ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Διδάσκοντες: Κ. Φουντάς, Σ. Κοέν

"ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι"
10 – 2 – 2014

<u>Θέμα 1ο:</u> Αδρανειακό σύστημα Ο' κινείται με ταχύτητα V σε σχέση με αδρανειακό σύστημα Ο. Η ταχύτητα V είναι παράλληλη στη διεύθυνση των αξόνων x και x'. Ο μετασχηματισμός Lorentz που μετασχηματίζει τις μεταβλητές χρόνου και χώρου από το Ο' στο Ο δίνεται από:

$$ct = \gamma(ct' + \beta x') \quad x = \gamma(x' + \beta ct') \quad y' = y \quad z' = z$$

όπου $\beta = V/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ και c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

(α) Δείξτε ότι ένα σωματίδιο με χρόνο ζωής $\Delta t' = \tau$ στο σύστημα Ο΄, μετράται να έχει χρόνο ζωής $\Delta t = \gamma\tau$ στο σύστημα Ο. [5 μονάδες]

(β) Διατυπώστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Lorentz που μετασχηματίζει τις μεταβλητές χρόνου και χώρου από το Ο στο Ο' και αιτιολογήστε την απάντηση σας. [5 μονάδες]

(γ) Δείξτε ότι μια ράβδος μήκους L_0 στο σύστημα Ο' μετράται να έχει μήκος $L=L_0/\gamma$ στο σύστημα Ο. [5 μονάδες]

Μιόνιο παράγεται σε ύψος $H = 10000\,\text{m}$ από σύγκρουση κοσμικών ακτίνων με άτομα της ατμόσφαιρας και έχει ενέργεια $E = 3\,\text{GeV}$. Η μάζα του μιονίου είναι $m_\mu = 106\,\text{MeV/c}^2$ και ο χρόνος ζωής του είναι $\tau = 2.2\,\mu\text{sec}$. Δίνεται ότι $E=m\gamma c^2$ και $p=m\gamma\beta c$.

(δ) Παρατηρητής πάνω στη γη παρατηρεί το μιόνιο από την στιγμή που παράγεται. Σύμφωνα με τον παρατηρητή αυτό το μιόνιο φτάνει στην επιφάνεια της γης ή μεταπίπτει πριν φτάσει; [5 μονάδες]

(ε) Τι βλέπει παρατηρητής ο οποίος βρίσκεται πάνω στο μιόνιο; Αιτιολογείστε την απάντηση σας. [5 μονάδες]

<u>Λύση:</u>

(α) Ας θεωρήσουμε σωματίδιο το στο **Ο'** το οποίο δημιουργείται και στην θέση $(x'=0,\ y'=0,\ z'=0)$ την χρονική στιγμή t'_B και μεταπίπτει την χρονική στιγμή t'_A επίσης στο σημείο $(x'=0,\ y'=0,\ z'=0)$. Συνεπώς στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς **Ο'** το σωματίδιο έζησε για χρόνο

$$\Delta t' = t'_A - t'_B = \tau$$

Ο μετασχηματισμός Lorentz που μετατρέπει τον χρόνο στο **Ο'** σε χρόνο στο σύστημα **Ο** δίνεται από:

$$ct = \gamma(ct' + \beta x')$$

Συνεπώς η χρονική διαφορά μεταξύ των δύο γεγονότων στο **Ο** δίνεται από:

$$c(t_A - t_B) = \gamma(c(t'_A - t'_B) + \beta(x'_A - x'_B)) \quad \Rightarrow$$

$$c(t_A - t_B) = \gamma(\tau + \beta(0-0)) \quad \Rightarrow$$

$$\Delta t = t_A - t_B = \gamma\tau \quad \Rightarrow$$

$$\Delta t = \gamma\tau$$

(β) Δίνεται ότι το αδρανειακό σύστημα Ο' κινείται με ταχύτητα V σε σχέση με αδρανειακό σύστημα Ο. Άρα το Ο κινείται με ταχύτητα -V σε σχέση με το Ο' . Συνεπώς, αν ο μετασχηματισμός από το Ο' στο Ο δίνεται από

$$\mathbf{ct = \gamma(ct' + \beta x') \quad x = \gamma(x' + \beta ct') \quad y' = y \quad z' = z}$$

τότε ο μετασχηματισμός απο το Ο στο Ο΄ πρέπει να είναι

$$\mathbf{ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad x' = \gamma(x - \beta ct) \quad y' = y \quad z' = z}$$

(γ) ***Μήκος ράβδου στο σύστημα Ο ονομάζουμε την απόσταση μεταξύ των ενδείξεων x_1 και x_2 ενός χάρακα τα οποία συμπίπτουν <u>ταυτόχρονα</u> με τα άκρα της ράβδου.***

