Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων
Διαγράμματα Minkowski

18.1.2012

Σκοποί της διάλεξης 12:

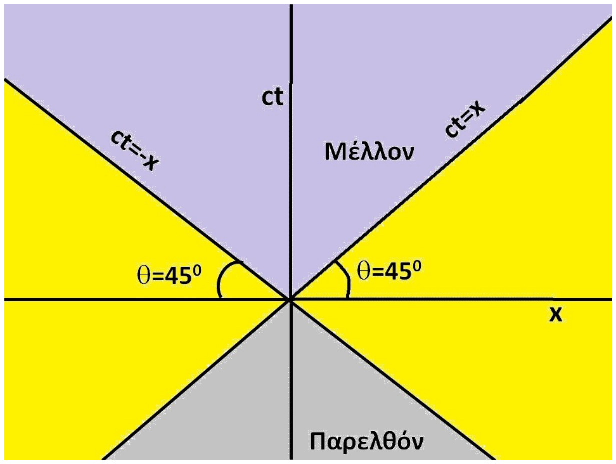
- Να εισάγει τα διαγράμματα Minkowski.
- Να περιγράψει την ιδέα του ταυτοχρονισμού στην θεωρία της σχετικότητας με μεθόδους γεωμετρίας.
- Να εισάγει εναλλακτικό και πιο όμορφο τρόπο επίλυσης προβλημάτων στη ειδική θεωρία της σχετικότητας με την χρήση της γεωμετρίας.

Ορισμός του διαγράμματος Minkowski:

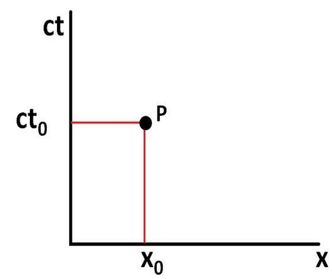
Τα διάφορα γεγονότα που λαμβάνουν χώρα στον χωροχρόνο καθώς επίσης και η κίνηση των σωμάτων μπορούν να περιγραφούν μέσω των διαγραμμάτων Minkowski (βλέπε Σχήμα 1). Ένα διάγραμμα Minkowski αναπαριστά το χωροχρόνο χρησιμοποιώντας δύο άξονες, ένα για το χρόνο πολλαπλασιασμένο με την ταχύτητα του φωτός (άξονας **y**) και ένα για τη μία διάσταση του χώρου (άξονας **x**). Οι χωρικές διαστάσεις που είναι κάθετες στην πιθανή κίνηση αγνοούνται επειδή, όπως είδαμε και στους μετασχηματισμούς Lorentz, δεν αλλάζουν. Στο Σχήμα 1 φαίνονται επίσης δυο ακτίνες φωτός (κοσμικές γραμμές φωτός). Η μία ακτίνα φωτός κινείται στη διεύθυνση του θετικού άξονα **x** και περιγράφεται από μία ευθεία (**x=ct**) που διχοτομεί την γωνία που ορίζεται από τους δύο θετικούς άξονες. Η δεύτερη ακτίνα φωτός κινείται στη διεύθυνση του αρνητικού άξονα **x** και περιγράφεται από μία ευθεία (-**x=ct**) που διχοτομεί την γωνία που ορίζεται από το θετικό άξονα **ct** και τον αρνητικό άξονα **x**. Η περιοχή του διαγράμματος μεταξύ των δύο ακτίνων αναπαριστά το μέλλον για **ct>0** και το παρελθόν για **ct<0. Η περιοχή του διαγράμματος Minkowski που βρίσκεται μεταξύ των δύο ακτίνων φωτός και συμπεριλαμβάνει και το μέλλον και το παρελθόν ονομάζεται κώνος φωτός.**

Το Σχήμα 2 δείχνει την αναπαράσταση ενός γεγονότος στο χώρο Minkowski. **Το γεγονός λαμβάνει χώρα στο χωροχρόνο την χρονική στιγμή t_0 στην θέση x_0 και συμβολίζεται από ένα σημείο P πάνω στο διάγραμμα Minkowski.** Συνεπώς το διάγραμμα Minkowski είναι είναι απλώς ένας τρόπος να περιγράψει κανείς την κίνηση ενός σώματος (σειρά γεγονότων) σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς **O** το οποίο χαρακτηρίζεται από μία χρονική μεταβλητή **t** μία χωρική μεταβλητή **x**.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

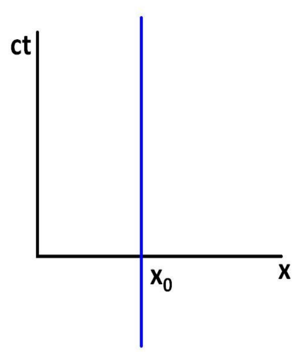


Σχήμα 1: Διάγραμμα Minkowski. Ο χρόνος έχει πολλαπλασιαστεί με την ταχύτητα του φωτός έτσι ώστε και οι δύο άξονες να είναι βαθμονομημένοι σε μονάδες μήκους. Η κοσμικές γραμμές φωτός διχοτομούν τους τις γωνίες μεταξύ των δύο αξόνων.

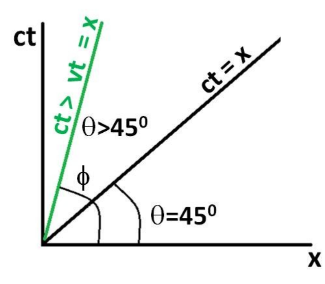


*Σχήμα 2: Γεγονός **P** το οποίο λαμβάνει χώρα τη χρονική στιγμή t_0 στο χωρικό σημείο x_0.*

Στο Σχήμα 3 βλέπουμε την τροχιά στο χωροχρόνο ενός σώματος το οποίο είναι ακίνητο στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς **Ο. Οι τροχιές σωμάτων στο χώρο Minkowski ονομάζονται κοσμικές γραμμές.** Στην περίπτωση αυτή ο κοσμική γραμμή είναι μια ευθεία κάθετη στον άξονα **x** στο σημείο $\mathbf{x_0}$ διότι η θέση του σώματος δεν αλλάζει αλλά ο χρόνος φυσικά μεταβάλλεται.



Σχήμα 3: Η τροχιά ακίνητου σώματος στο χωροχρόνο.



*Σχήμα 4: Η τροχιά σώματος που κινείται με ταχύτητα **v*** στο χωροχρόνο.

