ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Διδάσκοντες: Κ. Φουντάς, Σ. Κοέν

“ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι”

7 – 2 – 2011

<u>Θέμα 1ο:</u>

(α) Διατυπώστε συνοπτικά τις δύο αρχές της ειδικής σχετικότητας του Einstein.

[3 μονάδες]

(β) Τι απέδειξε το πείραμα Michelson και Morley ; (2-3 προτάσεις)

[3 μονάδες]

(γ) Πώς απορρέουν οι μετασχηματισμοί του Lorentz από τις αρχές της ειδικής σχετικότητας ; (με λόγια, χωρίς πράξεις, πολύ συνοπτικά)

[3 μονάδες]

(δ) Αδρανειακό σύστημα **O'** κινείται με ταχύτητα **V** σε σχέση με αδρανειακό σύστημα **O**. Η ταχύτητα **V** είναι στη διεύθυνση των αξόνων **x-x'**. Ο μετασχηματισμός Lorentz που μετασχηματίζει τις μεταβλητές χρόνου και χώρου από το **O'** στο **O** δίνεται από:

$$ct = \gamma(ct' + \beta x')$$
$$x = \gamma(x' + \beta ct')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

όπου $\beta = V/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ και **c** είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Διατυπώστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Lorentz που μετασχηματίζει τις μεταβλητές χρόνου και χώρου από το **O** στο **O'** και αιτιολογήστε την απάντηση σας.

[3 μονάδες]

(ε) Πιόνια σε ηρεμία διασπώνται σε μιόνια και νετρίνα μέσω της αντίδρασης: $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$. Ο μέσος χρόνος ζωής των πιονίων στο σύστημα ηρεμίας τους είναι $\Delta\tau$. Αν τα πιόνια κινούνται με ταχύτητα **V** στο σύστημα το εργαστηρίου δείξτε χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Lorentz ότι ο μέσος χρόνος ζωής τους στο σύστημα του εργαστηρίου δίνεται από την σχέση:

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau$$

[4 μονάδες]

(ζ) Δέσμες μιονίων χρησιμοποιούνται συχνά σε πειράματα φυσικής. Οι δέσμες αυτές παράγονται από την διάσπαση δεσμών φορτισμένων πιονιών διαμέσου της αντίδρασης $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε δέσμη πιονίων η οποία παράγεται σε σημείο **P** και κατευθύνεται προς στην διεύθυνση του θετικού άξονα των **x** με ταχύτητα $V = 0.90c$. Υπολογίστε την μέση απόσταση που τα πιόνια θα διανύσουν στο εργαστήριο πριν διασπαστούν.

[4 μονάδες]

(η) Η διάσπαση των πιονίων χαρακτηρίζεται από το νόμο των ραδιενεργών διασπάσεων: $N(t) = N_0 e^{-t/\Delta\tau}$ όπου N_0 είναι ο αρχικός αριθμός των πιονίων, $N(t)$ ο αριθμός των πιονίων που απομένουν μετά από χρόνο t και $\Delta\tau$ ο μέσος χρόνος ζωής τους. Οι χρόνοι t και $\Delta\tau$ ορίζονται εδώ στο σύστημα ηρεμίας του πιονίου. Πόσο μακριά από το σημείο **P** πάνω στον άξονα των **x** στο εργαστήριο πρέπει να τοποθετηθεί πειραματική διάταξη η οποία απαιτεί μία δέσμη η οποία περιέχει κατά το 90% μιόνια ;

[5 μονάδες]

Ο μέσος χρόνος ζωής του φορτισμένου πιονίου είναι $\Delta\tau = 2.6\times10^{-8}\ s$ και $c \approx 3\times10^{8}\ m/s$.

