ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Διδάσκοντες: Κ. Φουντάς, Σ. Κοέν, Ν. Νικολής.

"ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι"

11 – 9 – 2013

Θέμα 1ο:

(α) Διατυπώστε τις δύο αρχές στις οποίες βασίζεται η θεωρία της ειδικής σχετικότητας. [4 μονάδες]

(β) Περιγράψτε (χωρίς πράξεις) πώς απορρέουν οι μετασχηματισμοί του Lorentz από τη μία από τις δύο αρχές . [2 μονάδες]

(γ) Τι απέδειξε το πείραμα των Michelson και Morley; [2 μονάδες]

(δ) Διατυπώστε δύο βασικές προβλέψεις της ειδικής σχετικότητας οι οποίες μπορούν να μετρηθούν στο εργαστήριο. [4 μονάδες]

(ε) Κάτω από ποιες συνθήκες η θεωρία της ειδικής σχετικότητας δίνει περίπου τα ίδια αποτελέσματα με την κλασσική (μη-σχετικιστική) φυσική; [2 μονάδες]

(στ) Δείξτε ότι η ταχύτητα σωματιδίου ολικής ενέργειας E και μάζας m δίνεται από τη σχέση

$$\beta = \sqrt{1-\frac{m^2c^4}{E^2}}$$ [4 μονάδες]

(ζ) Δείξτε ότι σωματίδιο με ολική ενέργεια E πολύ μεγαλύτερη της ενέργειας ηρεμίας του mc^2 κινείται με ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση

$$\beta \approx 1-\frac{m^2c^4}{2E^2}$$ [2 μονάδες]

(η) Θεωρήστε την μετάπτωση θετικού καονίου σε ουδέτερο πιόνιο και θετικό πιόνιο.

$$K^+ \rightarrow \pi^0 \pi^+$$

(ι) Δείξτε ότι στο αδρανειακό σύστημα του καονίου η ενέργεια του θετικού πιονίου είναι

$$E^*_{\pi^+} = \frac{m^2_{K^+}c^4 + m^2_{\pi^+}c^4 - m^2_{\pi^0}c^4}{2m_{K^+}c^2}$$ [3 μονάδες]

(ιι) Δείξτε ότι στο αδρανειακό σύστημα του καονίου η ενέργεια του ουδέτερου πιονίου είναι

$$E^*_{\pi^0} = \frac{m^2_{K^+}c^4 + m^2_{\pi^0}c^4 - m^2_{\pi^+}c^4}{2m_{K^+}c^2}$$ [2 μονάδες]

Λύση:

(α)

- Οι νόμοι της φυσικής παραμένουν αναλλοίωτοι στα διάφορα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Δηλαδή και τα φαινόμενα του ηλεκτρομαγνητισμού και της μηχανικής πρέπει να έχουν τα ίδια αποτελέσματα σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

- Το φως και όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα c = 3 10^8 m/s σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς ανεξάρτητα από τη σχετική ταχύτητα του συγκεκριμένου συστήματος αναφοράς. Κανένα σωματίδιο ή κύμα δε μπορεί να υπερβεί την ταχύτητα του φωτός στο κενό.

(β)

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ένα σφαιρικό κύμα φωτός σε κάποιο αδρανειακό σύστημα **O**. Η εξίσωση που περιγράφει αυτό το κύμα, όπως μετράται από παρατηρητή στο σύστημα **O**, είναι

$$x^2+y^2+z^2=(ct)^2 \qquad (1)$$

Σύμφωνα με τη θεωρία της ειδικής σχετικότητας η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα. Έτσι η εξίσωση του ιδίου κύματος ως προς δεύτερο αδρανειακό σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται με ταχύτητα **V** στην διεύθυνση του άξονα x πρέπει να δίνεται από την εξίσωση

$$x'^2+y'^2+z'^2=(ct')^2 \qquad (2)$$

Με άλλα λόγια ο παρατηρητής στο κινούμενο αδρανειακό σύστημα **O'** πρέπει, αφού κάνει μετρήσεις χρησιμοποιώντας χάρακες και συγχρονισμένα χρονόμετρα, να βρίσκει επίσης σφαιρικό κύμα. Οι μετασχηματισμοί Lorentz είναι οι γραμμικοί μετασχηματισμοί από το σύστημα (x,z,y,t) στο σύστημα (x',y',z',t') οι οποίοι όταν δράσουν πάνω στην (1) μας δίνουν την (2). Δηλαδή είναι μετασχηματισμοί οι οποίοι αφήνουν αναλλοίωτη την εξίσωση

$$x^2+y^2+z^2=(ct)^2$$

Δηλαδή οι μετασχηματισμοί Lorentz περιγράφουν σωστά τις μετρήσεις των δύο παρατηρητών.