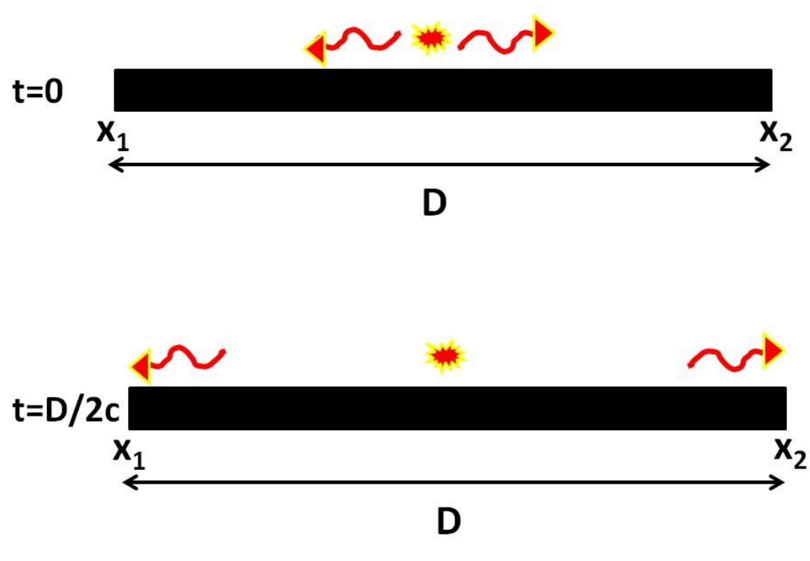
Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Στο Σχήμα 4 βλέπουμε την κοσμική γραμμή σώματος το οποίο κινείται με ταχύτητα **v** στο αδρανειακό σύστημα **O.** Παρατηρούμε ότι επειδή το σώμα δεν μπορεί να έχει ταχύτητα που είναι μεγαλύτερη του φωτός η τροχιά του βρίσκεται αναγκαστικά μέσα στον κώνο φωτός, δηλαδή μεταξύ του άξονα **ct** και της τροχιάς του φωτός. Ο λόγος είναι ότι η θεωρία της ειδικής σχετικότητας απαγορεύει την ύπαρξη σωματιδίων με κοσμικές γραμμές που βρίσκονται έξω από τον κώνο φωτός. Η γωνία $\boldsymbol{\Phi}$ μεταξύ της κοσμικής γραμμής ενός σώματος και του άξονα των **x** σχετίζεται με την ταχύτητα του σώματος μέσω της σχέσης:

$$\tan\Phi = \frac{1}{\beta} \qquad\qquad \beta = \frac{V}{c}$$

Ταυτοχρονισμός με διαγράμματα Minkowski:

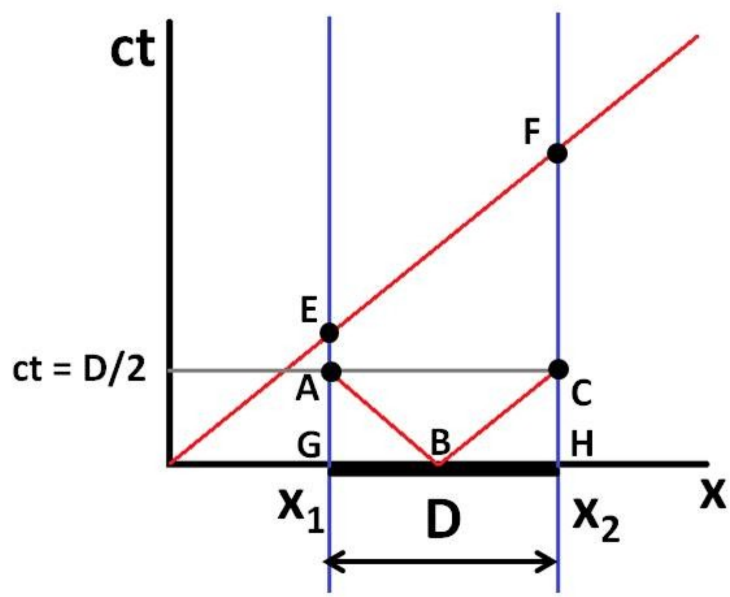
Έστω ακίνητη ράβδος μήκους **D** στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς **O.** Την χρονική στιγμή **t=0** φωτεινή πηγή στο μέσον της ράβδου εκπέμπει δύο ακτίνες φωτός προς τα δύο άκρα της ράβδου οι οποίες φτάνουν στα άκρα της ράβδου *ταυτόχρονα* στο σύστημα Ο μετά από χρόνο $t = D/2\mathrm{c}$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5: Φωτεινή πηγή στο μέσον μιας ράβδου μήκους ***D*** εκπέμπει δύο φωτόνια την χρονική στιγμή **t=0** τα οποία φτάνουν στα άκρα της ράβδου σε χρόνο **t=D/2c**.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Η αναπαράσταση των πιο πάνω σε διάγραμμα Minkowski φαίνεται στο Σχήμα 6. Οι κοσμικές γραμμές των άκρων της ράβδου είναι οι δύο κάθετες στον άξονα **x** διότι η ράβδος είναι ακίνητη στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς **O.**



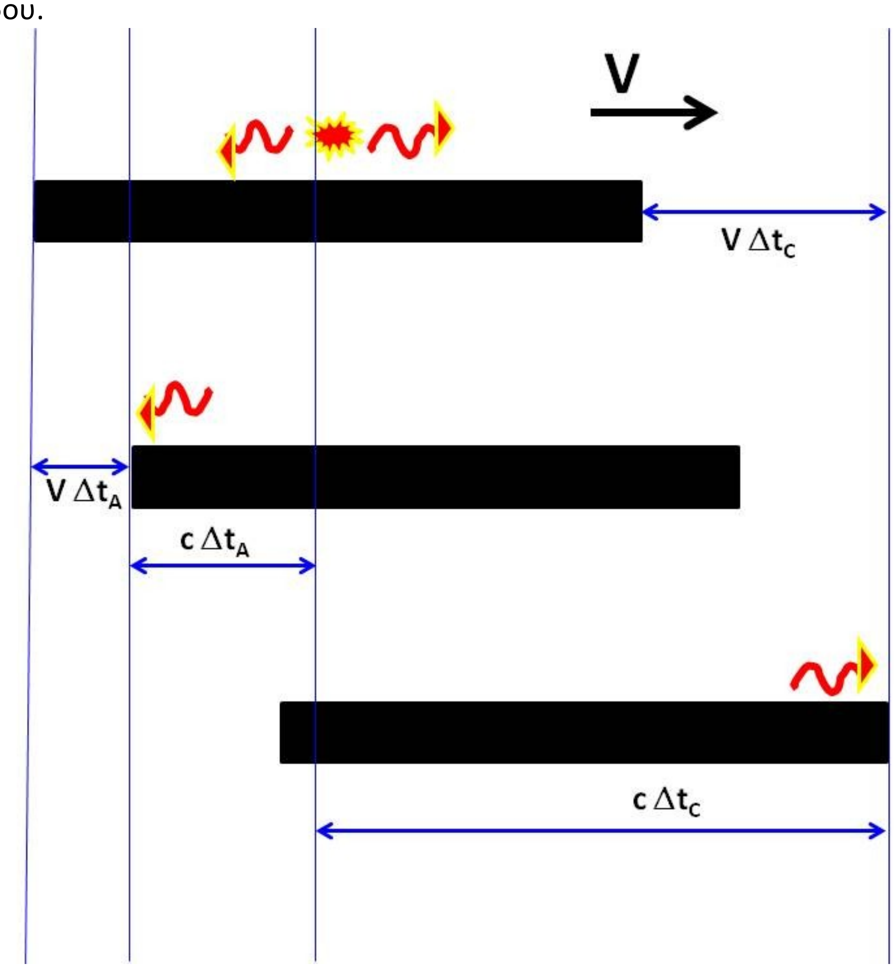
*Σχήμα 6: Ακίνητη ράβδος στο αδρανειακό σύστημα **O.*** Οι κοσμικές γραμμές στον χωροχρόνο του αριστερού και δεξιού άκρου της ράβδου είναι ευθείες κάθετες στον άξονα **x** στα σημεία $\mathbf{x_1}$ και $\mathbf{x_2}$. *Φωτεινή πηγή στο κέντρο της ράβδου εκπέμπει (1) ακτίνα φωτός προς το δεξιό άκρο της ράβδου (**BC**) (2) ακτίνα φωτός προς το αριστερό άκρο της ράβδου (**BA**). Γεγονότα* **C** και **A** είναι ταυτόχρονα στο σύστημα **O** διότι η γραμμή **CA** είναι παράλληλη ως προς τον άξονα **x** και συνεπώς συμβαίνουν ταυτόχρονα.

