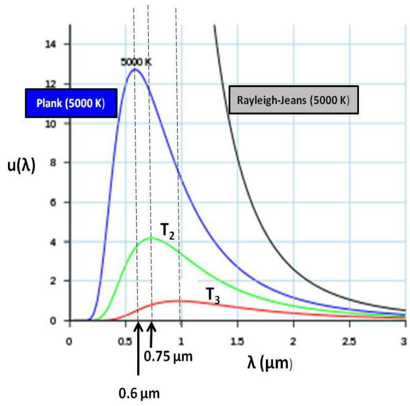
<u>Θέμα 3ο:</u> Η φασματική κατανομή (πυκνότητα ενέργειας) της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος ως συνάρτηση του μήκους κύματος και της θερμοκρασίας $\boldsymbol{T}$ δίνεται από την σχέση

$$u(\lambda,T)\,d\lambda \;=\; \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT}-1}$$

Τρεις κατανομές μέλανος σώματος όπως προβλέπονται από την πιο πάνω σχέση φαίνονται στο Σχήμα 1 για τρεις διαφορετικές θερμοκρασίες $\mathbf{T_1=5000\ K, T_2, T_3}$. Στο Σχήμα 1 φαίνονται και οι προβλέψεις της κλασσικής θεωρίας των Rayleigh-Jeans για θερμοκρασία $\mathbf{T_1=5000\ K}$.



Σχήμα 1: Τρεις φασματικές κατανομές μέλανος σώματος ως συνάρτηση του μήκους κύματος για T_1=5000 K, T_2, T_3.

(α) Δώστε μία σύντομη περιγραφή (5-10 γραμμές) της κεντρικής ιδέας του Planck που οδήγησε στην σωστή περιγραφή της φασματικής κατανομής του μέλανος σώματος και συζητήστε τη διαφορά της θεωρίας του M. Planck με την κλασική θεωρία των Rayleigh-Jeans. [5 μονάδες]

(β) Σε τι μονάδες δίδεται η κατανομή $\boldsymbol{u(\lambda,T)}$; Αιτιολογήστε την απάντηση σας. [4 μονάδες]

(γ) Χρησιμοποιήστε το Σχήμα 1 και υπολογίστε τις θερμοκρασίες T_2 και T_3. Αιτιολογήστε την απάντηση σας. [6 μονάδες]

(δ) Θεωρείστε το ολοκλήρωμα

$$U(T) \;=\; \int_0^\infty u(\lambda,T)\,d\lambda \quad .$$

Τι φυσική σημασία/νόημα έχει η ποσότητα αυτή και σε τι μονάδες εκφράζεται ; [4 μονάδες]

(ε) Υπολογίστε τα $U(T_2)$ και $U(T_3)$ ως συνάρτηση του $U(T=5000\,K)$ χρησιμοποιώντας το νόμο των Stefan-Boltzmann. [6 μονάδες]

Δίδονται: $\hbar c=\dfrac{h}{2\pi}c=197.3\,MeV\ fm,\ \ k=8.62\times10^{-5}\,eV\,K^{-1}$

<u>Λύση:</u>

(α) Ο Planck στην προσπάθεια του να εξηγήσει μετρήσεις του φάσματος του μέλανος σώματος θεώρησε ότι οι ταλαντωτές στην επιφάνεια του μέλανος σώματος εκπέμπουν και απορροφούν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία σε *κβάντα* (δηλαδή σε διακριτές τιμές) ενέργειας $\varepsilon = hf$ όπου h η σταθερά του Planck και f η συχνότητα ταλάντωσης. Όλες οι προηγούμενες θεωρίες ήταν βασισμένες στην κλασική υπόθεση ότι οι ταλαντωτές μπορούν να εκπέμπουν και να απορροφούν οποιαδήποτε τιμή ενέργειας (δηλαδή συνεχές φάσμα). Η θεωρία των Rayleigh-Jeans βασιζόταν ακριβώς σ' αυτή την κλασική υπόθεση και έδινε μία φασματική κατανομή η οποία έτεινε στο άπειρο για μικρά μήκη κύματος (ή υψηλές συχνότητες). Έτσι δεν περιέγραφε τα πειραματικά δεδομένα στην περιοχή αυτή. Αυτό ακριβώς το πρόβλημα έλυσε η κβαντική θεωρία του Planck.

(β) Οι υπολογισμός μονάδων $\left[\dfrac{hc}{\lambda kT}\right] = \dfrac{E\cdot L}{L\cdot E\cdot T^{-1}\cdot T}=1$, $\left[\dfrac{8\pi hc}{\lambda^5}\right] = \dfrac{E\cdot L}{L^5}=\dfrac{E}{L^4}$, $[d\lambda] = [L]$.

Συνεπώς έχουμε ότι $[u(\lambda)d\lambda] = \dfrac{E}{L^3}$ και $[u(\lambda)] = \dfrac{E}{L^4}$. Δηλαδή το $u(\lambda)$ δίνεται σε μονάδες ενεργειακής πυκνότητας ανά μονάδα μήκους κύματος.

(γ) Από το νόμο του Wien έχουμε ότι $T_a\lambda_a=T_b\lambda_b$. Δηλαδή όσο αυξάνεται η θερμοκρασία τόσο ελαττώνεται το μήκος κύματος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας.

Συνεπώς έχουμε ότι

$$T\lambda = T_2\,\lambda_2 \Rightarrow 5000\mathrm{K} \times 0.6\ \mu m = T_2 \times 0.75\ \mu m \Rightarrow T_2 = 5000\ K \times \frac{0.6}{0.75} = 4000\ K$$

και

$$T_3 = 5000\ K \times \frac{0.6}{1} = 3000\ K \quad .$$

(γ)

Όπως αποδείξαμε στην (α) $[u(\lambda)d\lambda] = \frac{E}{L^3}$ συνεπώς $U(T) = \int_0^{\infty} u(\lambda, T)d\lambda$ είναι μία έκφραση της ενεργειακής πυκνότητας και συνεπώς έχει μονάδες ενέργειας ανά μονάδα όγκου.

(δ) Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο των Stefan-Boltzmann ο οποίος μας δίνει την ενεργειακή πυκνότητα ως συνάρτηση της θερμοκρασίας μετρούμενη σε βαθμούς Kelvin: $U(T) = aT^4$.

$$\frac{U(T_2)}{U(T)} = \frac{T_2^4}{T^4} = \left(\frac{4000}{5000}\right)^4 = \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 0.4096$$

$$\frac{U(T_3)}{U(T)} = \frac{T_3^4}{T^4} = \left(\frac{3000}{5000}\right)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = 0.1296$$