<u>Λύση:</u>

(α)

1. Οι νόμοι της φυσικής παραμένουν αναλλοίωτοι στα διάφορα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Δηλαδή και τα φαινόμενα του ηλεκτρομαγνητισμού και της μηχανικής πρέπει να έχουν τα ίδια αποτελέσματα σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.
2. Το φως και όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα $c=3\times10^8\,m/s$ σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς ανεξάρτητα από την σχετική ταχύτητα του συγκεκριμένου συστήματος αναφοράς. Κανένα σωματίδιο ή κύμα δεν μπορεί να υπερβεί την ταχύτητα του φωτός στο κενό.

(β)

Το πείραμα των Michelson και Morley απέδειξε ότι το φως διαδίδεται με την ίδια ταχύτητα σε όλα τα αδρανειακά συστήματα, ανεξαρτήτως της γωνίας στροφής του πειράματος. Αν το φως χρειαζόταν τον αιθέρα για να διαδοθεί τότε, επειδή η γη έπρεπε να κινείται μέσα στον αιθέρα, θα έπρεπε να παρατηρήσουν διαφορετική ταχύτητα σε διαφορετικές διευθύνσεις. Άρα η αρχική υπόθεση ότι δηλαδή υπάρχει αιθέρας ήταν λάθος. Έτσι η κυματική εξίσωση για κύμα φωτός με ταχύτητα **c** ισχύει σε όλα τα αδρανειακά συστήματα.

(γ) Έστω σφαιρικό κύμα φωτός που εκπέμπεται από φωτεινή πυγή στο σύστημα **O**. Αν η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα, τότε ο οποιοσδήποτε παρατηρητής σε κινούμενο αδρανειακό σύστημα **O'** πρέπει, αφού κάνει μετρήσεις χρησιμοποιώντας χάρακες και συγχρονισμένα χρονόμετρα, να βρίσκει επίσης σφαιρικό κύμα. Αν κάποιος αναζητήσει γραμμικούς μετασχηματισμούς στο χωροχρόνο που ικανοποιούν την παραπάνω απαίτηση για το σφαιρικό κύμα τότε καταλήγει στους μετασχηματισμούς Lorentz.

(δ)

Αν το **O'** κινείται με ταχύτητα **V** σε σχέση με το **O** στην διεύθυνση του άξονα των **x**, τότε το **O** κινείται με ταχύτητα **-V** σε σχέση με το **O'** επίσης στην διεύθυνση του άξονα των **x**. Άρα οι μετασχηματισμοί Lorentz από το **O** στο **O'** είναι:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

(ε)

$$ct = \gamma(ct' + \beta x') \Rightarrow c\Delta t = \gamma(c\Delta t' + \beta\Delta x') \quad (1)$$

Στο σύστημα του πιονίου όμως

$$\Delta x' = 0 \text{ και } \Delta t' = \Delta\tau \qquad (2)$$

Άρα από (1) και (2) έχουμε:

$$c\Delta t = \gamma c\Delta t' = \gamma c\Delta\tau \Rightarrow \Delta t = \gamma\Delta\tau$$

(ζ)

$$\Delta S = V\cdot\Delta t = V\gamma\Delta\tau = \frac{V\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{0.9\times3\times10^8\,m/s\times2.6\times10^{-8}\,s}{\sqrt{1-0.9^2}} \approx 16\,m$$

(η)

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\gamma\Delta\tau}} = N_0 e^{-\frac{tV}{V\gamma\Delta\tau}} = N_0 e^{-\frac{D}{V\gamma\Delta\tau}} \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = -\frac{D}{V\gamma\Delta\tau} \Rightarrow D = -\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)\cdot V\gamma\Delta\tau = -(-2.3)\times16\,m \approx 37\,m$$

<u>Θέμα 2ο:</u>

(α) Η ολική ενέργεια και ορμή σχετικιστικού σωματιδίου δίδονται από τις σχέσεις $E = m\gamma c^2$ καί $p = m\gamma\beta c$ όπου **V** είναι η ταχύτητα του σωματιδίου, $\beta = V/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ και **c** είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Δείξετε ότι

$$E = \sqrt{(pc)^2 + m^2c^4}$$

[5 μονάδες]

(β) Υπολογίστε το β σαν συνάρτηση της ολικής ενέργειας και της ορμής. Αποδείξτε ότι σωματίδια που έχουν μη-μηδενική μάζα δεν μπορούν ποτέ να κινούνται με την ταχύτητα του φωτός στο κενό και αντιθέτως σωματίδια με μηδενική μάζα πρέπει αναγκαστικά να κινούνται με την ταχύτητα του φωτός στο κενό.

