ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Διδάσκοντες: Κ. Φουντάς, Σ. Κοέν, Α. Λύρας

"ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι-ΛΥΣΕΙΣ"
14 – 2 – 2012

<u>Θέμα 1ο:</u>

(α) Οι μετασχηματισμοί του Lorentz για ενέργεια και ορμή δίνονται από τις σχέσεις

$$E' = \gamma(E - \beta c p_x)$$
$$cp'_x = \gamma(cp_x - \beta E)$$
$$cp'_y = cp_y$$
$$cp'_z = cp_z$$

όπου E', p'_x, p'_y, p'_z είναι η ενέργεια και οι τρεις συντεταγμένες αντίστοιχα της ορμής στο αδρανειακό σύστημα **O'** το οποίο κινείται με ταχύτητα $V = \beta c$ στη διεύθυνση του άξονα **x** ως προς ακίνητο σύστημα **O**. Η ενέργεια και οι τρεις συντεταγμένες αντίστοιχα της ορμής στο αδρανειακό σύστημα **O** είναι E, p_x, p_y, p_z και $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Δείξτε ότι η ποσότητα

$$E^2 - (cp)^2 = m^2 c^4 \qquad (1)$$

παραμένει αναλλοίωτη σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. [5 μονάδες]

(β) Δείξτε μέσω της (1) ότι η ορμή ενός φωτονίου δίνεται από τη σχέση

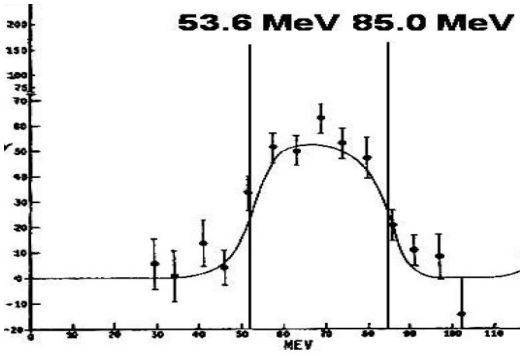
$$p = \frac{hf}{c}$$

όπου h η σταθερά του Plank και f η συχνότητα . [2 μονάδες]

(γ) Έστω φωτεινή πηγή η οποία κινείται με ταχύτητα $V = \beta c$ προς τα δεξιά πάνω στο θετικό άξονα **x** ενός ακίνητου συστήματος αναφοράς **O**. Η πηγή εκπέμπει φωτόνια συχνότητας f_0 τα οποία ανιχνεύονται από ακίνητο παρατηρητή που βρίσκεται στο σημείο ($x=0,\ y=0,\ z=0$). Δείξτε ότι η συχνότητα των φωτονίων f_Π τα οποία ανιχνεύει ο ακίνητος παρατηρητής δίνεται από την σχέση Doppler

$$f_\Pi = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, f_0$$ [5 μονάδες]

(δ) Έστω δέσμη ουδέτερων πιονίων στην κατεύθυνση του άξονα **x** με σταθερή ορμή. Τα ουδέτερα πιόνια μεταπίπτουν σε δύο φωτόνια μέσω της αντίδρασης $\pi^0 \to \gamma\gamma$. Ανιχνευτές γύρω από τη δέσμη μετρούν την ενεργειακή κατανομή των φωτονίων όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Ο άξονας **y** δείχνει τον αριθμό των



Σχήμα 1: Ενεργειακή κατανομή φωτονίων από μεταπτώσεις ουδέτερων πιονίων.

παρατηρούμενων φωτονίων και ο άξονας **x** την ενέργεια σε MeV. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1 η ενέργεια των φωτονίων κυμαίνεται μεταξύ μίας ελαχίστης τιμής που είναι 53.6 MeV και μίας μεγίστης τιμής που είναι 85.0 MeV. Με τι γωνίες στο σύστημα του πιονίου εκπέμπονται τα φωτόνια με την μέγιστη και ελάχιστη ενέργεια στο σύστημα του εργαστηρίου ; Με τι γωνίες στο σύστημα του πιονίου εκπέμπονται τα φωτόνια που έχουν ενέργεια $53.6\,MeV < E_\gamma < 85.0\,MeV$ στο σύστημα του εργαστηρίου; [3 μονάδες]

(ε) Χρησιμοποιώντας τις τιμές της μεγίστης και ελαχίστης ενέργειας των φωτονίων του Σχήματος 1 υπολογίστε την ταχύτητα των ουδετέρων πιονίων. [5 μονάδες]

Λύση:

(α)
Ένας τρόπος να το αποδείξουμε είναι αυτός που δόθηκε στις σημειώσεις. Δηλαδή αρχίζουμε από την σχέση $E'^2-(cp')^2 = m^2c^4$ στο σύστημα **O'** και την μετασχηματίζουμε το **O** χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς του Lorentz και την σχέση $E^2-(cp)^2 = m^2c^4$.

$$E'^2-(cp')^2 = \gamma^2(E-\beta pc)^2-\gamma^2(cp-\beta E)^2 = \gamma^2(E^2-(pc)^2)+\gamma^2(\beta^2c^2p^2-\beta^2E^2) \Rightarrow$$

$$E'^2-(cp')^2 = \gamma^2m^2c^4+\gamma^2\beta^2(c^2p^2-E^2) = \gamma^2m^2c^4+\gamma^2\beta^2(-m^2c^4) = m^2c^4\gamma^2(1-\beta^2) \Rightarrow$$

$$E'^2-(cp')^2 = m^2c^4$$

Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής

$$m^2c^4 = E'^2-(cp')^2 = \gamma^2(E-\beta pc)^2-\gamma^2(cp-\beta E)^2 = \gamma^2(E^2+(\beta pc)^2)-\gamma^2(c^2p^2+\beta^2E^2) \Rightarrow$$

$$m^2c^4 = \gamma^2E^2(1-\beta^2)+\gamma^2c^2p^2(\beta^2-1) = E^2-c^2p^2 \ .$$

(β) $E_\gamma^{\,2}-(cp_\gamma)^2 = m_\gamma^{\,2}c^4$ αλλά $m_\gamma = 0$. Έτσι $E_\gamma^{\,2}-(cp_\gamma)^2 = 0 \Rightarrow p_\gamma = \dfrac{E_\gamma}{c}$ (1)

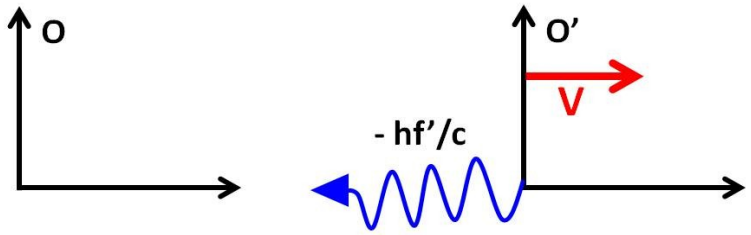
όμως $E_\gamma = hf$ (2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow p_\gamma = \dfrac{hf}{c}$

(γ) Ο μετασχηματισμός Lorentz από το O' στο O είναι

$$E = \gamma(E' + \beta cp'_x) \quad (1)$$

(και όπως αναφέρουν οι σημειώσεις βγαίνει από τον μετασχηματισμό Lorentz που μας δίνεται αν αλλάξουμε το πρόσημο της ταχύτητας και τις τονούμενες με άτονες μεταβλητές)



Από (1) λαμβάνοντας υπόψιν ότι η ορμή του φωτονίου είναι αρνητική (κινείται προς τα αριστερά) έχουμε ότι

$$hf = \gamma(hf' + \beta c(\frac{-hf'}{c})) = \gamma(hf' - \beta hf') = \gamma hf'(1 - \beta) \Rightarrow$$

$$f = \gamma f'(1 - \beta) = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} f' = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} f_0 \quad (2)$$

Το ερώτημα αυτό μπορεί να λυθεί επίσης με διατήρηση ορμής και ενέργειας.

(δ) Έστω ότι ο άξονας **x'** στο σύστημα του πιονίου και ο άξονας **x** στο σύστημα του εργαστηρίου είναι κατά την διεύθυνση της ταχύτητας του πιονίου. Από την σχέση (1) του (γ) είναι προφανές ότι τα φωτόνια με την μεγίστη ενέργεια στο εργαστήριο εκπέμπονται στο σύστημα του πιονίου σε γωνία μηδέν (όταν η ταχύτητα του πιονίου και η ορμή του φωτονίου έχουν το ίδιο πρόσημο. Για τον ίδιο λόγο τα φωτόνια με την ελάχιστη ενέργεια στο εργαστήριο εκπέμπονται στο σύστημα του πιονίου σε γωνία 180°. Τα φωτόνια με ενδιάμεσες ενέργειες εκπέμπονται στο σύστημα του πιονίου με γωνία μεγαλύτερη του 0 και μικρότερη των 180°.

