ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Διδάσκοντες: Κ. Φουντάς, Σ. Κοέν

"ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι"

19 – 6 – 2012

Θέμα 1^o:

(α) Περιγράψτε ένα τρόπο με τον οποίο μπορούν να εξαχθούν οι μετασχηματισμοί του Lorentz από τις αρχές της ειδικής σχετικότητας ; (με λόγια, χωρίς πράξεις, συνοπτικά) . [3 μονάδες]

(β) Αδρανειακό σύστημα **O'** κινείται με ταχύτητα **V** σε σχέση με αδρανειακό σύστημα **O**. Η ταχύτητα **V** είναι στη θετική διεύθυνση των αξόνων **x-x'**. Ο μετασχηματισμός Lorentz που μετασχηματίζει τις μεταβλητές χρόνου και χώρου από το **O'** στο **O** δίνεται από:

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

Όπου $\beta = V/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ και c η ταχύτητα του φωτός. Ας υποθέσουμε ότι τη στιγμή $t = t' = 0$ οι άξονες των δύο αδρανειακών συστημάτων συμπίπτουν και ότι τη στιγμή αυτή φωτεινή πηγή στο κέντρο του **O** εκπέμπει σφαιρικό κύμα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$

Δείξτε ότι στο σύστημα O' το σφαιρικό αυτό κύμα περιγράφεται από την ίδια εξίσωση, δηλαδή

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$

[4 μονάδες]

(δ) Διατυπώστε δύο βασικές προβλέψεις της θεωρίας της ειδικής σχετικότητας του Einstein για το μήκος και το χρόνο και γράψτε τις σχέσεις που απορρέουν από αυτές. Δώστε προσοχή στον ορισμό των αδρανειακών συστημάτων και ορίστε ακριβώς σε ποιο αδρανειακό σύστημα μετράται η κάθε ποσότητα.

[3 μονάδες]

(ε) Μιόνιο παράγεται σε ύψος $H = 10000\,m$ από σύγκρουση κοσμικών ακτίνων με άτομα της ατμόσφαιρας και έχει ενέργεια $E = 3GeV$. Η μάζα του μιονίου είναι $m_\mu = 106\,MeV/c^2$ και ο χρόνος ζωής του είναι $\tau = 2.2\,\mu sec$.

(1) Υπολογίστε το γ του μιονίου.
[2 μονάδες]

(2) Υπολογίστε το β του μιονίου.
[2 μονάδες]

(3) Παρατηρητής πάνω στη γη παρατηρεί το μιόνιο από την στιγμή που παράγεται. Σύμφωνα με τον παρατηρητή αυτό φτάνει το μιόνιο στην επιφάνεια της γης ή μεταπίπτει πριν φτάσει ;
[3 μονάδες]

(4) Τι βλέπει παρατηρητής ο οποίος βρίσκεται πάνω στο μιόνιο ; Αιτιολογείστε την απάντηση σας. [3 μονάδες]

Λύση:

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς **O** και **O'** με το **O'** να κινείται με ταχύτητα **V** σε σχέση με το **O** στην κατεύθυνση του θετικού άξονα **x**. Ας υποθέσουμε επίσης ότι οι άξονες τους συμπίπτουν τη χρονική στιγμή **t = t' = 0**.

Θεωρούμε σφαιρικό κύμα φωτός το οποίο εκπέμπεται την στιγμή **t = t' = 0** στο σύστημα **O**, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$

Σύμφωνα με τις αρχές τις ειδικής σχετικότητας η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι η ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. <u>Συνεπώς το κύμα αυτό πρέπει να περιγράφεται στο O' από την ίδια εξίσωση.</u>

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$

Οι γραμμικοί μετασχηματισμοί μεταξύ των τεσσάρων μεταβλητών του **O** και των τεσσάρων μεταβλητών του **O'** είναι οι μετασχηματισμοί του Lorentz.