[5 μονάδες]

(γ) Ας υποθέσουμε ότι ένα σωματίδιο Higgs παράγεται στον μεγάλο αδρονικό επιταχυντή LHC του CERN και έχει μάζα $m_H c^2 = 120 \ \ GeV$. Το Higgs διασπάται σε δύο φωτόνια μέσω της αντίδρασης $H \to \gamma\gamma$. Υπολογίστε την ενέργεια και την ορμή των δύο φωτονίων στο σύστημα του Higgs.

[5 μονάδες]

(δ) Έστω ότι το Higgs κινείται με ταχύτητα **V = 0.9 c** προς την κατεύθυνση του θετικού άξονα των **x** στο σύστημα του εργαστηρίου και ας υποθέσουμε ότι ένα από τα δύο φωτόνια εκπέμπεται επίσης στην κατεύθυνση του θετικού άξονα των **x**. Δείξτε, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Lorentz, ότι η ενέργεια αυτού του φωτονίου στο σύστημα του εργαστηρίου δίνεται από την σχέση:

$$E_\gamma = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} E'_\gamma$$

όπου E_γ είναι η ενέργεια του φωτονίου στο σύστημα του εργαστηρίου και E'_γ η ενέργεια του φωτονίου στο σύστημα του του Higgs. Με ποιο φαινόμενο σχετίζεται η σχέση αυτή ;

[4 μονάδες]

(ε) Υπολογίστε την ενέργεια E_γ.

[2 μονάδες]

(ζ) Υπολογίστε την μεγίστη γωνία που μπορεί να έχει ένα φωτόνιο από το Higgs στό εργαστήριο.

[4 μονάδες]

Μετασχηματισμοί Lorentz **<u>για ενέργεια και ορμή:</u>**

Αν αδρανειακό σύστημα **O'** κινείται με ταχύτητα **V** σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα **O** στη διεύθυνση των αξόνων **x-x', τ**ότε ο μετασχηματισμός Lorentz που μετασχηματίζει την ολική ενέργεια και ορμή από το σύστημα **O** στο σύστημα **O'** δίνεται από τις σχέσεις:

$$E' = \gamma(E - \beta c p_x)$$

$$cp'_x = \gamma(cp_x - \beta E)$$

$$p'_y = p_y$$

$$p'_z = p_z$$

<u>Λύση:</u>

(α) $E = m\gamma c^2$ (1) $p = m\gamma\beta c$ (2). Από (2) έχουμε ότι :

$$\sqrt{(pc)^2+m^2c^4} = \sqrt{(m\beta\gamma c)^2+m^2c^4} = mc^2\sqrt{(\beta\gamma)^2+1} \qquad (3)$$

$$(\beta\gamma)^2+1 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + 1 = \frac{\beta^2+1-\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta^2} = \gamma^2 \qquad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε ότι: $\sqrt{(pc)^2+m^2c^4} = m\gamma c^2$ (5)

Από (1) και (5) έχουμε ότι: $E = \sqrt{(pc)^2+m^2c^4}$ (6)

(β) Διαιρώντας την (2) με την (1) και κάνοντας χρήση της (6) έχουμε ότι

$$\frac{\beta}{c} = \frac{p}{E} \Rightarrow \beta = \frac{cp}{E} = \frac{1}{E}\sqrt{E^2 - m^2c^4} = \sqrt{1 - \frac{m^2c^4}{E^2}}$$