(ε) Λαμβάνοντας υπόψιν της απαντήσεις (γ) και (δ) έχουμε ότι

$$f_{max} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} f_0 \Rightarrow E_{max} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} E_0 \quad (3)$$

$$f_{min} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} f_0 \Rightarrow E_{min} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} E_0 \quad (4)$$

Διαιρώντας την (3) με την (4) έχουμε

$$\frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \Rightarrow (1 - \beta)\frac{E_{max}}{E_{min}} = 1 + \beta \Rightarrow \frac{E_{max}}{E_{min}} - 1 = \beta(\frac{E_{max}}{E_{min}} + 1) \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{(\frac{E_{max}}{E_{min}} - 1)}{\frac{E_{max}}{E_{min}} - 1} = \frac{85/53.6 - 1}{85/53.6 + 1} \approx 0.227$$

Θέμα 2ο:

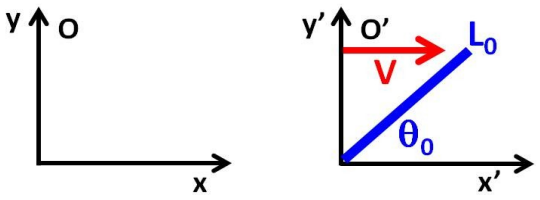
Μια ράβδος μήκους $\mathbf{L_0}$ κινείται με ταχύτητα **υ** κατά την διεύθυνση του άξονα **x'** και σχηματίζει γωνία $\boldsymbol{\theta_0}$ με τον άξονα αυτό.

(α) Υπολογίστε το μήκος της ράβδου όπως μετράται από ακίνητο παρατηρητή.

[10 μονάδες]

(β) Υπολογίστε την γωνία **θ** που σχηματίζει η ράβδος με τον άξονα **x** στο σύστημα του ακίνητου παρατηρητή (υπολογίστε την **tanθ**). [10 μονάδες]

ΥΠΌΔΕΙΞΗ: Μπορείτε να θεωρήσετε ότι το κάτω άκρο της ράβδου συμπίπτει με την αρχή του τονούμενου συστήματος συντεταγμένων.



Λύση:

Μόνο η συντεταγμένη στη διεύθυνση του άξονα **x** υφίσταται συστολή. Έτσι έχουμε

(α)

$$L = \sqrt{(L_0 \sin\theta_0)^2 + \frac{(L_0 \cos\theta_0)^2}{\gamma^2}} = \frac{L_0}{\gamma}\sqrt{(\gamma \sin\theta_0)^2 + (\cos\theta_0)^2}$$

(β)

$$L_x = \frac{L_0 \cos\theta_0}{\gamma} \qquad (1)$$

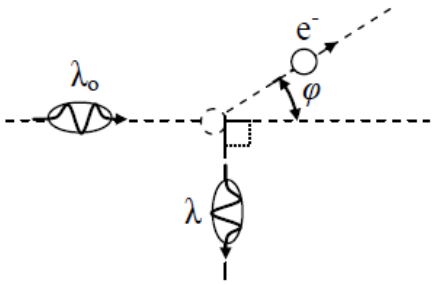
$$L_y = L_0 \sin\theta_0 \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι

$$tan\theta = \frac{L_y}{L_x} = \gamma \tan\theta_0$$

Θέμα 3ο:

Σε πείραμα σκέδασης Compton χρησιμοποιείται δέσμη ακτίνων X μήκους κύματος $\lambda_0 = 3\lambda_C$ (με $\lambda_C = h/m_e c$ το μήκος κύματος Compton, h η σταθερά του Plank και m_e η μάζα του ηλεκτρονίου). Η σκέδαση των ακτίνων παρατηρείται κάθετα στη διεύθυνση της προσπίπτουσας δέσμης, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



(α) Βρείτε το μήκος κύματος λ της σκεδαζόμενης δέσμης ακτίνων X ως συνάρτηση του λ_C .

[5 μονάδες]

(β) Βρείτε τη γωνία φ κατά την οποία σκεδάζεται το ηλεκτρόνιο.

[10 μονάδες]

(γ) Αποδείξτε ότι το μήκος κύματος de Broglie του σκεδαζόμενου ηλεκτρονίου, $\lambda_e^{de\ Broglie}$, είναι ίσο με $12\lambda_C/5$. [15 μονάδες]

Δίδονται οι παρακάτω σχέσεις: $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)$, $E=hf$, $p=h/\lambda$

Λύση:

(α) Δίδεται ότι $\lambda_0 = 3\lambda_c$ όπου $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$.