(β) Αρχίζουμε με την εξίσωση της σφαίρας στο **O** και αντικαθιστούμε

$$(ct)^2-(x)^2-(y)^2-(z)^2=\gamma^2(ct'+\beta x')^2-\gamma^2(x'+\beta ct')^2-y'^2-z'^2=$$

$$=\gamma^2(c^2t'^2-x'^2)+\beta^2\gamma^2(x'^2-c^2t'^2)-y'^2-z'^2=\gamma^2(1-\beta^2)(c^2t'^2-x'^2)-y'^2-z'^2 \quad (1)$$

Όμως

$$\gamma^2(1-\beta^2) = \frac{1-\beta^2}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^2} = 1 \quad (2)$$

Έτσι από (1) και (2) έχουμε ότι

$$(ct)^2-x^2-y^2-z^2 = (ct')^2-x'^2-y'^2-z'^2 = 0$$

Συνεπώς η αρχή της ειδικής σχετικότητας για το ότι η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι η ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς έχει σαν συνέπεια το αναλλοίωτο της εξίσωσης του σφαιρικού κύματος φωτός στα διάφορα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Το αναλλοίωτο των εξισώσεων του σφαιρικού κύματος φωτός είναι απολύτως ισοδύναμο με την πιο πάνω αρχή της σχετικότητας.

(γ) Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς **O** και **O'** με το **O'** να κινείται με ταχύτητα **V** σε σχέση με το **O** στην κατεύθυνση του θετικού άξονα **x**. Ας υποθέσουμε επίσης ότι οι άξονες τους συμπίπτουν τη χρονική στιγμή **t = t' = 0**.

Η θεωρία της ειδικής σχετικότητας προβλέπει ότι δύο γεγονότα τα οποία λαμβάνουν χώρα στο **O'** στο ίδιο χωρικό σημείο (**Δx'=0**) με χρονική διαφορά $\Delta t' = \tau$ μετρούνται στο **O** με χρονική διαφορά ίση με

$$\Delta t = \gamma\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Δηλαδή προβλέπει τη **διαστολή του χρόνου.**

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε στο σύστημα O' μία ράβδο μήκους L_0 . Σύμφωνα με την θεωρία της ειδικής σχετικότητας αν κάποιος μετρήσει τα δύο άκρα της ράβδου **ταυτόχρονα** στο σύστημα **O** θα υπολογίσει το μήκος της ράβδου να είναι

$$\Delta L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \times \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

Συνεπώς η ειδική σχετικότητα προβλέπει **συστολή του μήκους.**

(δ)

(1)

$$E = m\gamma c^2 \Rightarrow \gamma = \frac{E}{m\,c^2} = \frac{3000\,MeV}{106\,MeV} = 28.302$$

(2)

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.99938$$

$$\Delta t = \gamma\tau = 2.2 \times 28.302\,\mu sec = 62.264\,\mu sec$$

(3) Η απόσταση που μπορεί να διανύσει το μιόνιο πριν μεταπέσει στο σύστημα της γης δίνεται από την ταχύτητα του επί τον χρόνο ζωής του στο ίδιο σύστημα

$$x = \beta c \Delta t = 0.99938 \times 3 \times 10^8 \frac{m}{s} \times 62.264 \times 10^{-6} s = 18667\,m$$

Η απόσταση αυτή είναι μεγαλύτερη από το ύψος στο οποίο παράγεται το μιόνιο, άρα το μιόνιο θε συγκρουστεί με τήν επιφάνεια της γης πριν μεταπέσει.

(ε) Ο υποθετικός παρατηρητής στο σύστημα του μιονίου δεν βλέπει φυσικά διαστολή χρόνου έτσι για αυτόν το μιόνιο πριν μεταπέσει μπορεί να διανύσει απόσταση ίση με

$$x = \beta c \tau = 0.99938 \times 3 \times 10^8 \frac{m}{s} \times 2.2 \times 10^{-6} s = 659.59\,m$$

Βλέπει όμως το ύψος να συστέλλεται (συστολή μήκους)

$$h = \frac{H}{\gamma} = \frac{10000\,m}{28.302} = 353.33\,m$$

Έτσι και αυτός περιμένει το μιόνιο να φτάσει στην επιφάνεια της γης πριν μεταπέσει.

<u>Θέμα 2ο:</u>

(α) Ένα ρ^0 μεσόνιο διασπάται σε δύο πιόνια

$$\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$$

Υπολογίστε την ενέργεια και την ορμή των πιονίων στο αδρανειακό σύστημα του ρ^0 μεσόνιου.
Οι μάζες των σωματιδίων είναι $m_{\rho^0} = 776\, MeV/c^2$ και $m_{\pi^\pm} = 140\, MeV/c^2$.

[5 μονάδες]

(β) Το ρ^0 μεσόνιο κινείται στο εργαστήριο στην κατεύθυνση του θετικού άξονα **x** με ενέργεια **10 GeV**.

(1) Υπολογίστε το **γ** και **β** του ρ^0 μεσόνιου.