Δηλαδή εάν το $m = 0 \Rightarrow \beta = 1$

καθώς επίσης εάν το $m > 0 \Rightarrow \beta < 1$

(γ) Επειδή το φωτόνιο έχει μηδενική μάζα, η ενέργεια του δίνεται από την σχέση:

$$E_\gamma = |\vec{q}_\gamma| c \qquad (7)$$

όπου $\vec{q}_\gamma$ είναι η ορμή του φωτονίου. Συνεπώς η διατήρηση της ενέργειας μας δίνει:

$$m_H c^2 = |\vec{q}_{\gamma 1}| c + |\vec{q}_{\gamma 2}| c \qquad (8)$$

όπου $\vec{q}_{\gamma 1}, \vec{q}_{\gamma 2}$ είναι η ορμές των δύο φωτονίων. Η διατήρηση της ορμής στο σύστημα του H (δηλαδή στο κέντρο μάζας) μας δίνει ότι:

$$0 = \vec{q}_{\gamma 1} + \vec{q}_{\gamma 2} \Rightarrow |\vec{q}_{\gamma 1}| = |\vec{q}_{\gamma 2}| = q_\gamma \qquad (9)$$

Δηλαδή τα δύο φωτόνια εκπέμπονται ακριβώς σε αντίθετες (back-to-back) κατευθύνσεις στο σύστημα του H επειδή η αρχική ορμή στο σύστημα αυτό είναι μηδέν. Από (8) και (9) έχουμε:

$$m_H c^2 = 2|\vec{q}_\gamma| c \Rightarrow |\vec{q}_\gamma| c = \frac{m_H c^2}{2} \Rightarrow$$

και μέσω της (7)

$$E_\gamma = q_\gamma c = \frac{m_H c^2}{2} = \frac{120\,GeV}{2} = 60\,GeV$$ (ενέργεια του κάθε φωτονίου).

Προφανώς η ορμή του κάθε φωτονίου είναι $q_\gamma = 60\,GeV/c$.

(δ) Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Lorentz για ενέργεια και ορμή από το **O'** στο **O** δίνεται από

$$E = \gamma(E' + \beta c p'_x) \qquad (10)$$
$$cp_x = \gamma(cp'_x + \beta E') \qquad (11)$$
$$cp_y = cp'_y \qquad (12)$$
$$cp_z = cp'_z \qquad (13)$$

Από την (10) και (1) έχουμε ότι:

$$E_\gamma = \gamma(E'_\gamma + \beta E'_\gamma) = \gamma(1 + \beta)E'_\gamma = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}E'_\gamma$$

(ε) $$E_\gamma = \sqrt{\frac{1+0.9}{1-0.9}}E'_\gamma = 4.36 \times 60\,GeV \approx 262\,GeV$$

(ζ) Για να έχουν τα φωτόνια την μεγίστη γωνία στο εργαστήριο πρέπει να εκπέμπονται σε γωνία 90^0 μοιρών στο σύστημα του |Higgs δηλαδή στο κέντρο μάζας. Άρα στο κέντρο μάζας τα φωτόνια έχουν ορμή μόνο στον άξονα των **y**. Έτσι η γωνία τους στο εργαστήριο δίνεται από:

$\tan\theta = \dfrac{cp_y}{cp_x}$ και από (11) και (12) $\tan\theta = \dfrac{cp'_y}{\gamma(cp'_x + \beta E')} = \dfrac{cp'_y}{\gamma\beta E} = \dfrac{cp}{\gamma\beta E} = \dfrac{1}{\gamma\beta}$.

Επειδή το $\beta = 0.90 \Rightarrow \gamma = 2.29 \Rightarrow \beta\gamma = 2.07$. Έτσι $\tan\theta = \dfrac{1}{\gamma\beta} = \dfrac{1}{2.07} = 0.484$

Δηλαδή $\theta = 25.8^0$.