Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–9, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

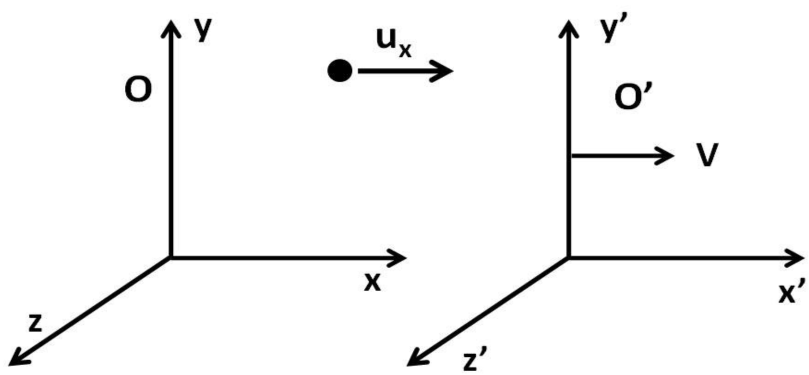
Μετασχηματισμοί Lorentz για ταχύτητες- Σχετικιστικό φαινόμενο Doppler

08/11/12

Σκοποί της ένατης διάλεξης:

- Υπολογισμός των μετασχηματισμών Lorentz για ταχύτητες.
- Κατανόηση του φαινομένου Doppler σαν απόρροια των μετασχηματισμών Lorentz.
- Επίλυση απλών προβλημάτων στα δύο αυτά θέματα.

Μετασχηματισμοί Lorentz για ταχύτητες:



*Σχήμα 1: Δύο συστήματα αναφοράς **O** και **O'**. Το **O'** κινείται με ταχύτητα **V** σε σχέση με το **O.** Κινούμενο σωματίδιο έχει ταχύτητα u_x όπως αυτή μετράται στο σύστημα **O**.*

Έστω το σωματίδιο του Σχήματος 1 το οποίο κινείται με ταχύτητα $u=(u_x, u_y=0, u_z=0)$ όπως αυτή μετράται από παρατηρητή στο αδρανειακό σύστημα **O**. Δεύτερος παρατηρητής βρίσκεται στο σύστημα **O'** το οποίο κινείται με ταχύτητα **V**, στη διεύθυνση του άξονα των **x**, σε σχέση με το **O**. **Προφανώς το ερώτημα είναι να υπολογιστεί η ταχύτητα u' την οποία μετρά για το ίδιο σωματίδιο ο παρατηρητής στο σύστημα O'.**

Διαφορίζοντας τους μετασχηματισμούς του Lorentz που σχετίζουν τις συντεταγμένες των **O** και **O'** έχουμε:

$$ct' = \gamma(ct-\beta x) \Rightarrow cdt' = \gamma(cdt-\beta dx) \qquad (1)$$

$$x' = \gamma(x-\beta ct) \Rightarrow dx' = \gamma(dx-\beta cdt) \qquad (2)$$

$$dy' = dy \qquad (3)$$

$$dz' = dz \qquad (4)$$

Διαιρώντας την (2) δια την (1) έχουμε:

$$\frac{dx'}{cdt'} = \frac{\gamma(dx-\beta cdt)}{\gamma(cdt-\beta dx)} = \frac{(dx-\beta cdt)}{(cdt-\beta dx)} = \frac{(dx/dt-\beta c)}{(c-\beta dx/dt)} \Rightarrow$$

$$\frac{dx'}{cdt'} = \frac{(dx/dt-\beta c)}{(c-\beta dx/dt)} = \frac{(dx/dt-\beta c)}{c(1-(\beta/c)dx/dt)} \Rightarrow \frac{dx'}{dt'} = \frac{(dx/dt-\beta c)}{(1-(\beta/c)dx/dt)} \Rightarrow$$

Έτσι έχουμε τον μετασχηματισμό Lorentz ταχυτήτων στην διεύθυνση **x**:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x-V}{1-\frac{V}{c^2}u_x} \qquad (5)$$

