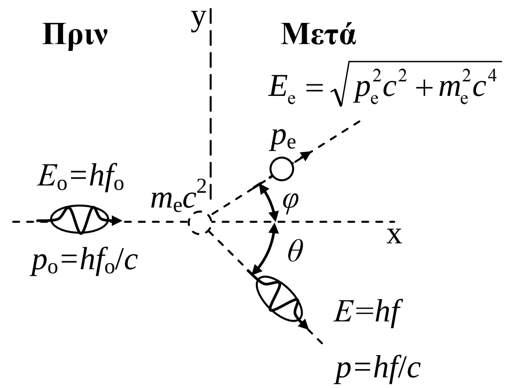
Θέμα 4ο, Απαντήσεις:

(α) Το γενικό σχήμα της σκέδασης Compton φαίνεται δίπλα. Από το σχήμα, εφόσον ανιχνεύουμε μόνο τα ηλεκτρόνια που εκπέμπονται κατά την κατεύθυνση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, συνάγεται ότι φ=0. Στην περίπτωση αυτή η συνιστώσα της ορμής του ηλεκτρονίου στη διεύθυνση y είναι μηδέν. Επακόλουθα, και η y-συνιστώσα της ορμής του σκεδαζόμενου φωτονίου είναι μηδέν. Συνεπώς, είτε $\theta=0^{\circ}$ είτε $\theta=180^{\circ}$.

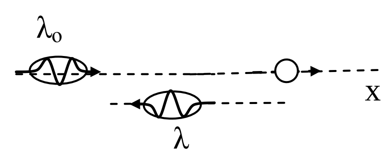


Εάν $\theta=0^{\circ}$ τότε από τη σχέση Compton,

$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o = \lambda_C(1-\cos\theta) = 0$

οπότε, τα μήκη κύματος, άρα και οι συχνότητες, του προσπίπτοντος και σκεδαζομενου φωτονίου θα ήταν ίσα. Τότε όμως, από την αρχή διατήρησης της ενέργειας,

$$E_o + m_e c^2 = E + E_e$$



η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου θα ήταν μηδέν

$K = E_e - m_e c^2 = E_o - E = hf_o - hf = hf_o - hf_o = 0.$

ενώ γνωρίζουμε ότι δεν είναι. Συνεπώς $\theta=180^{\circ}$ και το σκεδαζόμενο φωτόνιο έχει ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη κατεύθυνση σε σχέση με το προσπίπτον. Τα μήκη κύματος συνδέονται μέσω της σχέσης,

$$\lambda - \lambda_o = 2\lambda_C \qquad (1)$$

(β) Η κινητική ενέργεια,

$$K = E_e - m_e c^2 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2$$

γράφεται ως,

$$K = m_e c^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{p_e c}{m_e c^2} \right)^2} - 1 \right] \qquad (2)$$

Ορίζοντας

$\xi \equiv \dfrac{p_e c}{m_e c^2}$ που είναι το ζητούμενο

και χρησιμοποιώντας το δεδομένο ότι $K = m_e c^2/4$, η (2) γράφεται,

$$\frac{m_e c^2}{4} = m_e c^2 \left[\sqrt{1+\xi^2} - 1 \right] \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{4} = \left[\sqrt{1+\xi^2} - 1 \right]$$

από όπου, λύνοντας ως προς ξ βρίσκουμε ότι

$$\xi = 3/4. \qquad (3)$$

(γ) Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω συλλογισμούς (και c=λf), η αρχή διατήρηση της ορμής στον άξονα x γράφεται,

$$\frac{hf_o}{c} = p_e \cos\varphi + \frac{hf}{c}\cos\theta \qquad \rightarrow \qquad \frac{h}{\lambda_o} = p_e - \frac{h}{\lambda}$$

από όπου, χρησιμοποιώντας την (1) και την (3),

$$p_e = \frac{h}{\lambda_o} + \frac{h}{\lambda_o + 2\lambda_C} \qquad \rightarrow \qquad p_e c = \frac{3}{4} m_e c^2 = hc\frac{2(\lambda_o + \lambda_C)}{\lambda_o(\lambda_o + 2\lambda_C)}$$

η οποία, μέσω του ορισμού του μήκους κύματος Compton, $\lambda_C = h/m_e c$, μπαίνει στη μορφή,

$$\frac{3}{4} = \frac{2\left(1 + \frac{\lambda_o}{\lambda_C}\right)}{\frac{\lambda_o}{\lambda_C}\left(\frac{\lambda_o}{\lambda_C} + 2\right)}.$$

ή, ορίζοντας

$$\eta \equiv \frac{\lambda_o}{\lambda_C},$$

στη μορφή

$$\frac{3}{4} = \frac{2(1+\eta)}{\eta(\eta+2)}$$

η οποία, λύνοντας ως προς η, δίνει

$$\eta = 2. \qquad (4)$$