Στο σύστημα Ο αυτό σημαίνει ότι

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \Delta t = t_2 - t_1 = 0$$

Οι μετρήσεις μήκους μετασχηματίζονται στο Ο' με τους μετασχηματισμούς

$$x_1' = \gamma(x_1 - \beta c t_1)$$

$$x_2' = \gamma(x_2 - \beta c t_2)$$

και έτσι έχουμε ότι

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t)$$

όπου

$$\Delta x = x_2 - x_1 = L$$

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = L_0 \qquad \text{(ιδιομήκος)}$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$\Delta x' = \gamma \Delta x \quad \Rightarrow \quad L_0 = \gamma L \quad \Rightarrow$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

Συνεπώς ακίνητος παρατηρητής μετρά ένα μήκος ράβδου το οποίο είναι μικρότερο από το ιδιομήκος και αυτή είναι πασίγνωστη συστολή μήκους που προβλέπεται από τούς μετασχηματισμούς του Lorentz.

(δ)

Πρώτα υπολογίζουμε το γ και το β του μιονίου

$$E = m\gamma c^2 \Rightarrow \gamma = \frac{E}{m c^2} = \frac{3000\, MeV}{106\, MeV} = 28.302$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.99938$$

Συνεπώς στο σύστημα της γης το μιόνιο ζει για χρονικό διάστημα ίσο με

$$\Delta t = \gamma\tau = 2.2 \times 28.302\, \mu sec = 62.264\, \mu sec$$

Η απόσταση που μπορεί να διανύσει το μιόνιο πριν μεταπέσει στο σύστημα της γης δίνεται από την ταχύτητα του επί τον χρόνο ζωής του στο ίδιο σύστημα

$$x = \beta c \Delta t = 0.99938 \times 3 \times 10^{8} \frac{m}{s} \times 62.264 \times 10^{-6} s = 18667\, m$$

Η απόσταση αυτή είναι μεγαλύτερη από το ύψος στο οποίο παράγεται το μιόνιο, άρα το μιόνιο θα συγκρουστεί με την επιφάνεια της γης πριν μεταπέσει.

(ε) Ο υποθετικός παρατηρητής στο σύστημα του μιονίου δεν βλέπει φυσικά διαστολή χρόνου έτσι για αυτόν το μιόνιο πριν μεταπέσει μπορεί να διανύσει απόσταση ίση με

$$x = \beta c \tau = 0.99938 \times 3 \times 10^{8} \frac{m}{s} \times 2.2 \times 10^{-6} s = 659.59\, m$$

Βλέπει όμως το ύψος να συστέλλεται (συστολή μήκους)

$$h = \frac{H}{\gamma} = \frac{10000\, m}{28.302} = 353.33\, m$$

Έτσι και αυτός περιμένει το μιόνιο να φτάσει στην επιφάνεια της γης πριν μεταπέσει.

Θέμα 2ο:

(α) Η ολική ενέργεια και ορμή σχετικιστικού σωματιδίου δίδονται από τις σχέσεις $E=m\gamma c^2$ και $p=m\gamma\beta c$ όπου V είναι η ταχύτητα του σωματιδίου, $\beta=V/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ και c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Δείξετε ότι $E = \sqrt{(pc)^2 + m^2c^4}$ [5 μονάδες]

(β) Υπολογίστε το β ενός σωματιδίου ως συνάρτηση της ολικής ενέργειας και της ορμής του σωματιδίου. Αποδείξτε ότι σωματίδια που έχουν μη-μηδενική μάζα δεν μπορούν ποτέ να κινούνται με την ταχύτητα του φωτός στο κενό και αντιθέτως σωματίδια με μηδενική μάζα πρέπει αναγκαστικά να κινούνται με την ταχύτητα του φωτός στο κενό. [10 μονάδες]

(γ) Δέσμη πρωτονίων με ολική ενέργεια E_0 και ορμή P_0 προσπίπτει σε στόχο υδρογόνου με σκοπό την παραγωγή θετικά φορτισμένων πιονίων. Θετικά φορτισμένα πιόνια παράγονται μέσω της αντίδρασης $pp \rightarrow pn\pi$. Στο τελικό στάδιο της αντίδρασης παράγονται, εκτός του πιονίου, ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο. Υπολογίστε την <u>κινητική ενέργεια</u> της δέσμης πρωτονίων η οποία αντιστοιχεί <u>στο κατώφλι</u> παραγωγής θετικά φορτισμένων πιονίων. Οι πυρήνες του υδρογόνου (πρωτόνια) θεωρούνται ότι βρίσκονται σε ηρεμία. Δίδεται ότι σε συγκρούσεις δύο σωματιδίων στο σύστημα του εργαστηρίου η ποσότητα

$$M_T^2c^4 = (E_1+E_2)^2-c^2(p_1-p_2)^2$$

είναι το τετράγωνο της ολικής ενέργειας στο σύστημα του κέντρου μάζας των δύο σωματιδίων και E_1, E_2, p_1, p_2 είναι οι ενέργειες και οι ορμές των δύο σωματιδίων στο σύστημα του εργαστηρίου. Οι μάζες του πρωτονίου και νετρονίου είναι περίπου ίσες $m_pc^2 \approx m_nc^2 \approx 938$ MeV . Η μάζα του θετικά φορτισμένου πιονίου είναι $m_\pi c^2 \approx 140$ MeV . [10 μονάδες]