Οι κοσμικές γραμμές των δύο σημάτων φωτός BA και BC τέμνουν τις κοσμικές γραμμές των άκρων της ράβδου στα σημεία A και C. Συνεπώς τα γεγονότα A και C συμβολίζουν την άφιξη των φωτονίων στα άκρα της ράβδου. Επειδή οι κοσμικές γραμμές των δύο σημάτων φωτός είναι σε γωνίες 45^o και 135^o από τον άξονα των **x τα τρίγωνα AGB και BCH είναι ισοσκελή και ίσια. Δ**ηλαδή $AG = CH = D/2$ **πράγμα που σημαίνει ότι τα γεγονότα A και C είναι**

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

ταυτόχρονα στο σύστημα Ο και λαμβάνουν χώρα σε $ct = D/2$. Είναι μάλλον προφανές στον αναγνώστη ότι οι παράλληλες προς τον άξονα x γραμμές πάνω στο διάγραμμα Minkowski ορίζουν άπειρα ταυτόχρονα γεγονότα.

Έστω τώρα ότι ράβδος μήκους **D** κινείται με ταχύτητα **V** στο σύστημα του εργαστηρίου **Ο**. Σε αυτή την περίπτωση, όπως δείχνει το Σχήμα 7 , τα δύο φωτόνια δεν φτάνουν ταυτόχρονα στα άκρα της ράβδου.

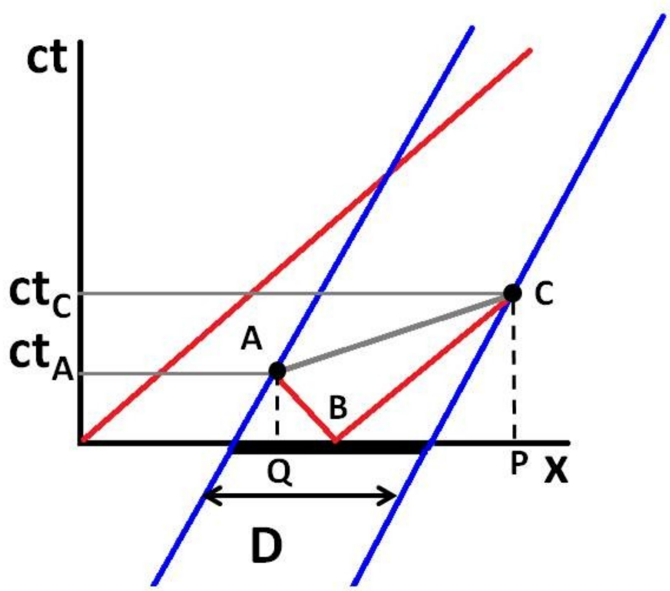


Σχήμα 7: Τα δύο φωτόνια που εκπέμπονται ταυτόχρονα από το μέσον της κινούμενης ράβδου δεν φτάνουν ταυτόχρονα στα άκρα της ράβδου.

Το φωτόνιο που κινείται προς τα αριστερά φτάνει σε χρόνο $t_A = \dfrac{D}{2(c+V)}$ ενώ το φωτόνιο που κινείται προς τα δεξιά φτάνει σε χρόνο $t_C = \dfrac{D}{2(c-V)}$.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Το Σχήμα 8 αναπαριστά το ίδιο πρόβλημα σε διάγραμμα Minkowski στο σύστημα του εργαστηρίου **O**. Οι κοσμικές γραμμές των άκρων της ράβδου έχουν κλήση διότι η ράβδος κινείται. Οι κοσμικές γραμμές των δύο φωτονίων **BC** και **BA** έχουν πάλι κλήση **45°** και **135°** αντίστοιχα αλλά τέμνουν τις κοσμικές γραμμές των άκρων στα γεγονότα **C** και **A** τα οποία προφανώς δεν είναι ταυτόχρονα λόγω της κλήσης των κοσμικών γραμμών των άκρων της ράβδου.



*Σχήμα 8: Ίδιο με το Σχήμα 6 αλλά με την ράβδο να κινείται με ταχύτητα **V** στο σύστημα **O**. Οι χωροχρονικές τροχιές των άκρων της ράβδου τέμνουν τον άξονα **x** με γωνία μεγαλύτερη αυτής των 45 μοιρών διότι η ράβδος κινείται με ταχύτητα μικρότερη της ταχύτητας του φωτός. Οι τροχιές των άκρων τέμνουν τις τροχιές των φωτεινών ακτίνων που εκπέμπονται από το κέντρο της ράβδου στα σημεία **A** και **C.** Τα γεγονότα **A** και **C*** δεν είναι ταυτόχρονα στο O παρόλο που είναι ταυτόχρονα στο αδρανειακό σύστημα της ράβδου.

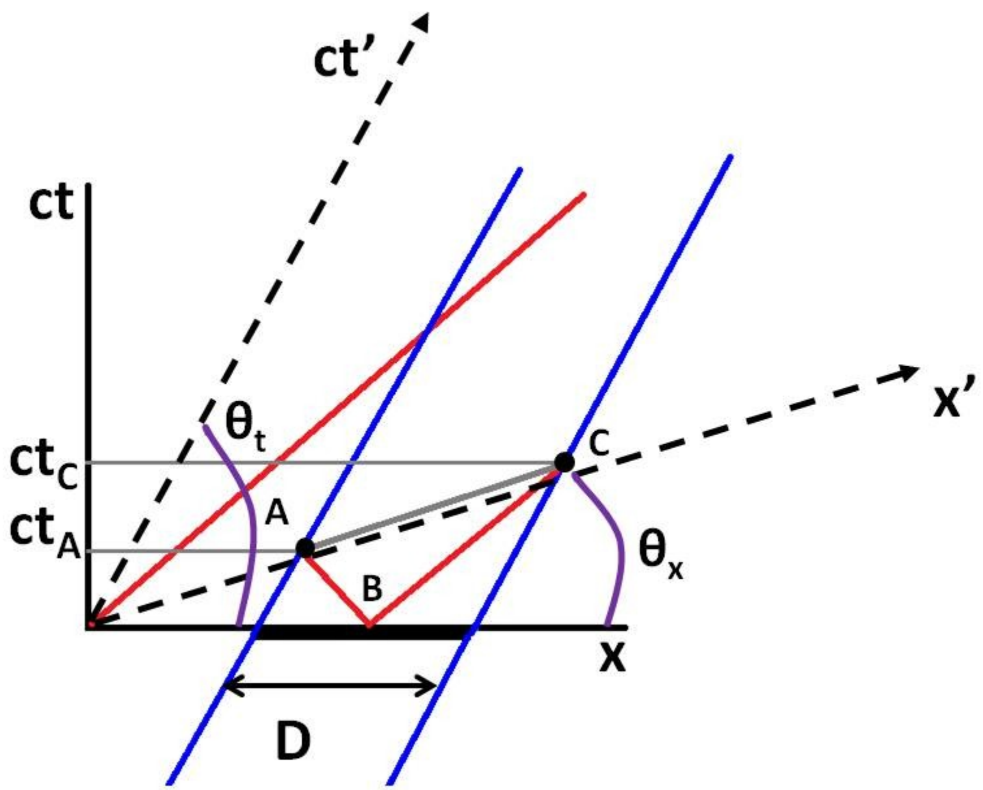
Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Χρησιμοποιώντας γεωμετρία καταλήγουμε στα ίδια αποτελέσματα:

$$PB = PC \Rightarrow \frac{D}{2}+V t_C = ct_c \Rightarrow t_c = \frac{D}{2(c-V)}$$

$$QB = QA \Rightarrow \frac{D}{2}-V t_A = ct_A \Rightarrow t_A = \frac{L}{2(c+V)}$$

Διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς πάνω στο ίδιο διάγραμμα Minkowski



*Σχήμα 9: Το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (**ct',x'**) στο οποίο τα γεγονότα **A** και **C** είναι ταυτόχρονα. Ο άξονας **x** είναι παράλληλος στην **AC**.*

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Το επόμενο ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι **να βρούμε το αδρανειακό σύστημα αναφοράς O' στο οποίο τα γεγονότα A και C είναι ταυτόχρονα** και το οποίο προφανώς κινείται με ταχύτητα V σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου O. Το αδρανειακό σύστημα αυτό δεν είναι φυσικά άλλο παρά στο αδρανειακό σύστημα της ράβδου.

Για να είναι τα γεγονότα **A** και **C** στο Σχήμα 9 ταυτόχρονα στο **O'** θα πρέπει ο άξονας **x'** να είναι παράλληλος του **AC.** Συνεπώς χαράζουμε τον άξονα των **x'** έτσι ώστε να περνά από το κέντρο του **O** και να είναι παράλληλος του **AC**. Επειδή το φως έχει την ίδια ταχύτητα **c** σε όλα τα αδρανειακά συστήματα τότε η κοσμική γραμμή του φωτός είναι η ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα. Άρα ο άξονας **ct'** χαράζεται έτσι ώστε η κοσμική γραμμή του φωτός να διχοτομεί τους άξονες **ct'** και **x'**. Παρατηρούμε επίσης ότι ο άξονας **ct'** είναι παράλληλος των κοσμικών γραμμών των άκρων της ράβδου (και αυτός είναι ένας άλλος τρόπος να τον χαράξουμε) απλά διότι έχει πάντα $x' = 0$ και έτσι είναι η κοσμική γραμμή του κέντρου του **O'** το οποίο φυσικά κινείται με ταχύτητα **V** ως προς το **O** όπως και η ράβδος.

Ένας άλλος τρόπος να καταλήξει κανείς στα ίδια αποτελέσματα είναι ο εξής:

Οι συντεταγμένες των δύο αδρανειακών συστημάτων αναφοράς σχετίζονται μέσω των μετασχηματισμών Lorentz:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad (1)$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad (2)$$

Ο άξονας **ct'** στο **O'** δίνεται από την εξίσωση:

$$x' = 0 \qquad (2) \Rightarrow x - \beta ct = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{ct}{x} = \frac{1}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta_t = \frac{1}{\beta} \quad (3)$$

Επίσης ο άξονας **x'** στο **O'** δίνεται από την εξίσωση:

$$ct' = 0 \qquad (1) \Rightarrow ct - \beta x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{ct}{x} = \beta \quad \Rightarrow \quad \tan\theta_x = \beta \quad (4)$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η κοσμική γραμμή του φωτός διχοτομεί πράγματι τη γωνία των αξόνων **ct'** και **x'** τους οποίους χαράξαμε χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Lorentz.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Αν υποθέσουμε αρχικά ότι η κοσμική γραμμή του φωτός διχοτομεί τη γωνία των αξόνων **ct'** και **x'** τότε έχουμε

$$\frac{\pi}{2} - \theta_t = \theta_x$$

αλλά αυτό συνεπάγεται ότι

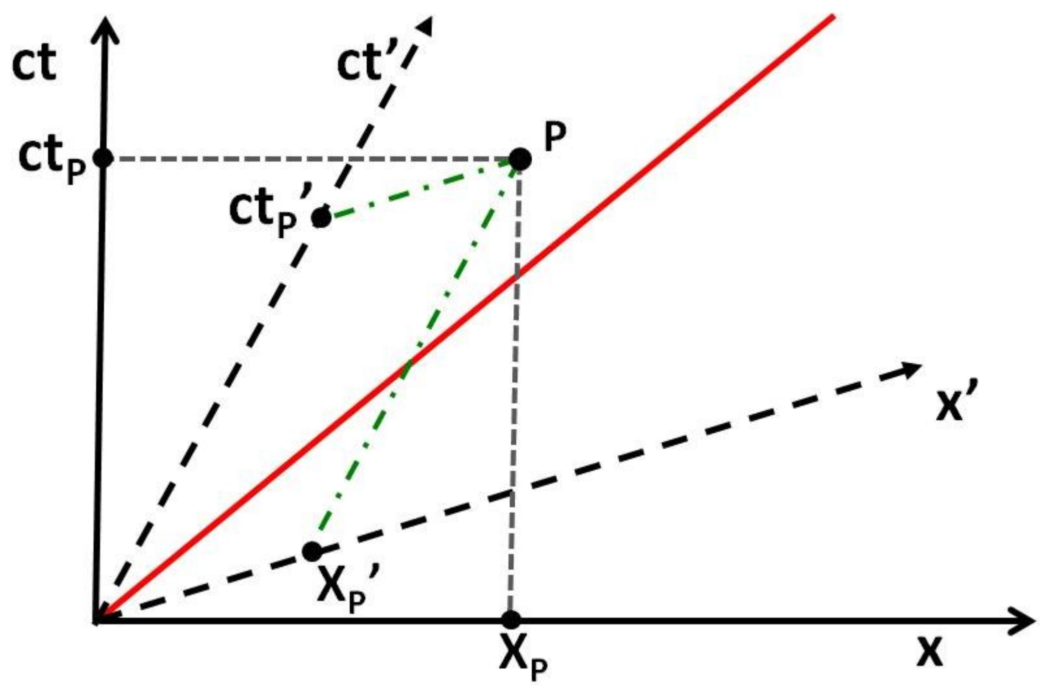
$$\tan(\theta_x) = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta_t) = ctan(\theta_t) \quad (3)(4) \Rightarrow \beta = \beta$$

Συνεπώς η κοσμική γραμμή του φωτός διχοτομεί πάντα τη γωνία των αξόνων **ct'** και **x'** στο βαθμό που οι συντεταγμένες των συστημάτων Ο και Ο' σχετίζονται μέσω των μετασχηματισμών Lorentz.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Αναπαράσταση γεγονότων σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς μέσω διαγραμμάτων Minkowski.

