Θέμα 1ο: Ένα αρνητικά φορτισμένο W-μποζόνιο μεταπίπτει σε ένα μιόνιο και ένα μιονικό αντι-νετρίνο μέσω της αντίδρασης $w^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu$. Το αντι-νετρίνο έχει σχεδόν μηδενική μάζα και οι μάζες του **W** και μ^- δίνονται από $M_W c^2 = 80.4\,GeV$, $m_\mu c^2 = 0.106\,GeV$.

(α) Υπολογίστε την ορμή του μιονίου και του αντι-νετρίνου στο αδρανειακό σύστημα του **W**. [10 μονάδες]

(β) Αν η ολική ενέργεια του **W** είναι **400 GeV** υπολογίστε τα σχετικιστικά **β** και **γ** του **W**. [10 μονάδες]

(γ) Υποθέστε ότι το μιόνιο εκπέμπεται σε γωνία 45^0 στο σύστημα του W και υπολογίστε την ενέργεια, ορμή και γωνία με την οποία το μιόνιο εκπέμπεται στο αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου. [5 μονάδες]

Δίνεται ο μετασχηματισμός Lorentz για ενέργεια και ορμή απο αδρανειακό σύστημα O' το οποίο κινείται με ταχύτητα V στην κατεύθυνση του θετικού άξονα x ως πρός το αδρανειακό σύστημα O.

$E = \gamma(E' + \beta c p'_x)$ $\quad c p_x = \gamma(c p'_x + \beta E')$ $\quad c p_y = c p'_y$ $\quad c p_z = c p'_z$ και

$\beta = V/c \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ και $E = m\gamma c^2$, $p = m\gamma\beta c$

Λύση:

(α) Από διατήρηση ορμής και ενέργειας στο σύστημα του W έχουμε.

$$m_W c^2 = E^*_\mu + E^*_\nu \qquad (1)$$

$$0 = \vec{q}^*_\mu + \vec{q}^*_\nu \qquad (2)$$

όπου $E^*_\mu, E^*_\nu, \vec{q}^*_\mu, \vec{q}^*_\nu$ οι ενέργειες και οι ορμές του μιονίου και του νετρίνου στο σύστημα του W.

Το νετρίνο έχει πάρα πολύ μικρή μάζα σε σχέση με το μιόνιο και το W συνεπώς

$$E^*_\nu \approx c|\vec{q}^*_\nu| \qquad (3)$$

Από (1), (2) , (3) έχουμε ότι

$$m_W c^2 = \sqrt{(c\vec{q}^*_\mu)^2 + m^2_\mu c^4} + c|\vec{q}^*_\nu| \quad \Rightarrow$$

$$m_W c^2 - c|\vec{q}^*_\nu| = \sqrt{(c\vec{q}^*_\mu)^2 + m^2_\mu c^4} \quad \Rightarrow$$

$$m_W c^2 - 2c|\vec{q}^*_\nu| m_W c^2 = m^2_\mu c^4 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{m_W c^2 - m^2_\mu c^4}{2 m_W c^2} = c|\vec{q}^*_\nu| \quad \Rightarrow$$

$$\frac{80.4^2 GeV^2 - 0.106^2 GeV^2}{2 \times 80.4\,GeV} = c|\vec{q}^*_\nu| = 40.2\,GeV$$

και από την (2) έχουμε ότι

$$c|\vec{q}^*_\mu| = c|\vec{q}^*_\nu| = 40.2\,GeV$$

(β)

$$E = m\gamma c^2 \;\Rightarrow\; \gamma \;=\; \frac{E}{mc^2} \;=\; \frac{400\,GeV}{80.4} \;=\; 4.9751$$

$$\gamma \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \;\Rightarrow\; \beta \;=\; \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \;=\; 0{,}97959$$

(γ) Για να βρούμε την ορμή και γωνία του μιονίου στο σύστημα του εργαστηρίου πρέπει να έχουμε ενάργεια, ορμή και γωνία στο σύστημα του W. Την ορμή και τη γωνία τις έχουμε ήδη και η ενέργεια δίνεται από

$$E^*_\mu \;=\; \sqrt{40.2^2+0.106^2}\,GeV \;\approx\; 40.2\,GeV$$

δηλαδή η μάζα του μιονίου μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα στην περιοχή ενεργειών του προβλήματος που μελετάμε.

Έστω $\vec{q}^{\,*} \;=\; \left(q^*_x, q^*_y, q^*_z\right)$. Η ενέργεια το μιονίου στο εργαστήριο δίνεται από το μετασχηματισμό Lorentz

$$E^{\mathrm{LAB}}_\mu \;=\; \gamma\left(E^*_\mu+\beta c\, q^*_x\right) \;=\; \gamma\left(E^*_\mu+\beta c\left|q^*\right| cos45^o\right) \;=\; \gamma\left(1+\beta\, cos45^o\right)E^*_\mu \;\Rightarrow$$

$$E^{\mathrm{LAB}}_\mu \;=\; 4.9751\times\left(1+0.97959\times 0.70711\right)\times 40.2\,GeV \;=\; 338.53\,GeV \qquad (4)$$

Στην περιοχή των ενεργειών της άσκησης η μάζα του μιονίου (όπως είδαμε και πριν) είναι αμελητέα έτσι το μέτρο της ορμής του μιονίου δίνεται από

$$c\left|\vec{q}^{\,\mathrm{LAB}}_\mu\right| \;=\; 338.53\,GeV$$

Οι συντεταγμένες της ορμής δίνονται από το μετασχηματισμό Lorentz

$$c\,q_y^{\mathrm{LAB}} \;=\; c\,q_y^{\,*} \;=\; c\left|q^*\right|\sin 45^o \;=\; 40.2\,GeV\times 0.70711 \;=\; 28.43\,GeV \qquad (5)$$

$$cq^{\mathrm{LAB}}_x \;=\; \gamma\left(c\left|q^*\right| cos45^o+\beta\, E^*_\mu\right) \;=\; \gamma\left(cos45^o+\beta\right)E^*_\mu \;\Rightarrow$$

$$cq^{\mathrm{LAB}}_x \;=\; 4.9751\times\left(0.70711+0.97959\right)\times 40.2\,GeV \;=\; 337.34\,GeV \qquad (6)$$

Η γωνία του μιονίου στο αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου δίνεται από τη σχέση

$$\tan\theta^{\mathrm{LAB}} \;=\; \frac{c\,q_y^{\mathrm{LAB}}}{c\,q_x^{\mathrm{LAB}}} \;=\; \frac{28.43}{337.34} \;=\; 0.0843 \;\Rightarrow\; \theta \;=\; 4.82^o$$

Ή αλλιώς από (5) και (6)

$$\tan\theta^{\mathrm{LAB}} \;=\; \frac{c\,q_y^{\mathrm{LAB}}}{c\,q_x^{\mathrm{LAB}}} \;=\; \frac{c\left|q^*\right|\sin 45^o}{\gamma\left(c\left|q^*\right| cos45^o+\beta\, E^*_\mu\right)} \;=\; \frac{c\left|q^*\right|\sin 45^o}{\gamma\left(cos45^o+\beta\right)E^*_\mu} \;=\; \frac{\sin 45^o}{\gamma\left(cos45^o+\beta\right)} \;\Rightarrow$$

$$\tan\theta^{\mathrm{LAB}} \;=\; 0.0843 \;\Rightarrow\; \theta \;=\; 4.82^O$$