(γ)
Το πείραμα των Michelson και Morley απέδειξε ότι το φως διαδίδεται με την ίδια ταχύτητα σε όλα τα αδρανειακά συστήματα, ανεξαρτήτως της γωνίας στροφής του πειράματος. Αν το φως χρειαζόταν τον αιθέρα για να διαδοθεί τότε, επειδή η γη έπρεπε να κινείται μέσα στον αιθέρα, θα έπρεπε να παρατηρήσουν διαφορετική ταχύτητα σε διαφορετικές διευθύνσεις. Άρα η αρχική υπόθεση ότι δηλαδή υπάρχει αιθέρας ήταν λάθος. Έτσι η κυματική εξίσωση για κύμα φωτός με ταχύτητα **c** ισχύει σε όλα τα αδρανειακά συστήματα.

(δ)

- Διαστολή του χρόνου: Ο χρόνος ζωής κινούμενων σωματιδίων μετράται στο εργαστήριο μεγαλύτερος από το χρόνο ζωής τους όταν είναι ακίνητα.
- Σχετικιστικό φαινόμενο Doppler: Φάσματα φως από μακρινά αστέρια παρατηρούνται στην γη μετατοπισμένα σε χαμηλότερες συχνότητες όταν τα αστέρια αυτά απομακρύνονται από τη γη.

(ε) Όταν οι ταχύτητες των σωμάτων είναι πολύ μικρότερες της ταχύτητας του φωτός.

(στ)
$$\beta=\frac{pc}{E}=\frac{\sqrt{E^2-m^2c^4}}{E}=\sqrt{1-\frac{m^2c^4}{E^2}}=\left(1-\frac{m^2c^4}{E^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(ζ)
$$\beta=\left(1-\frac{m^2c^4}{E^2}\right)^{\frac{1}{2}}\approx 1-\frac{1}{2}\frac{m^2c^4}{E^2}$$

(η) Διατήρηση ενέργειας στο σύστημα του καονίου:

$$m_{K^+}c^2=E^*_{\pi^+}+E^*_{\pi^0} \qquad (1)$$

Διατήρηση ορμής στο σύστημα του καονίου:

$$0=\vec{P}^*_{\pi^+}+\vec{P}^*_{\pi^0}\Rightarrow\vec{P}^*_{\pi^+}=-\vec{P}^*_{\pi^0} \qquad (2)$$

από την (1) έχουμε ότι

$$(m_{K^+}c^2-E^*_{\pi^0})^2=(E^*_{\pi^+})^2\Rightarrow m^2_{K^+}c^4+(E^*_{\pi^0})^2-2E^*_{\pi^0}m_{K^+}c^2=(p^*_{\pi^+}c)^2+m^2_{\pi^+}c^4$$ και μέσω της (2) έχουμε ότι

$$m^2_{K^+}c^4+(E^*_{\pi^0})^2-2E^*_{\pi^0}m_{K^+}c^2=(p^*_{\pi^0}c)^2+m^2_{\pi^+}c^4$$

$$m^2_{K^+}c^4+m^2_{\pi^0}c^4-2E^*_{\pi^0}m_{K^+}c^2=m^2_{\pi^+}c^4\Rightarrow \qquad E^*_{\pi^+}=\frac{m^2_{K^+}c^4+m^2_{\pi^+}c^4-m^2_{\pi^0}c^4}{2m_{K^+}c^2}$$

Το δεύτερο ερώτημα βγαίνει με τον ίδιο τρόπο ή και ευκολότερα ως εξής:

$$E^*_{\pi^0}=m_{K^+}c^2-E^*_{\pi^+}=m_{K^+}c^2-\frac{m^2_{K^+}c^4+m^2_{\pi^+}c^4-m^2_{\pi^0}c^4}{2m_{K^+}c^2}=\frac{m^2_{K^+}c^4+m^2_{\pi^0}c^4-m^2_{\pi^+}c^4}{2m_{K^+}c^2}$$

<u>Θέμα 2ο</u>:

(α) Να εξετάσετε εάν η ποσότητα $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ μένει αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Γαλιλαίου.