Το Σχήμα 10 δείχνει πώς ορίζονται οι συντεταγμένες ενός γεγονότος **P** σε δύο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Για να ορίσουμε την **x** ή τη **x'** συντεταγμένη χαράζουμε από το **P** γραμμή παράλληλη στον άξονα **ct** ή **ct'** αντίστοιχα. **O** ορισμός της **ct** ή **ct'** συντεταγμένης γίνεται μέσω ταυτοχρονικών γραμμών οι οποίες είναι φυσικά παράλληλες στον άξονα των **x** ή **x'** αντίστοιχα.

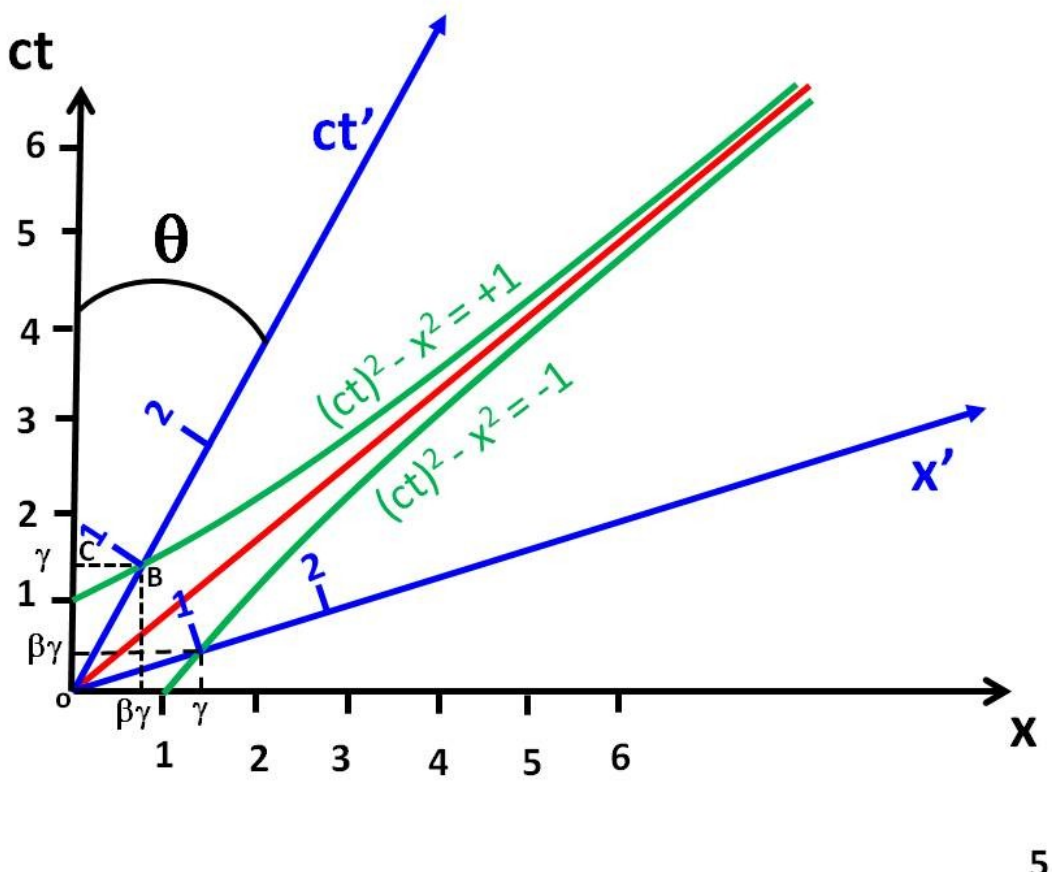


*Σχήμα 10: Οι συντεταγμένες ενός γεγονότος **P** στα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς **O** και **O'**.*

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Βαθμονόμηση αξόνων σε διαγράμματα Minkowski

Όπως είδαμε τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς **O'** τα οποία κινούνται σε σχέση με το **O** αναπαρίστανται από μη-ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση γεγονότων και κοσμικών γραμμών. **Είναι πολύ σημαντικό να κατανοηθεί ότι η <u>μοναδιαία απόσταση (κλίμακα) δεν είναι η ίδια</u> στα διάφορα συστήματα συντεταγμένων.**



*Σχήμα 11: Οι υπερβολές βαθμονόμησης των αξόνων δύο αδρανειακών συστημάτων **O** και **O'**. Η τομή της υπερβολής πού δίνεται από την εξίσωση **$(ct)^2$ - x^2 = 1** με τον άξονα **ct'** δίνει το σημείο (**ct'=1, x=0**). Η τομή της υπερβολής πού δίνεται από την εξίσωση **$(ct)^2$ - x^2 = -1** με τον άξονα x' δίνει το σημείο (**ct'=0, x=1**).*

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Ας δούμε εδώ πως μπορεί κανείς να βαθμονομήσει τους άξονες ενός διαγράμματος Minkowski. Έχουμε αποδείξει σε προηγούμενη διάλεξη ότι η ποσότητα $(ct)^2-x^2$ είναι αναλλοίωτη ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz. Δηλαδή $(ct)^2-x^2 = (ct')^2-x'^2$ όπου (ct, x) είναι οι συντεταγμένες στο σύστημα **O** και (ct', x') στο σύστημα **O'**. Αυτό σημαίνει ότι μία υπερβολή η οποία περιγράφεται στο σύστημα **O** από την εξίσωση $(ct)^2-x^2 = \alpha$, όπου α μία σταθερά, περιγράφεται από την ίδια εξίσωση (με (ct', x') μεταβλητές) $(ct')^2-x'^2 = \alpha$ στο σύστημα **O'**.

Στο Σχήμα 11 βλέπουμε δύο συστήματα συντεταγμένων **O** και **O'**. Το **O'** κινείται με ταχύτητα **V** ως προς το **O** έτσι ώστε $tan\theta = \beta$. Στο ίδιο Σχήμα φαίνονται δύο υπερβολές βαθμονόμησης:

$$(ct)^2 - x^2 = +1 \qquad (1)$$

η οποία στο O' περιγράφεται από την

$$(ct')^2 - x'^2 = +1$$

και

$$(ct)^2 - x^2 = -1 \qquad (2)$$

η οποία στο O' περιγράφεται από την

$$(ct')^2 - x'^2 = -1$$

Όπως βλέπουμε η τομή της (1) με τον άξονα **ct'** δείχνει πού βρίσκεται η ένδειξη '**1**' πάνω στον άξονα **ct'** γιατί όλα τα σημεία στον άξονα αυτό έχουν $x'=0$.

Για τον ίδιο λόγο η τομή της (2) με τον άξονα x' δείχνει πού βρίσκεται η ένδειξη '**1**' πάνω στον άξονα x' διότι ο άξονας αυτός ορίζεται από όλα τα σημεία με $ct'=0$.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκει κανείς τις ενδείξεις 2, 3, 4... πάνω στους άξονες ct' και x' . Η διαδικασία αυτή ονομάζεται βαθμονόμηση (calibration).