[5 μονάδες]

(2) Υπολογίστε την μέγιστη και ελάχιστη ενέργεια των πιονίων στο σύστημα του εργαστηρίου.

[5 μονάδες]

(3) Αν υποθέσουμε ότι ένα από τα πιόνια παράγεται με γωνία **90ο** ως προς τον άξονα των **x** στο σύστημα του του ρ^0. Υπολογίστε την γωνία του πιονίου στο σύστημα του εργαστηρίου.

[5 μονάδες]

Η ολική ενέργεια και ορμή σχετικιστικού σωματιδίου δίδονται από τις σχέσεις $E = m\gamma c^2$, $E = \sqrt{(pc)^2 + m^2c^4}$ και $p = m\gamma\beta c$ όπου **V** είναι η ταχύτητα του σωματιδίου, $\beta = V/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ και **c** είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

<u>Μετασχηματισμοί Lorentz για ενέργεια και ορμή:</u>

Αν αδρανειακό σύστημα **O'** κινείται με ταχύτητα **V** σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα **O** στη διεύθυνση των αξόνων **x-x', τ**ότε ο μετασχηματισμός Lorentz που μετασχηματίζει την ολική ενέργεια και ορμή από το σύστημα **O'** στο σύστημα **O** δίνεται από τις σχέσεις:

$$E = \gamma(E' + \beta c p'_x)$$

$$cp_x = \gamma(cp'_x + \beta E')$$

$$p_y = p'_y$$

$$p_z = p'_z$$

Λύση:

(α) Από διατήρηση ορμής έχουμε ότι στο σύστημα του ρ^0 το διανυσματικό άθροισμα των ορμών των δύο πιονίων είναι μηδέν.

$$\vec{q}_{\pi^+} = \vec{q}_{\pi^-} \Rightarrow \left|\vec{q}_{\pi^+}\right| = \left|\vec{q}_{\pi^-}\right| = q^*$$

Συνεπώς και οι ενέργειες των πιονίων θα είναι ίσες.

$$E^*_{\pi^+} = E^*_{\pi^-} = \sqrt{(q^*c)^2 + m^2_{\pi^\pm}c^4} \qquad (1)$$

Από την (1) χρησιμοποιώντας διατήρηση ενέργειας μας στο σύστημα του **ρ⁰** έχουμε

$$E^*_{\pi^+} + E^*_{\pi^-} = m_{\rho^0}c^2 = 776\,MeV \Rightarrow E_{\pi^\pm} = \frac{776}{2}MeV = 388\,MeV$$

Η ορμή των πιονίων υπολογίζεται επίσης από την (1)

$$q^* c = \sqrt{(E^*_{\pi^\pm})^2 - m^2_{\pi^\pm}c^4} = \sqrt{388^2 - 140^2}\,MeV = 362\,MeV$$

(β)

(1)

$$E = m\gamma c^2 \Rightarrow \gamma_{\rho^0} = \frac{E_{\rho^0}}{m_{\rho^0}c^2} = \frac{10000\,MeV}{776\,MeV} = 12.89 \quad \text{και} \quad \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = 0.997 \quad .$$

(2)

$$E^{Lab}_{max} = \gamma(E^*_{\pi^\pm} + \beta c q^*) = 12.89(388 + 0.997 \times 362)MeV = 9.65\,MeV$$

$$E^{Lab}_{min} = \gamma(E^*_{\pi^\pm} - \beta c q^*) = 12.89(388 - 0.997 \times 362)MeV = 349\,MeV$$

(3)
Αφού το πιόνιο παράγεται με γωνία 90^0 στο σύστημα του **ρ⁰** τότε σ' αυτό το σύστημα έχει

$$cp^*_x = 0 \quad \text{και} \quad cp^*_y = cq^*$$

Στο σύστημα του εργαστηρίου έχουμε

$$cp^{Lab}_y = cp^*_y = cq^*$$

$$cp^{Lab}_x = \gamma(cp^*_x + \beta E^*_{\pi^\pm}) = \gamma\beta E^*_{\pi^\pm}$$

χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Lorentz.

Άρα η γωνία του πιονίου στο σύστημα του εργαστηρίου είναι

$$\tan\theta^{Lab} = \frac{cp^{Lab}_y}{cp^{Lab}_x} = \frac{cq^*}{\gamma\beta E^*_{\pi^\pm}} = \frac{362\,MeV}{12.89 \times 0.997 \times 388\,MeV} = 0.0726 \Rightarrow$$

$$\theta^{Lab} = 4.15^o$$