Από

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta) \Rightarrow \lambda - 3\lambda_c = \lambda_c(1-\cos 90^0) \Rightarrow \lambda = 4\lambda_c$$

(β) Η ορμή του φωτονίου δίνεται από την σχέση $E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow P_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{h}{\lambda}$ (1)

Χρησιμοποιώντας την (1) και διατήρηση ορμής στον άξονα των **x** έχουμε ότι

$$\frac{h}{3\lambda_c} = P_e \cos\varphi \quad (3)$$

Χρησιμοποιώντας την (1) και διατήρηση ορμής στον άξονα των **y** έχουμε ότι

$$\frac{h}{4\lambda_c} = P_e \sin\varphi \quad (4)$$

Διαιρώντας την (4) με την (3) έχουμε ότι

$$\tan\varphi = \frac{3}{4}$$

(γ) Από (3) και (4) έχουμε ότι

$$P_e = \sqrt{(P_e\cos\varphi)^2 + (P_e\sin\varphi)^2} = \sqrt{\left(\frac{h}{3\lambda_c}\right)^2 + \left(\frac{h}{4\lambda_c}\right)^2} = \frac{h}{\lambda_c}\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{5}{12}\frac{h}{\lambda_c} \quad (5)$$

Από την (5) και τον ορισμό του κύματος De Broglie έχουμε ότι

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{P_e} = \frac{12}{5}\lambda_c$$

Θέμα 4ο:

(α) Διατυπώστε την Αρχή της Αβεβαιότητας του Heisenberg όσον αφορά τον προσδιορισμό της ορμής και της θέσης και εξηγήστε συνοπτικά τις φυσικές συνέπειές της. [5 μονάδες]

(β) Εκτιμήστε την ελάχιστη κινητική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου το οποίο είναι εγκλωβισμένο σε ένα άτομο υδρογόνου διαμέτρου $L \sim 10^{-10}$ **m**. [15 μονάδες]

(γ) Το μοριακό ιόν Υδρογόνου, H_2^+, σχηματίζεται όταν πλησιάσουν κοντά ένα άτομο υδρογόνου, **H**, και ένα πρωτόνιο. Τότε το ηλεκτρόνιο είναι εγκλωβισμένο σε μια περιοχή περίπου διπλάσιας έκτασης από ότι στο άτομο Υδρογόνου. Εξηγείστε το λόγο σχηματισμού του μοριακού ιόντος. [10 μονάδες]

$$\hbar = 1.054\times10^{-34}\,J\cdot s,\quad e = 1.6\times10^{-19}\,Cb,\quad m_e = 9.11\times10^{-31}\,kg,$$

$$\hbar c = 197.3\,MeV\,fm,\quad m_e c^2 = 0.511\,MeV,\quad 1\ fm = 10^{-15}\,m$$

Λύση:

(α) Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg δίνεται από την σχέση $\Delta p\,\Delta x \geq \hbar$. Στην πράξη η σχέση αυτή μας λέει ότι δεν μπορούμε να μετρήσουμε την ορμή και την θέση ενός σωματιδίου ταυτόχρονα με άπειρη ακρίβεια. Με όσο μεγαλύτερη ακρίβεια μετράται μια από τις ποσότητες αυτές, τόσο με λιγότερη ακρίβεια μετράται η άλλη.

(β) $$p \sim \Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar c}{\Delta x\, c} = \frac{197.3\times MeV\times fm}{10^{-10}\,m\times c} = \frac{197.3\times MeV\times10^{-15}\,m}{10^{-10}\,m\times c} = 1.971\,KeV/c$$

Αφού η μάζα του ηλεκτρονίου είναι $m_e c^2 = 511\,KeV$, άρα πολύ μεγαλύτερη της ορμής του΄, τότε $\beta = p/E \ll 1$. Άρα το ηλεκτρόνιο δεν είναι σχετικιστικό και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κλασσικό τύπο για την κινητική ενέργεια.

$$KE = \frac{p^2}{2m_e} \geq \frac{(1.973)^2\,KeV^2}{2\,m_e c^2} = \frac{(1.973)^2}{2\times511}\,KeV = 0{,}0038\,KeV = 3.8\,eV$$

(γ) Αν η απόσταση διπλασιαστεί τότε η ορμή θα είναι η μισή $p \geq \frac{1}{2}\times1.971\,KeV/c \approx 0.987\,KeV$ και η κινητική ενέργεια το ένα τέταρτο της προηγούμενης.

$KE \geq \frac{1}{4}\times3.8\,eV = 0.95\,eV$. Άρα το μοριακό ιόν Υδρογόνου, H_2^+ είναι ενεργειακά πιο σταθερό.