[5 μονάδες]

(β) Η μάζα ηρεμίας ενός μιονίου ισούται με 207 m_e (106 MeV/c^2) και ο μέσος χρόνος ζωής στο σύστημα ηρεμίας του είναι 2×10^{-6}s. Πόση είναι η μάζα του μιονίου στο εργαστήριο, όπου ο μέσος χρόνος ζωής του είναι 7×10^{-6}s; [5 μονάδες]

(γ) Ένα διαστημόπλοιο με ιδιομήκος 300 m προσπερνά έναν ακίνητο παρατηρητή στη Γη. Ο παρατηρητής μετρά ότι το διαστημόπλοιο χρειάζεται 0.750 μs για να τον προσπεράσει. Πόση είναι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου σύμφωνα με τον παρατηρητή στη Γη; [5 μονάδες]

(δ) Ένα σωμάτιο με μάζα ηρεμίας m_0 κινείται με ταχύτητα 0.8c συγκρούεται πλαστικά με ένα άλλο σωμάτιο που έχει μάζα ηρεμίας $3m_0$. Πόση είναι η μάζα ηρεμίας του συσσωματώματος; [10 μονάδες]

<u>Λύση:</u>

(α) Θεωρήστε τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου

$$x'=x-Vt \qquad y'=y \qquad z'=z \qquad t'=t$$

Οι οποίοι περιγράφουν την αλλαγή των συντεταγμένων από το σύστημα **O** στο σύστημα **O'** το οποίο κινείται με ταχύτητα V στη διεύθυνση του άξονα x σε σχέση με το **O**. Τα δύο συστήματα συμπίπτουν για $t'=t=0$. Η πιο πάνω ποσότητα μετασχηματίζεται ως εξής

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=(x-Vt)^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2-2xVt-V^2t^2$$

Προφανώς λόγο των δύο τελευταίων όρων η ποσότητα $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ **δεν είναι αναλλοίωτη ως προς τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.**

(β) Αν ο χρόνος στο σύστημα του εργαστηρίου μετράται 7×10^{-6}s τότε από την διαστολή του χρόνου έχουμε ότι $\gamma=7/2$. Άρα $m=\gamma m_0=\frac{7}{2}\times106$ MeV/c^2 $=371$ MeV/c^2

(γ) Στο αδρανειακό σύστημα της γης το διαστημόπλοιο έχει μήκος ίσο με l_0/γ. Άρα ο χρόνος που μετρά ο ακίνητος παρατηρητής στη Γη δίνεται από $\Delta t=\frac{l_0}{\gamma V}=\frac{l_0}{\gamma\beta c}$ όπου V η ταχύτητα του διαστημοπλοίου.

Έτσι έχουμε ότι

$$\beta\gamma=\frac{l_0}{c\,\Delta t}\Rightarrow\beta^2\gamma^2+1=\gamma^2=1+\left(\frac{l_0}{c\,\Delta t}\right)^2\Rightarrow\gamma=\sqrt{1+\left(\frac{l_0}{c\,\Delta t}\right)^2} \qquad (1)$$

Όμως

$$\beta=\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι

$$\beta=\sqrt{1-\frac{1}{1+\left(\frac{l_0}{c\,\Delta t}\right)^2}}=\sqrt{1-\frac{(c\,\Delta t)^2}{(c\,\Delta t)^2+l_0^2}}=\sqrt{\frac{l_0^2}{(c\,\Delta t)^2+l_0^2}}=\sqrt{\frac{300^2}{300^2+9\times10^{16}*0.750^2 10^{-12}}}=0.8$$

(δ) Το αρχικό σωματίδιο κινείται με $\beta_0=0.8\Rightarrow\gamma_0=0.6$ (1)

Από διατήρηση ορμής έχουμε ότι $m_0\beta_0\gamma_0c^2=m\beta\gamma c^2$ (2)

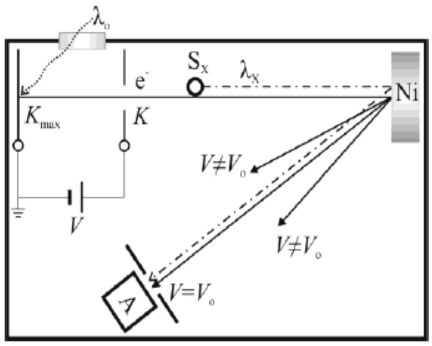
Από διατήρηση ενέργειας έχουμε ότι $m_0\gamma_0c^2+3m_0c^2=m\gamma c^2$ (3)