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Η συντεταγμένες των σημείων $(ct'=1,\ x'=0)$ και $(ct'=0,\ x'=1)$ στο σύστημα όπως φαίνονται στο Σχήμα 11 υπολογίζονται μέσω των μετασχηματισμών Lorentz. Έτσι για το πρώτο έχουμε:

$$ct = \gamma(ct'+\beta x') = \gamma(1+0\times\beta) = \gamma$$

$$x = \gamma(x'+\beta ct') = \gamma(0+1\times\beta) = \beta\gamma$$

και για το δεύτερο έχουμε:

$$ct = \gamma(ct'+\beta x') = \gamma(0+1\times\beta) = \beta\gamma$$

$$x = \gamma(x'+\beta ct') = \gamma(1+0\times\beta) = \gamma$$

<u>Προσοχή:</u> Αν κάποιος επιχειρήσει να χρησιμοποιήσει το Πυθαγόρειο θεώρημα για το ορθογώνιο τρίγωνο OBC θα καταλήξει σε <u>λάθος</u> αποτελέσματα:

$$\gamma^2+(\beta\gamma)^2\neq 1$$

<u>Ο λόγος είναι ότι το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει μόνο σε Ευκλείδειους χώρους και όχι σε χώρους Minkowski.</u> Όπως αναφερθήκαμε σε προηγούμενη διάλεξη η μετρική του χώρου Minkowski είναι διαφορετική από αυτή του Ευκλείδειου χώρου. Έτσι σε χώρους Minkowski η αντίστοιχη μορφή του Πυθαγόρειου θεωρήματος είναι:

$$\gamma^2-(\beta\gamma)^2 = 1$$

το οποίο είναι σωστό όπως έχει αποδειχτεί σε προηγούμενη διάλεξη.

Φυσικά αυτό προέρχεται από το γεγονός ότι σε χώρο Minkowski η αναλλοίωτη ποσότητα είναι

$$(ct)^2 - x^2$$

και όχι

$$(ct)^2 + x^2$$

όπως στον Ευκλείδειο χώρο.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Παράδειγμα 1: Διαστημόπλοιο με ιδιομήκος l_0 ταξιδεύει με ταχύτητα **V** στην διεύθυνση του άξονα των **x** στο αδρανειακό σύστημα **O**. Η αρχή του διαστημοπλοίου περνά από το σημείο **x=0** την στιγμή **t=0** στο σύστημα **O**. Την ίδια στιγμή ένα σήμα φωτός εκπέμπεται από την αρχή του διαστημοπλοίου προς το τέλος του.

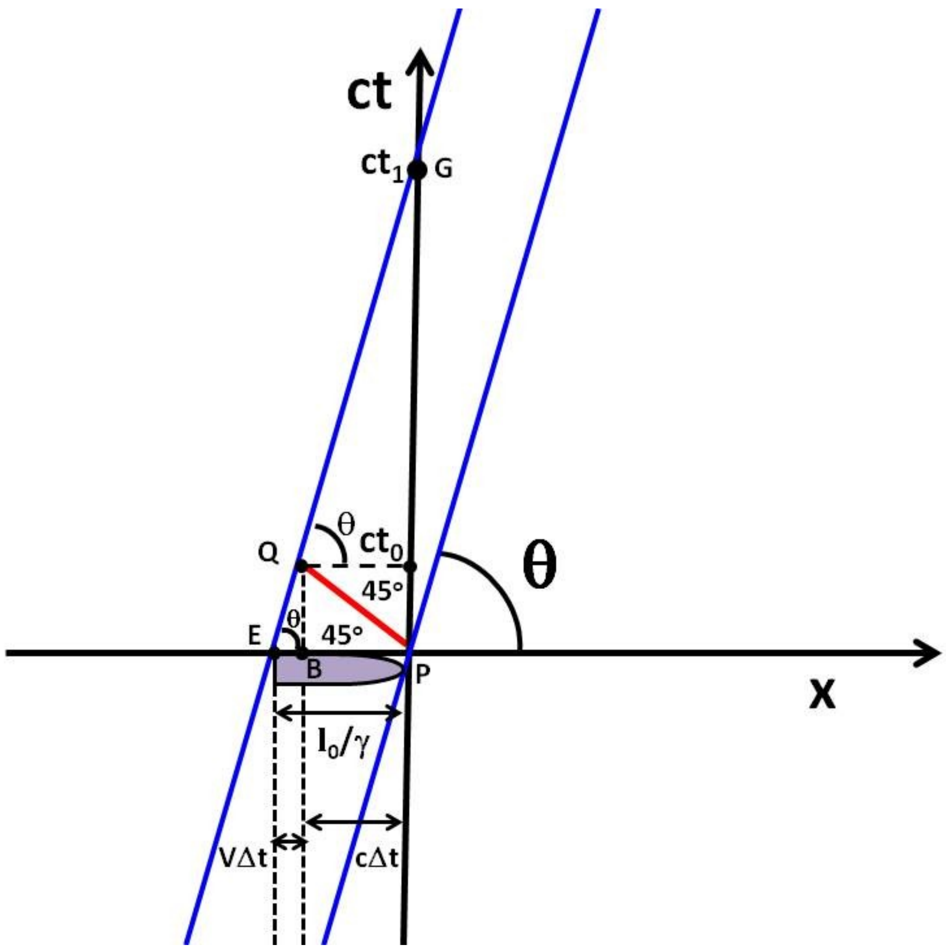
(α) Ζωγραφίστε διάγραμμα **Minkowski** στο σύστημα **O** που να δείχνει τις κοσμικές γραμμές της αρχής και του τέλους του διαστημοπλοίου καθώς και του ηλεκτρομαγνητικού σήματος.

(β) Πότε φτάνει το σήμα στο τέλος του διαστημοπλοίου στο σύστημα **O**;

(γ) Πότε περνά το τέλος του διαστημοπλοίου από το σημείο **x=0** στο σύστημα **O**;

Λύση:

(α)



Σχήμα 12: Διάγραμμα Minkowski και οι κοσμικές γραμμές του παραδείγματος 1.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Στο Σχήμα 12 η γωνία **θ** δίνεται από τη σχέση $\tan\theta = \frac{ct}{x} = \frac{ct}{vt} = \beta^{-1}$

(β) Στο Σχήμα 12 παρατηρούμε ότι το τρίγωνο **BQP** είναι ισοσκελές (**QB=BP**) συνεπώς $BP = c\Delta t_0$. Η απόσταση **EB** είναι η απόσταση που διάνυσε το διαστημόπλοιο σε χρόνο Δt_0 . Έτσι στο σύστημα ακίνητο σύστημα **O** έχουμε.

$$\frac{l_0}{\gamma} = EB + BP = V\Delta t_0 + c\Delta t_0 = (c+V)\Delta t_0 = (1+\beta)c\Delta t_0 \Rightarrow c\Delta t_0 = \frac{l_0}{\gamma(1+\beta)} \Rightarrow$$

$$\Delta t_0 = \frac{l_0}{c}\sqrt{\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}}$$