Λύση:

(α)

Δίνεται ότι $\boldsymbol{p = m\gamma\beta c}$ και $\boldsymbol{E = m\gamma c^2}$. Υψώνοντας και τις δύο σχέσεις στο τετράγωνο έχουμε:

$$\boldsymbol{E^2 = m^2\gamma^2c^4}$$

$$\boldsymbol{(pc)^2 = m^2\gamma^2\beta^2c^4}$$

Έτσι

$$\boldsymbol{E^2-(pc)^2 = m^2\gamma^2c^4(1-\beta^2) = m^2c^4 \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{E^2 = (pc)^2+m^2c^4 \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{E = \sqrt{(pc)^2+m^2c^4}}$$

(β)

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\boldsymbol{p = m\gamma\beta c}$ $\boldsymbol{E = m\gamma c^2}$ και $\boldsymbol{E = \sqrt{(pc)^2+m^2c^4}}$

έχουμε ότι: $$\boldsymbol{\beta = \frac{pc}{E} = \frac{1}{E}\sqrt{E^2-m^2c^4} = \sqrt{1-\frac{m^2c^4}{E^2}}}$$

Έτσι σωματίδια με μη μηδενική μάζα έχουν αναγκαστικά $\boldsymbol{\beta<1}$ και σωματίδια με μηδενική μάζα έχουν $\boldsymbol{\beta=1}$.

(γ) Το τετράγωνο της ολικής ενέργειας στο κέντρο μάζας σαν συνάρτηση της ενέργειας και ορμής των αρχικών σωματιδίων στο σύστημα του εργαστηρίου δίνεται από

$$\left(\sum_i^n E_i^*\right)^2 = M_T^2 c^4 = \left(\sum_i^n E_i\right)^2 - \left(\sum_i^n c p_i\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left(\sum_1^2 E_i^*\right)^2 = \left(E_0 + m_p c^2\right)^2 - \left(c\, p_0\right)^2 = E_0^2 - c^2 p_0^2 + m_p^2 c^4 + 2 E_0 m_p c^2 = 2 m_p^2 c^4 + 2 E_0 m_p c^2 \qquad (1)$$

Η ενέργεια κατωφλίου είναι η ενέργεια η οποία αρκεί μόνο για να παραχθούν τα τρία σωματίδια στο κέντρο μάζας χωρίς να κινούνται. Δηλαδή όταν η ενέργεια της δέσμης φτάσει μία συγκεκριμένη τιμή τότε η ενέργεια στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι μόλις αρκετή για να έχουμε στο τελικό στάδιο της αντίδρασης τρία ακίνητα σωματίδια (πρωτόνιο, νετρόνιο και πιόνιο) . Συνεπώς στο κέντρο μάζας έχουμε

$$\left(\sum_1^3 E_i^*\right)^2 = \left(m_p c^2 + m_n c^2 + m_\pi c^2\right)^2 = \left(2 m_p c^2 + m_\pi c^2\right)^2 = 4 m_p^2 c^4 + m_\pi^2 c^4 + 4 m_p c^2 m_\pi c^2 \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι

$$\left(\sum_1^3 E_i^*\right)^2 = 4 m_p^2 c^4 + m_\pi^2 c^4 + 4 m_p c^2 m_\pi c^2 = 2 m_p^2 c^4 + 2 E_0 m_p c^2 \Rightarrow$$

$$2 m_p^2 c^4 + m_\pi^2 c^4 + 4 m_p c^2 m_\pi c^2 = 2 E_0 m_p c^2 \Rightarrow E_0 = \frac{2 m_p^2 c^4 + m_\pi^2 c^4 + 4 m_p c^2 m_\pi c^2}{2 m_p c^2} \Rightarrow$$

$$E_0 = \frac{2 m_p^2 c^4 + m_\pi^2 c^4 + 4 m_p c^2 m_\pi c^2}{2 m_p c^2} = m_p c^2 + \frac{1}{2} \frac{m_\pi^2 c^4}{m_p c^2} + 2 m_\pi c^2 \Rightarrow$$

$$E_0 = 938\, MeV + 0.5 \frac{(140)^2}{938} MeV + 2 \times 140\, MeV = 1228\, MeV$$

Συνεπώς η κινητική ενέργεια της δέσμης είναι

$$KE_0 = 1228\, MeV - 938\, MeV = 290\, MeV$$

δηλαδή περίπου διπλάσια από τη μάζα ηρεμίας του πιονίου.