

Θέμα 4^ο: Σύμφωνα με την κλασική θεώρηση για τις δέσμιες καταστάσεις του ατόμου του Υδρογόνου, οι κυκλικές τροχιές του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα οφείλονται στη δράση της μεταξύ τους ελκτικής ηλεκτροστατικής δύναμης Coulomb ως κεντρομόλου δύναμης.

(α) Αποδείξτε ότι στην περίπτωση αυτή, και για μία τροχιά δεδομένης ακτίνας r , η ενέργεια του ηλεκτρονίου, $E = U + K$ (με U τη δυναμική και K τη μη-σχετικιστική κινητική ενέργειά του), γράφεται ως $E = -K$.

(β) Το 1900 γνωρίζανε ότι οι τυπικές ακτίνες των ατόμων είναι $r \approx 0.05$ nm. Εκτιμήστε, μέσω της αρχής της απροσδιοριστίας ($\Delta r \cdot \Delta p \geq \hbar$), την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης του ατόμου του Υδρογόνου.

(γ) Φωτόνιο ενέργειας 16 eV απορροφάται από άτομο Υδρογόνου που βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση. Εκτιμήστε την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά την απορρόφηση του φωτονίου. Συμπληρώστε την απάντησή σας με κατάλληλο ενεργειακό διάγραμμα.

Δίδονται: $\hbar c = 197.3$ eV·nm, $m_e c^2 = 511$ KeV, $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, $e = 1.6 \times 10^{-16}$ Cb, $\hbar = 1.054 \times 10^{-34}$ J·s, $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Απαντήσεις:

(α) Η δύναμη Coulomb δρα ως κεντρομόλος:

$$F_C = k \frac{e^2}{r^2} = m_e a_k = m_e \frac{v^2}{r} \text{ από όπου,}$$

$$K = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} k \frac{e^2}{r} \quad (1)$$

Από την άλλη, η δυναμική ενέργεια (φορτίο ηλεκτρονίου επί δυναμικό Coulomb) γράφεται ως

$$U = (-e)V_C = (-e) \cdot \left(k \frac{+e}{r} \right) = -k \frac{e^2}{r} \quad (2)$$

$$\text{Από τις (1) και (2), η ολική ενέργεια, } E = K + U = \frac{1}{2} k \frac{e^2}{r} + \left(-k \frac{e^2}{r} \right) = -\frac{1}{2} k \frac{e^2}{r} = -K$$

(β) Αρχή της απροσδιοριστίας, $\Delta r \cdot \Delta p \geq \hbar$

Για να έχει νόημα μία μέτρηση θέσης και μία μέτρηση ορμής θα πρέπει να ισχύει,

$$r \geq \Delta r \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\Delta r} \geq \frac{1}{r} \quad (3)$$

$$\text{και } p \geq \Delta p, \text{ οπότε από την (3) έχουμε, } p \geq \Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta r} \geq \frac{\hbar}{r}$$

$$\text{Συνεπώς για την ελάχιστη δυνατή τιμή της ορμής έχουμε, } p = \frac{\hbar}{r} \quad (4)$$

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι $E = -K$ και χρησιμοποιώντας την (4),

$$K = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2}{2m_e r^2} \rightarrow E = -\frac{\hbar^2}{2m_e r^2} \quad (5)$$

Εισάγουμε στην (5) τα αριθμητικά δεδομένα: Σε πρακτικές μονάδες,

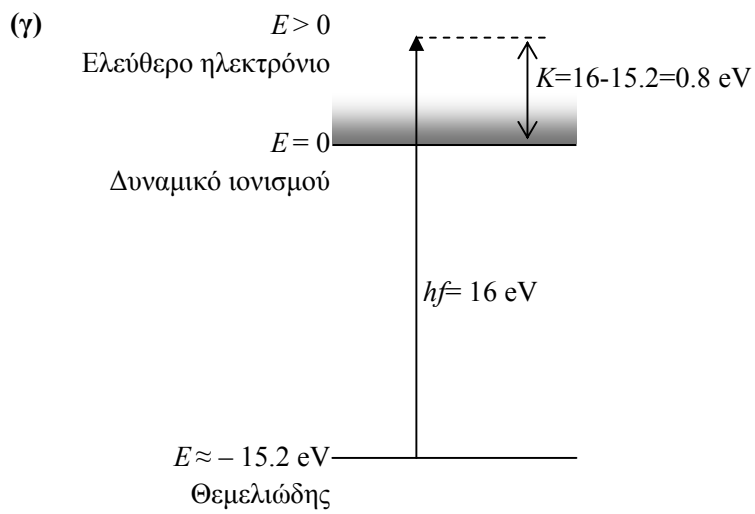
$$E = -\frac{\hbar^2 c^2}{2m_e c^2 r^2} = \frac{(197.3)^2 \text{ eV}^2 \cdot \text{nm}^2}{2 \cdot 511 \times 10^3 \text{ eV} (0.05)^2 \text{ nm}^2} = -15.2 \text{ eV}$$

ή, σε μονάδες SI,

$$E = -\frac{(1.054 \times 10^{-34})^2}{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times (0.05 \times 10^{-9})^2} = -2.432 \times 10^{-18} \text{ J}$$

που καταλήγει στην παραπάνω τιμή σε eV μετά από διαίρεση με 1.6×10^{-16} eV/J

Η παραπάνω εκτίμηση είναι πολύ κοντά στην πειραματική $E_{\pi} = -13.6$ eV.



Ο ιονισμός του ατόμου είναι μια διαδικασία εντελώς ανάλογη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.

(Σημειώσεις Κ3: «3. Το Μοντέλο του Bohr για το Άτομο του Υδρογόνου μέσω της Υπόθεσης de Broglie»)