Διαιρώντας την (2) με την (3) έχουμε ότι $\beta=\frac{\beta_0\gamma_0}{\gamma_0+3}=\frac{0.8\times0.6}{3.6}=\frac{0.48}{3.6}=0.133333\Rightarrow\beta\gamma=0.1345$

Τότε από (2) έχουμε ότι

$$m=m_0\frac{\beta_0\gamma_0}{\beta\gamma}=\frac{0.48}{0.1345}m_0=3.57\,m_0$$

Θέμα 3ο: Στο διπλανό σχήμα δίνεται διάταξη μέτρησης του μήκους κύματος λ_X δέσμης ακτίνων Χ οι οποίες παράγονται από πηγή S_X. Η μέθοδος μέτρησης είναι η εξής: Η δέσμη ακτίνων Χ προσπίπτει κάθετα σε κρύσταλλο Ni και υφίσταται περίθλαση Bragg. Ο ανιχνευτής Α περιστρέφεται κατά άγνωστη γωνία έως ότου ανιχνεύσει τις ακτίνες Χ. Δεύτερη δέσμη ηλεκτρονίων παράγεται από διάταξη φωτοηλεκτρικού φαινομένου (πάνω αριστερά). Τα ηλεκτρόνια παράγονται όταν η φωτοευαίσθητη επιφάνεια βομβαρδιστεί με φωτόνια μήκους κύματος λ_o. Ηλεκτρόδιο-συλλέκτης, με οπή από την οποία εξέρχονται τα ηλεκτρόνια έχει τοποθετηθεί δεξιά της φωτοευαίσθητης επιφάνειας και βρίσκεται σε δυναμικό V. Η δέσμη ηλεκτρονίων προσπίπτει κάθετα στον κρύσταλλο Ni και υφίσταται επίσης περίθλαση Bragg. Η κινητική ενέργεια της δέσμης των ηλεκτρονίων μεταβάλλεται αλλάζοντας το δυναμικό V το οποίο έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή της γωνίας περίθλασης της δέσμης των ηλεκτρονίων. Το μήκος κύματος λ_X υπολογίζεται όταν οι δύο δέσμες περιθλώνται κατα την ίδια γωνία και ανιχνεύονται στον ανιχνευτή Α.



Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

(α) Πρώτα μετράμε την τάση αποκοπής $V=V_s<0$, δηλαδή την οριακή τάση για την οποία δεν ανιχνεύεται κανένα ηλεκτρόνιο στο ηλεκτρόδιο-συλλέκτη. Για λ_o=225.4 nm μετρήθηκε ότι $|V_s|$=2 Volts. Βρείτε το έργο εξόδου του φωτοευαίσθητου ηλεκτροδίου. [8 μονάδες]

(β) Στη συνέχεια τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται μέσω εφαρμοζόμενης τάσης $V>0$. Για μία συγκεκριμένη τάση $V=V_o$ η δέσμη ανιχνεύεται από τον Α. Μετρήθηκε ότι V_o=7.4 Volts. Βρείτε την κινητική ενέργεια K με την οποία τα ηλεκτρόνια προσπίπτουν στον κρύσταλλο Ni. [4 μονάδες]

(γ) Βρείτε το μήκος κύματος λ_X. Εξηγήστε λεπτομερώς τον συλλογισμό σας. [13 μονάδες]

Λύση:

(α) Η σχέση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου είναι

$$hf = W + KE \quad \text{όπου} \quad KE = eV_s$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_0} = W + eV_s \Rightarrow W = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_0} - eV_s = \frac{6.28\times 197.3 \text{ eV nm}}{225.4\,\text{nm}} - 2\,\text{eV} = 5.5\,\text{eV} - 2\,\text{eV} = 3.5\,\text{eV}$$