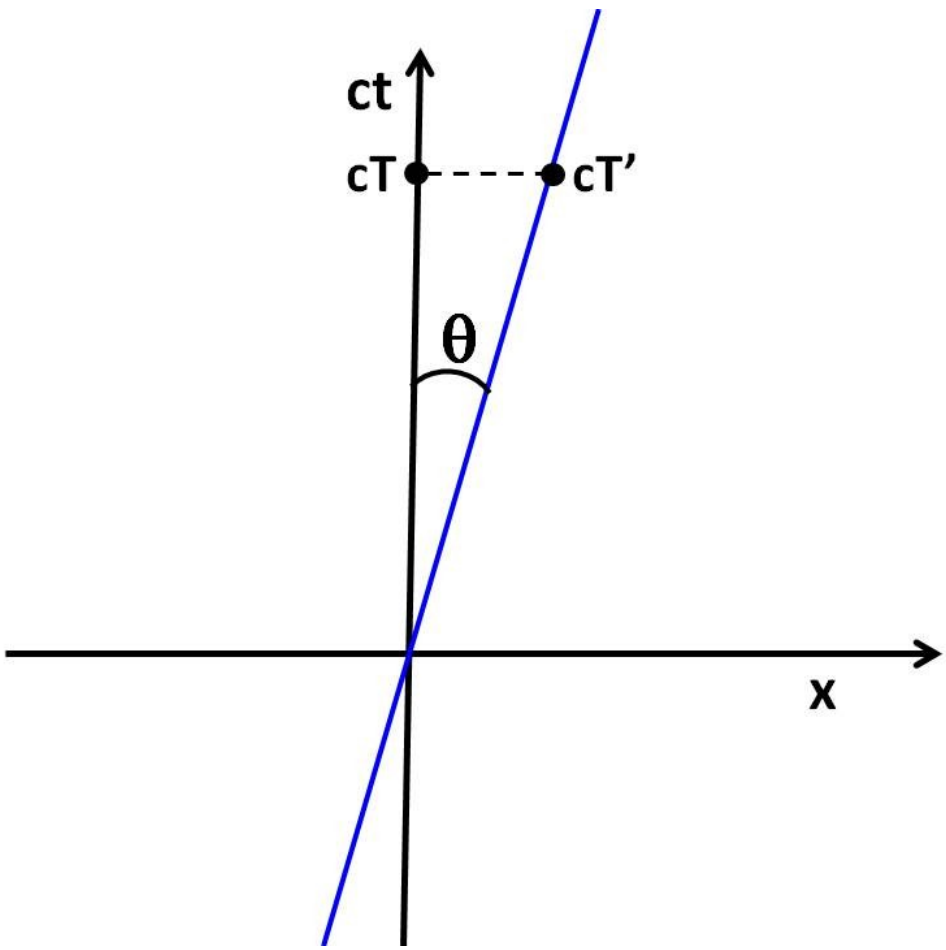
(γ) Από το τρίγωνο **GEP** έχουμε ότι

$$\frac{ct_1}{l_0/\gamma} = \tan\theta = \beta^{-1} \Rightarrow t_1 = \frac{l_0}{c\beta\gamma} = \frac{l_0}{v\gamma}$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Παράδειγμα 2: Στο παράδειγμα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε διάγραμμα Minkowski για να αποδείξουμε τη σχέση της διαστολής του χρόνου.

Λύση:



Σχήμα 13: Διαστολή χρόνου

Έστω λοιπόν η κοσμική γραμμή ενός ρολογιού που κινείται με ταχύτητα **V** και

$$\tan\theta = \beta = V / c$$

σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα Ο το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 13. Όταν το κινούμενο ρολόι έχει την ένδειξη **cT'** τότε το ακίνητο ρολόι έχει την ένδειξη **cT**.

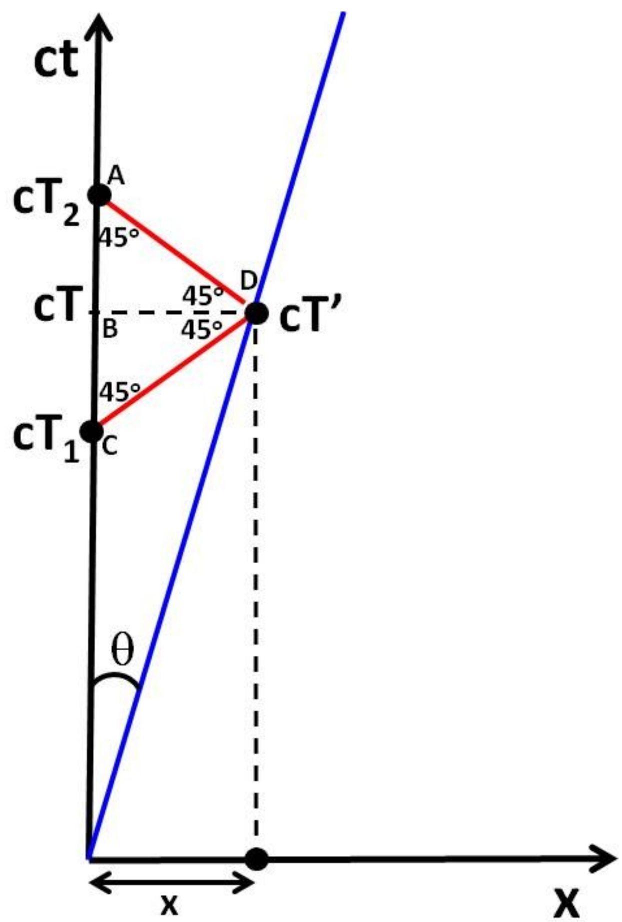
Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την γεωμετρία του χώρου Minkowski για να αποδείξουμε τη σχέση της διαστολής του χρόνου. Όπως είπαμε πριν στο χώρο το πυθαγόρειο θεώρημα παίρνει τη μορφή

$$(cT)^2 - x^2 = (cT')^2 - 0^2 \Rightarrow (cT)^2 - (\beta cT)^2 = (cT')^2 \Rightarrow (1-\beta^2)(cT)^2 = (cT')^2 \Rightarrow$$

$$(cT)^2 = \frac{(cT')^2}{(1-\beta^2)} \Rightarrow cT = \frac{cT'}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \Rightarrow T = \gamma T'$$

Παράδειγμα 3: Φαινόμενο Doppler



Σχήμα 14: Διάγραμμα Minkowski για το Radar του παραδείγματος 3.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Radar εκπέμπει δέσμη με συχνότητα f_0 η οποία ανακλάται από αυτοκίνητο το οποίο πλησιάζει το Radar. Ας υποθέσουμε ότι το Radar ανιχνεύει την δέσμη που επιστρέφει μετά την ανάκλαση από το αυτοκίνητο να έχει συχνότητα f_2 . Υπολογίστε την ταχύτητα του αυτοκινήτου σαν συνάρτηση των f_0 και f_2 . Την άσκηση αυτή την έχουμε λύση ήδη χωρίς την χρήση διαγραμμάτων Minkowski.

