ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Διδάσκοντες: Κ. Φουντάς, Σ. Κοέν, Ν. Νικολής

" ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι ΛΥΣΕΙΣ "
11 – 2 – 2013

Θέμα 1ο: Δύναμη F ασκείται σε ηλεκτρόνιο με αποτέλεσμα αυτό να κινείται σε ευθεία γραμμή. Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου δίνεται από τη σχέση

$$KE = \int_0^v F\,ds \qquad (1)$$

όπου s η μετατόπιση και v η τελική ταχύτητα του ηλεκτρονίου. Η τελευταία είναι σχετικιστική και μπορεί να γραφεί ως $v = \beta c$ όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Δείξτε ότι

(α) $$\frac{d(\beta\gamma)}{dt} = \frac{d\beta}{dt}\gamma^3$$ [4 μονάδες]

(β) $$\frac{d\gamma}{dt} = \beta\frac{d\beta}{dt}\gamma^3$$ [4 μονάδες]

(γ) Χρησιμοποιήστε την (1) και τις (α) και (β) και δείξτε ότι
$$KE = m_e\gamma c^2 - m_e c^2 = E - m_e c^2$$ [4 μονάδες]

(δ) Δείξτε ότι
$$E_e = \sqrt{(cp_e)^2 + m_e^2 c^4}$$ [4 μονάδες]

(ε) Ποζιτρόνιο με κινητική ενέργεια **KE = 0.511 MeV** συγκρούεται μη ελαστικά με ηλεκτρόνιο το οποίο πριν την σύγκρουση είναι ακίνητο. Τα δύο σωματίδια δημιουργούν έτσι ένα άτομο που ονομάζεται ποζιτρόνιουμ (positronium). Χρησιμοποιώντας διατήρηση ορμής και ενέργειας δείξτε ότι η ταχύτητα του ατόμου του ποζιτρόνιουμ είναι $c/\sqrt{3}$. Δίδονται ότι $p = m\gamma\beta c$, $m_e c^2$ = **0.511 MeV**. [9 μονάδες]

Λύση:

(α) $$\frac{d}{dt}(\beta\gamma) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{d\beta}{dt}\gamma + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)\gamma^3(-2\beta)\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\beta}{dt}\gamma + \beta^2\gamma^3\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\beta}{dt}\gamma^3(\gamma^{-2}+\beta^2) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(\beta\gamma) = \frac{d\beta}{dt}\gamma^3(1-\beta^2+\beta^2) = \frac{d\beta}{dt}\gamma^3 \qquad (1)$$

(β) $$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)(1-\beta^2)^{-3/2}(-2\beta)\frac{d\beta}{dt} \Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \beta\frac{d\beta}{dt}\gamma^3 \qquad (2)$$

(γ) Από (1) και (2)

$$KE = \int_0^v \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^v \frac{d}{dt}(m\gamma\beta c)\,ds = mc\int_0^v \frac{d}{dt}(\gamma\beta)\,ds = mc\int_0^v \frac{d\beta}{dt}\gamma^3\,ds = mc\int_0^v \frac{1}{\beta}\frac{d\gamma}{dt}\,ds = mc^2\int_0^v \frac{1}{v}\frac{ds}{dt}\,d\gamma \Rightarrow$$

$$KE = mc^2\int_0^v d\gamma = mc^2\big(\gamma(v)-\gamma(0)\big) = mc^2(\gamma-1) = m\gamma c^2 - mc^2 = E - mc^2$$

(δ) $$E_e^2 = (cp_e)^2 + m_e^2c^4 = m^2\gamma^2\beta^2c^4 + m_e^2c^4 = m_e^2c^4(1+\gamma^2\beta^2) = m_e^2\gamma^2c^4 = E_e^2$$

(ε) Διατήρηση ενέργειας: $KE + m_ec^2 + m_ec^2 = M_P\gamma c^2 \Rightarrow 3m_ec^2 = M_P\gamma c^2$ (1)

Διατήρηση ορμής: $p_e = M_P\beta\gamma c \Rightarrow p_ec = M_P\beta\gamma c^2$ (2)

Υπολογισμός ορμής: $p_e^2c^2 = E_e^2 - m_e^2c^4 = (2m_ec^2)^2 - m_e^2c^4 = 3m_e^2c^4 \Rightarrow p_ec = \sqrt{3}m_ec^2$ (3)