Παρόμοια μπορεί να λογαριάσει κανείς τους μετασχηματισμούς Lorentz στις διευθύνσεις y και z:

$$\frac{dy'}{cdt'} = \frac{dy}{\gamma(cdt-\beta dx)} = \frac{dy/dt}{\gamma(c-\beta dx/dt)} = \frac{dy/dt}{c\gamma(1-(\beta/c)dx/dt)} \Rightarrow$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma(1-\frac{\beta}{c}\frac{dx}{dt})} \Rightarrow$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–9, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}u_x\right)} \qquad (6)$$

$$\frac{dz'}{cdt'} = \frac{dz}{\gamma\left(cdt - \beta dx\right)} = \frac{dz/dt}{\gamma\left(c - \beta dx/dt\right)} = \frac{dz/dt}{c\gamma\left(1 - (\beta/c)dx/dt\right)} \Rightarrow$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c}\frac{dx}{dt}\right)} \Rightarrow$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}u_x\right)} \qquad (7)$$

Πρόβλημα 1: Δύο διαστημόπλοια κινούνται αντίθετα το ένα προς το άλλο με ταχύτητες $u_R = -\frac{4}{5}c$ (αυτό που έρχεται από δεξιά) και $u_L = \frac{2}{3}c$ (αυτό που έρχεται από αριστερά) όπως μετρούνται από παρατηρητή ευρισκόμενο πάνω στη γη. Υπολογίστε την ταχύτητα που μετρά παρατηρητής πάνω στο διαστημόπλοιο που έρχεται από δεξιά για το διαστημόπλοιο που έρχεται από αριστερά.

Λύση:

Συνεπώς έχουμε δύο συστήματα συντεταγμένων: Το **Ο** είναι η γη και στο σύστημα της γης το σωματίδιο που έρχεται από αριστερά έχει ταχύτητα $u_L = \frac{2}{3}c$ και το **Ο'** το οποίο βρίσκεται πάνω στο σωματίδιο που έρχεται από δεξιά και το οποίο κινείται σε σχέση με το **Ο** με ταχύτητα $u_R = -\frac{4}{5}c$. Έτσι ο μετασχηματισμός της ταχύτητας μας δίνει:

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–9, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}u_x} = \frac{\frac{2}{3}c - (-\frac{4}{5}c)}{1 - (\frac{2}{3}c)(-\frac{4}{5}c)\frac{1}{c^2}} = \frac{22}{23}c$$

Δηλαδή, παρόλο που ο αφελής αναγνώστης θα περίμενε το αποτέλεσμα να βγει μεγαλύτερο της ταχύτητας του φωτός, η ταχύτητα είναι μικρότερη της ταχύτητας του φωτός και έτσι το αποτέλεσμα είναι σύμφωνο με τη θεωρία της ειδικής σχετικότητας.

Πρόβλημα 2: Υποθέστε ότι κάποιο σωματίδιο κινείται με ταχύτητα $u_x \leq c$ όπως μετράται σε αδρανειακό σύστημα **Ο**. Αποδείξτε ότι το σωματίδιο αυτό κινείται επίσης με $u'_x \leq c$ σε οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα, **Ο'**, το οποίο κινείται με ταχύτητα $V \leq c$ στη διεύθυνση του άξονα των **x** ως προς το **Ο**.

Λύση:

Ας υποθέσουμε ότι το αντίθετο είναι σωστό, δηλαδή ότι $u'_x > c$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}u_x} > c \Rightarrow \frac{u_x}{c} - \frac{V}{c} > 1 - \frac{V}{c^2}u_x \Rightarrow \frac{u_x}{c} + \frac{V}{c^2}u_x > 1 + \frac{V}{c} \Rightarrow \frac{u_x}{c}(1 + \frac{V}{c}) > 1 + \frac{V}{c} \Rightarrow$$

