar c}{\lambda}-KE_e=\frac{2\pi\times 197.3\,nm\,eV}{499.655\,nm}-0.18\,eV=2.3\,eV$$

Θέμα 2ο: Φωτόνια ακτίνων X μήκους κύματος λ_o προσπίπτουν σε στόχο από C («ακίνητων, ελεύθερων» ηλεκτρονίων). Συλλέγονται μόνο τα ηλεκτρόνια που σκεδάζονται κατά την κατεύθυνση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, όπως στο σχήμα.



(α) Σχεδιάστε και αιτιολογήστε την κατεύθυνση της ορμής των σκεδαζόμενων φωτονίων, μήκους κύματος λ, που αντιστοιχούν στα ηλεκτρόνια που συλλέγονται.

[Μονάδες 7]

(β) Τα ηλεκτρόνια προσπίπτουν σε κρύσταλλο Ni όπου και υφίστανται περίθλαση Bragg. Μετρώντας τη γωνία περίθλασης βρίσκουμε ότι το μήκος κύματος de Broglie που τους αντιστοιχεί είναι λ_{dB}=0.9075 pm. Βρείτε το μήκος κύματος λ_o. [Μονάδες 10]

(γ) Βρείτε το μέτρο της ορμής (εκφρασμένο σε MeV/*c*) και την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων (MeV). [Μονάδες 8]

Δίδονται: m_ec^2=0.511 MeV, $\Delta\lambda=\lambda_C(1-\cos\theta)$, $\lambda_C = h/m_ec$ =2.42 pm, $\hbar c$ = 197.3 eV·nm=197.3 MeV·fm.

Λύση:

(α) Διατήρηση της ορμής στον άξονα y απαιτεί ότι το εξερχόμενο φωτόνιο να έχει μηδενική ορμή στον άξονα y (αφού το εισερχόμενο φωτόνιο και το εξερχόμενο ηλεκτρόνιο έχουν μηδενική ορμή στον άξονα y). Συνεπώς ή θ=0 ή θ=180ο . Για θ=0 έχουμε ότι $\Delta\lambda$=0. Δηλαδή το εισερχόμενο και το εξερχόμενο φωτόνιο έχουν την ίδια ενέργεια. Άρα το εξερχόμενο ηλεκτρόνιο πρέπει να είναι ακίνητο το οποίο είναι άτοπο (υποθέσαμε ότι κινείται). Έτσι έχουμε ότι θ=180ο και $\Delta\lambda=\lambda_C(1-\cos180^o)=2\lambda_C$

(β,γ) Έχουμε ότι μήκος κύματος του εξερχόμενου φωτονίου είναι μεγαλύτερο από το λ_o κατά

$$\Delta\lambda = \lambda_o - \lambda = 2\lambda_C = 2\times 2.42 \text{ pm} = 4.84 \text{ pm} \qquad (1)$$

Διατήρηση ενέργειας δίνει

$$hf_0 + m_ec^2 = hf + E_e \Rightarrow h(f_0 - f) = E_e - m_ec^2 \quad\Rightarrow\quad hc\left(\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda}\right) = KE_e \quad\Rightarrow\quad hc\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda\lambda_0}\right) = KE_e \quad\Rightarrow$$

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda\lambda_0}\right) = \frac{KE_e}{2\pi\hbar c} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{\Delta\lambda}{(\lambda_0+\Delta\lambda)\lambda_0}\right) = \frac{KE_e}{2\pi\hbar c} \qquad (2)$$

Για να υπολογίσουμε το λ_o χρειαζόμαστε την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου και την ορμή του τα οποία μας ζητούνται έτσι και αλλιώς στο ερώτημα (γ).

$$\lambda_e = \frac{h}{p} \quad\Rightarrow\quad cp = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_e} = \frac{2\times\pi\times 197.3\, nm\, eV}{0.9075\, pm} = 1366\,\text{KeV} = 1.366\,\text{MeV} \quad\Rightarrow\quad p = 1.366\,\text{MeV/c}$$

$$E_e = \sqrt{(pc)^2 + m_e^2c^4} \;=\; \sqrt{(1366)^2 + 511^2c^4}\,\text{KeV} \;=\; 1458.5\,\text{KeV}$$

$$KE_e = \sqrt{(pc)^2 + m_e^2c^4} - m_ec^2 \;=\; \sqrt{(1366)^2 + 511^2c^4} - 511\,\text{KeV} \;=\; 947\,\text{KeV} \qquad (3)$$

Από (1), (2) και (3) έχουμε ότι

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{(\lambda_0+\Delta\lambda)\lambda_0}\right) = \frac{947\,\text{KeV}}{2\times\pi\times 197.3\,\text{eV}\,\text{nm}} = 763.9\, nm^{-1}$$

Λύνοντας την δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς λ_o βρίσκουμε ότι λ_o=1.072 pm