Λύση:

Σύμφωνα με το Σχήμα 14 δέσμη εκπέμπεται στο γεγονός C, ανακλάται στο D και επιστρέφει πίσω στην πηγή στο γεγονός A. Τα τρίγωνα **ABD** και **BCD** είναι ισοσκελή και ίσα. Άρα

$$AB = BC = BD = x = \beta cT \qquad (1)$$

Από το Σχήμα 14 και την (1) έχουμε ότι

$$cT_2 = cT + x = cT + \beta cT = (1+\beta)cT \qquad (2)$$

$$cT_1 = cT - x = cT - \beta cT = (1-\beta)cT \qquad (3)$$

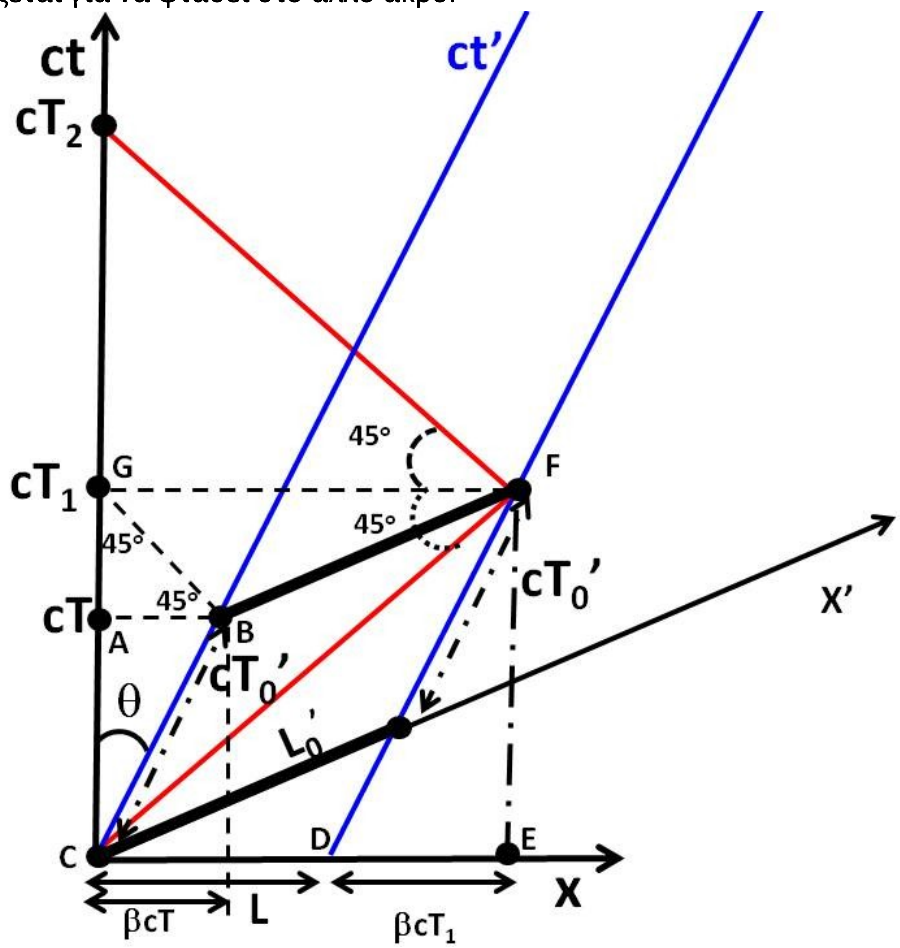
και από (2) καί (3) έχουμε ότι

$$\frac{cT_2}{cT_1} = \frac{(1+\beta)}{(1-\beta)} \Rightarrow \Delta T_2 = \frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}\Delta T_1$$

Αυτό είναι το ίδιο αποτέλεσμα που υπολογίσαμε και πριν χωρίς την χρήση διαγράμματος Minkowski το οποίο ισοδυναμεί με διπλή μετατόπιση Doppler.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Παράδειγμα 4: Το παράδειγμα αυτό αναφέρεται στον υπολογισμό της σχέσης της συστολής του μήκους χρησιμοποιώντας διάγραμμα Mikowski. Τη σχέση αυτή την έχουμε ήδη αποδείξει θεωρώντας δέσμη φωτός η οποία εκπέμπεται από το ένα άκρο μιας ράβδου μετρώντας το χρόνο που χρειάζεται για να φτάσει στο άλλο άκρο.



*Σχήμα 15: Ράβδος μήκους **L0'** κινείται με ταχύτητα **V** στο αδρανειακό σύστημα **O**.*

Στο Σχήμα 15 φαίνεται ράβδος ιδιομήκους $L_0{}'$ (όπως μετράται στο σύστημα της ράβδου **O'**) η οποία κινείται με ταχύτητα **V=βc** ως προς στο σύστημα **O**. Όπως και πριν έχουμε ότι

$$tan\theta = \beta = V / c$$

Στο Σχήμα 15 φαίνονται οι κοσμικές γραμμές των άκρων της ράβδου καθώς και η κοσμική γραμμή της δέσμης φωτός **CF** που εκπέμπεται από το ένα άκρο της ράβδου στο άλλο. Όπως και στο παράδειγμα 2 έχουμε ότι

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–12, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

$$(cT_0')^2 - 0^2 = (cT)^2 - (\beta cT)^2 \Rightarrow (cT_0')^2 = (1-\beta^2)(cT)^2 \Rightarrow$$

$$(cT)^2 = \frac{(cT_0')^2}{(1-\beta^2)} \Rightarrow cT = \frac{cT_0'}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \Rightarrow T = \gamma T_0' \qquad (1)$$

Από το Σχήμα 15 έχουμε επίσης ότι

$$CG = CA + AG$$

Το τρίγωνο **AGB** είναι ισοσκελές, συνεπώς

$$cT_1 = cT + \beta cT = (1 + \beta)cT \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι

$$cT_1 = (1 + \beta)cT = (1 + \beta)\gamma cT_0' = \sqrt{\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}}\, cT_0' \qquad (3)$$

Επίσης από το Σχήμα 15 έχουμε ότι

$$CG = CE = CD + DE \Rightarrow cT_1 = L + \beta cT_1 \Rightarrow L = (1-\beta)cT_1 \qquad (4)$$

Έτσι από (3) και (4) έχουμε ότι

$$L = (1-\beta)\sqrt{\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}}\, cT_0' = \sqrt{1-\beta^2}\, cT_0' = \frac{cT_0'}{\gamma} \qquad (5)$$

Όμως $L_0' = cT_0'$ είναι το ιδιομήκος της ράβδου διότι το T_0' είναι ο χρόνος που κάνει η δέσμη φωτός να φτάσει από το ένα άκρο της ράβδου στο άλλο στο σύστημα της ράβδου. Συνεπώς από την (5) συμπεραίνουμε ότι

$$L = \frac{L_0'}{\gamma}$$

δηλαδή αποδείξαμε την συστολή του μήκους.

Προσοχή: Μολονότι στο Σχήμα 15 φαίνεται το ιδιομήκος L_0' να είναι μεγαλύτερο από το L και φαινομενικά η συστολή του μήκους είναι προφανής, αυτό δεν είναι σωστό διότι όπως είδαμε οι άξονες του κινούμενου συστήματος είναι διαφορετικά βαθμονομημένοι από αυτούς του ακίνητου συστήματος (γεωμετρία Minkowski).