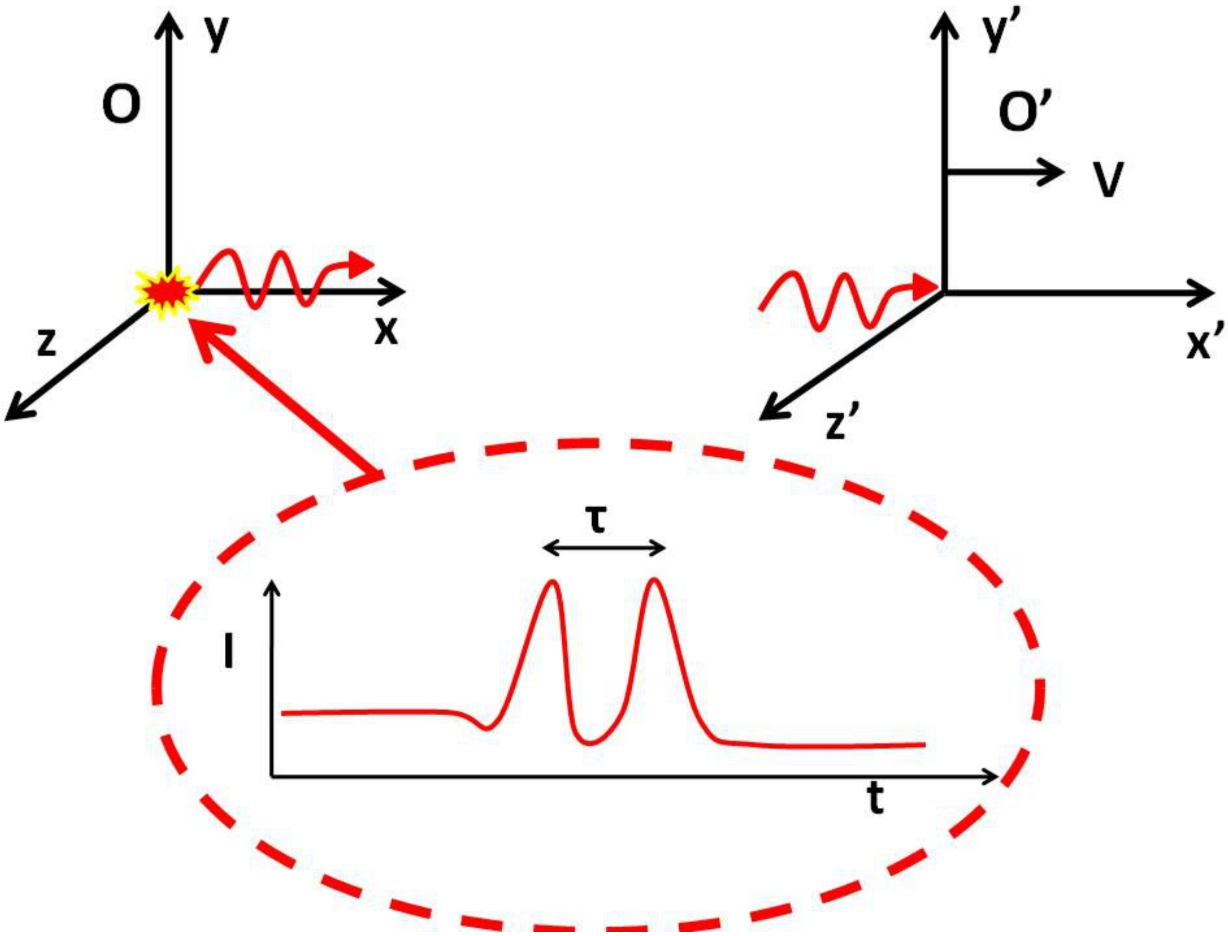
$$\frac{u_x}{c} > 1$$

Το αποτέλεσμα αυτό αντιφάσκει με το ότι $u_x \leq c$ άρα η αρχική υπόθεση που κάναμε ότι το $u'_x > c$ είναι λάθος. Συνεπώς **ταχύτητα σωματιδίου η οποία είναι μικρότερη της ταχύτητας του φωτός σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς παραμένει μικρότερη αυτής του φωτός σε όλα τα άλλα αδρανειακά συστήματα.**