(β) Από την (1) κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων όταν εξέρχονται από το μέταλλο είναι 2 eV. Συνεπώς η ολική κινητική ενέργεια με την οποί τα ηλεκτρόνια προσπίπτουν πάνω στον κρύσταλλο είναι

$$KE = 2.0\,\text{eV} + 7.4\,\text{eV} = 9.4\,\text{eV}$$

(γ) Για να σκεδάζονται τα ηλεκτρόνια κατά Bragg με τον ίδιο τρόπο όπως και η ακτίνες-Χ σημαίνει ότι το μήκος κύματος των ακτίνων-Χ (λ_X) είναι ίδιο με το μήκος κύματος de Broglie των ηλεκτρονίων (λ_e). Άρα για να βρούμε το λ_X δεν έχουμε παρά να βρούμε το λ_e το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$\lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{cp} \tag{1}$$

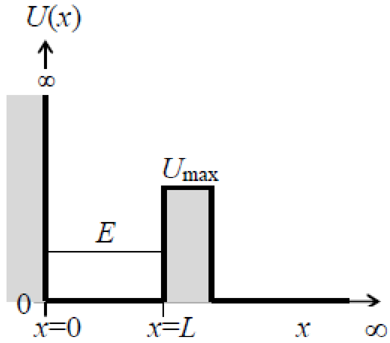
Ηλεκτρόνια με κινητική ενέργεια μικρότερη της μάζας τους περιγράφονται σωστά από μη-σχετικιστικές σχέσεις. Συνεπώς

$$KE = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{(pc)^2}{2m_e c^2} \Rightarrow \quad pc = \sqrt{2m_e c^2 \times KE} = \sqrt{2 \times 0.511 \times 10^6 \times 9.4}\,\text{eV} = 3099.5\,eV \tag{2}$$

Έτσι από (1) και (2) έχουμε ότι $\lambda_X = \lambda_e = \dfrac{2\pi\hbar c}{cp} = \dfrac{6.28 \times 197.3\,\text{eV nm}}{3099.5\,\text{nm}} = 0.4\,\text{nm}$

Θέμα 4ο:

(α) Διατυπώστε την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg, όσον αφορά τον προσδιορισμό της ορμής και της θέσης, και εξηγήστε συνοπτικά τις φυσικές συνέπειες που έχει. [5 μονάδες]



(β) Η δυναμική ενέργεια του διπλανού σχήματος αποτελεί χονδροειδή απλούστευση της δυναμικής ενέργειας στην περιοχή ενός πυρήνα. Υποθέστε, κατ' αρχήν, ότι το μέγιστο $U_{\max} \to \infty$. Ένα σωματίδιο είναι πλήρως εγκλωβισμένο στο πηγάδι, τυπικών πυρηνικών διαστάσεων L=10 fm (1 fm=10^{-15} m). Εκτιμήστε την ορμή του σωματιδίου, εκφρασμένη σε MeV/c. [5 μονάδες]

(γ) Εκτιμήστε την κινητική ενέργεια KE σωματιδίου εντός του πηγαδιού, (ι) εάν ήταν ηλεκτρόνιο ($m_e c^2$=0.511 MeV) και (ιι) εάν ήταν πρωτόνιο ($M_P c^2$=938.3 MeV). Δώστε ιδιαίτερη προσοχή στη χρήση της σχετικιστικής ή της μη-σχετικιστικής έκφρασης για την κινητική ενέργεια. Εκτιμήστε επίσης την ολική ενέργεια E των δύο σωματιδίων. [5 μονάδες]

(δ) Υποθέστε ότι το $U_{\max}$ δεν είναι άπειρο αλλά πεπερασμένο. Η ενέργεια των σωματιδίων δεν μεταβάλλεται ιδιαίτερα, αλλά τώρα τα σωματίδια μπορούν να διαφύγουν από την περιοχή μήκους L μέσω του φαινομένου σήραγγας. Ποια θα είναι η κινητική ενέργειά τους μακριά από τον πυρήνα ($x \to \infty$) και γιατί; [5 μονάδες]

(ε) Κατά τις πυρηνικές μεταπτώσεις β, εκπέμπονται από τον πυρήνα ηλεκτρόνια με κινητική ενέργεια που δεν υπερβαίνει ποτέ τα 5 MeV. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από (γ) και (δ) εξηγήστε αν είναι δυνατόν τα ηλεκτρόνια αυτά να είναι συστατικά του πυρήνα, όπως είναι τα πρωτόνια και τα νετρόνια. [5 μονάδες]

Λύση:

(α)

$$\Delta p\, \Delta x \geq \hbar$$

Η αρχή του Heisenberg αναφέρεται σε ταυτόχρονη μέτρηση της ορμής και της θέσης ενός σωματιδίου. Δp είναι η αβεβαιότητα της μέτρησης της ορμής και Δx η αβεβαιότητα της μέτρησης της θέσης. Συνέπεια της σχέσης αυτής είναι όσο μικρότερη είναι η αβεβαιότητα στη μέτρηση της θέσης τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα στη μέτρηση της ορμής και αντιστρόφως. Δηλαδή σε ένα πείραμα στο μικρόκοσμο ποτέ δεν θα μπορέσουμε να μετρήσουμε ορμή και ενέργεια ταυτόχρονα με άπειρη ακρίβεια. Η κβάντωση μεγεθών είναι συνέπεια της αρχής αυτής.

(β)

$$cp \sim \frac{\hbar c}{\Delta x} = \frac{197.3\, Mev\, fm}{10\, fm} = 19.23\, MeV \Rightarrow p \sim 19.23\, MeV/c$$

(γ)

$$p = m\gamma\beta c \;\Rightarrow\; cp = \gamma\beta mc^2 \;\Rightarrow\; \gamma\beta = \frac{cp}{mc^2}$$

Για ηλεκτρόνια

$$\gamma\beta = \frac{cp}{m_e c^2} = \frac{19{,}73\, MeV}{0.511\, MeV} = 19.23$$

Για πρωτόνια

$$\gamma\beta = \frac{cp}{m_P c^2} = \frac{19{,}73\, MeV}{938.3\, MeV} = 0.021$$

Συνεπώς τα ηλεκτρόνια είναι σχετικιστικά και για τον υπολογισμό της κινητικής τους ενέργειας πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την σχετικιστική κινητική ενέργεια ενώ τα πρωτόνια δεν είναι σχετικιστικά και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κλασσική σχέση για την κινητική ενέργεια (φυσικά και η σχετικιστική κινητική ενέργεια θα δώσει το σωστό αποτέλεσμα).

$$KE_e = \sqrt{(cp)^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 = \sqrt{(19.73)^2 + 0.511^2}\,\text{MeV} - 0.511\,\text{MeV} = 19.23\,\text{MeV}$$

Για το πρωτόνιο ισχύει η κλασσική σχέση

$$KE_P = \frac{p^2}{2\,m_P} = \frac{(cp)^2}{2\,m_P c^2} = \frac{(19.73)^2}{2\times 938.3}\,\text{MeV} = 0.21\,\text{MeV}$$

η οποία φυσικά δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με την σχετικιστική σχέση

$$KE_P = \sqrt{(cp)^2 + m_P^2 c^4} - m_P c^2 = \sqrt{(19.73)^2 + 938.3^2}\,\text{MeV} - 938.3\,\text{MeV} = 0.21\,\text{MeV}$$

(δ) Ισχύει δια κάθε x ότι $E = KE + V$. Μέσα στο φρέαρ δυναμικού $V = 0 \Rightarrow E = KE$. Το ίδιο ισχύει και για $x \to \infty$. Συνεπώς τα σωματίδια που διαπεράσουν το φράγμα δυναμικού θα κινούνται με $E = KE$ καθότι στο άπειρο το δυναμικό είναι μηδέν.

(ε) Από τα πιο πάνω συμπεραίνουμε ότι αν τα ηλεκτρόνια ήταν συστατικά του πυρήνα θα έπρεπε να εκπέμπονται με ενέργεια περίπου 19 MeV. Στις β-μεταπτώσεις η ενέργεια των εκπεμπόμενων ηλεκτρονίων είναι πολύ μικρότερη των 19 MeV (5 MeV την προκειμένη περίπτωση) και συνεπώς τα ηλεκτρόνια αυτά παρόλο που εκπέμπονται σε β-μεταπτώσεις δεν είναι συστατικά του πυρήνα.

Τυπολόγιο:

$$p = m\gamma\beta c, \quad E = m\gamma c^2, \quad E = \sqrt{(pc)^2 + m^2 c^4}, \quad KE = \sqrt{(pc)^2 + m^2 c^4} - mc^2 \quad \beta = V/c, \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$
$$KE = p^2/2m \quad (1+x)^N \approx 1 + Nx \quad \hbar c = 197.3\,\text{MeV fm} = 197.3\,\text{eV nm} \quad m = \gamma m_0 = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$$
$$x' = x - R \quad v' = v - V$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