Διαιρώντας την (2) με την (1) και χρησιμοποιώντας την (3) έχουμε ότι

$$\beta = \frac{p_ec}{3m_ec^2} = \frac{\sqrt{3}m_ec^2}{2m_ec^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

Θέμα 3ο: Η φασματική κατανομή (πυκνότητα ενέργειας) της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος ως συνάρτηση της συχνότητας f και της θερμοκρασίας T δίνεται από την σχέση

$$u(f,T)\,df = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{f^3}{e^{hf/kT}-1}df$$

(α) Σχεδιάστε την κατανομή αυτή ως συνάρτηση της συχνότητας για δύο διαφορετικές θερμοκρασίες T_1 και $T_2=2T_1$, λαμβάνοντας υπ' όψιν τους νόμους των Wien και Steffan-Boltzmann. [6 μονάδες]

(β) Δείξτε ότι η φασματική κατανομή ως συνάρτηση του μήκους κύματος γράφεται ως

$$u(\lambda,T)\,d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT}-1}$$ [7 μονάδες]

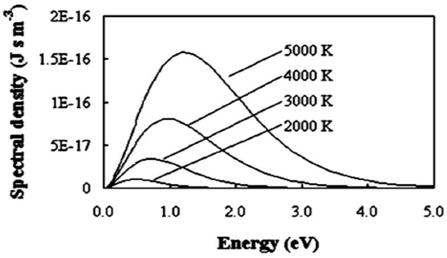
(γ) Δείξτε ότι η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου U που εκπέμπει το μέλαν σώμα είναι ανάλογη της T^4 [7 μονάδες]

(δ) Στο καλοριφέρ μιάς πολυκατοικίας χρησιμοποιείται νερό σε θερμοκρασία 50^oC. Λόγω ψύχους ο διαχειριστής αποφασίζει να αυξήσει τη θερμοκρασία του νερού στου 90^oC. Ποια είναι η σχετική μεταβολή του κόστους; [5 μονάδες]

Δίνονται: $\hbar c = hc/2\pi = 197.3\,MeV\,fm = 197.3\,eV\,nm$ $\quad m_e c^2 = 511\,KeV$ $\quad \int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}$

$m_e = 9.1\times10^{-31}\,kg,\ e = 1.6\times10^{-16}\,Cb,\ \hbar = 1.054\times10^{-34}\,J\cdot s,\ c=3\times10^8\,m/s$

Λύση:



(α) Η καμπύλες για 2000 K και 4000 K έχουν $T_2=2T_1$ και για αυτό το λόγο η καμπύλη των 4000 K έχει μέγιστο για ενέργεια (συχνότητα) <u>δύο φορές μεγαλύτερη</u> από αυτή των 2000 K όπως προβλέπει ο νόμος του Wien. Επί πλέον η καμπύλη των 4000 K έχει εμβαδόν <u>δεκαέξι φορές μεγαλύτερο</u> από το εμβαδόν της καμπύλης των 2000 K σύμφωνα με τον νόμο των Steffan-Boltzmann.

(β) $$u(\lambda,T)\,d\lambda = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{(c/\lambda)^3}{e^{hc/k\lambda T}-1}d(c/\lambda) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{(c/\lambda)^3}{e^{hc/k\lambda T}-1}\left(-\frac{c}{\lambda^2}d\lambda\right) = -\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{d\lambda}{e^{hc/k\lambda T}-1}$$

το μείον ένα χρειάζεται μόνο στην ολοκλήρωση έτσι η κατανομή είναι

$$u(\lambda,T)\,d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{d\lambda}{e^{hc/k\lambda T}-1}$$

(γ) $$U=\int_0^\infty u(f,T)\,df = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{f^3}{e^{hf/kT}-1}df \qquad (1)$$

Έστω $z=\frac{hf}{kT} \Rightarrow dz=\frac{h}{kT}df \Rightarrow df=\frac{kT}{h}dz$ και $f=\frac{kT}{h}z$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε $U=\frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4\int_0^\infty \frac{z^3}{e^z-1}dz=\frac{8\pi^5k^4}{15h^3c^3}T^4$ σε μονάδες ενέργειας ανά όγκο.

(δ) $\frac{U(90^o)}{U(50^o)}=\frac{\sigma(273+90)^4}{\sigma(273+50)^4}=\frac{363^4}{323^4} \approx \mathbf{1.6}$ δηλαδή 60% μεγαλύτερο κόστος.