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–9, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Το σχετικιστικό φαινόμενο Doppler:

Έστω η φωτεινή πηγή του Σχήματος 2. η οποία βρίσκεται σε ηρεμία στο αδρανειακό σύστημα **O** και η οποία εκπέμπει παλμούς φωτός με περίοδο **τ.**



*Σχήμα 2: Φωτεινή πηγή σε ηρεμία στο σύστημα **O** εκπέμπει παλμούς φωτός με περίοδο **τ.** Παρατηρητής στο σύστημα **O'** **,** το οποίο κινείται με ταχύτητα **V** στην διεύθυνση του άξονα των **x**, <u>βλέπει</u> τους φωτεινούς παλμούς να φτάνουν σε αυτόν με περίοδο **T**.*

Κινούμενος παρατηρητής στο σύστημα **O'** το οποίο κινείται με ταχύτητα **V** σε σχέση με το **O** παρατηρεί (βλέπει) επίσης τους παλμούς. Το ερώτημα που θέλουμε να απαντήσουμε είναι:

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–9, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Τι διαφορά χρόνου μεταξύ των δύο παλμών βλέπει ο παρατηρητής στο Ο' ?

Έστω δύο διαδοχικοί παλμοί φωτός οι οποίοι συμβολίζονται με δύο γεγονότα τα οποία έχουν φυσικά διαφορετικές συντεταγμένες στα δύο συστήματα:

	Σύστημα Ο	**Σύστημα Ο'**
Γεγονός 1	$x_1 = 0 \quad t_1 = 0$	$x'_1 = 0 \quad t'_1 = 0$
Γεγονός 2	$x_2 = 0 \quad t_2 = \tau$	$x'_2 = ? \quad t'_2 = ?$

Εδώ έχουμε υποθέσει ότι την στιγμή $t=0$ τα σημεία $(ct=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0)$ των δύο συστημάτων συμπίπτουν. Φυσικά έχουμε την ελευθερία να ορίσουμε το **Ο'** σε οποιοδήποτε σημείο στο χώρο και χρόνο με μόνο περιορισμό να κινείται με ταχύτητα **V** στην διεύθυνση του άξονα των **x**.

Οι μετασχηματισμοί Lorentz σχετίζουν τις συντεταγμένες των δυο γεγονότων στα δύο συστήματα:

$$ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2) \Rightarrow t'_2 = \gamma\tau \quad (1)$$

Δηλαδή έχουμε διαστολή χρόνου γιατί η πηγή κινείται με ταχύτητα **-V** σε σχέση με το σύστημα **Ο'** και ο παρατηρητής στο **Ο'** μετρά τον δεύτερο παλμό να λαμβάνει χώρα την χρονική στιγμή $t'_2 = \gamma\tau$.

Όσον αφορά το χωρικό σημείο από το οποίο ο παρατηρητής στο **Ο'** μετρά τη θέση εκπομπής του δεύτερου παλμού έχουμε ότι:

$$x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2) \Rightarrow x'_2 = -\gamma\beta c\tau \quad (2)$$

Δηλαδή ο παρατηρητής στο **Ο'** μετρά τον δεύτερο παλμό να λαμβάνει χώρα στο σημείο $x'_2 = -\gamma\beta c\tau$ πράγμα που σημαίνει ότι ο παλμός χρειάζεται ένα επί πλέον χρόνο ίσο με $\gamma\beta c\tau / c$ μέχρι να φτάσει ο παλμός σ' αυτόν και να μπορέσει να τον δει.

Άρα από (1) και (2) ο συνολικός χρόνος που περνά από την στιγμή που ο παρατηρητής **Ο'** τον πρώτο παλμό μέχρι την στιγμή που θα δει τον δεύτερο παλμό είναι:

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–9, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

$$T \;=\; \gamma\tau+\gamma\beta\tau \;=\; \gamma(1+\beta)\tau \;=\; \sqrt{\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}}\,\tau \;\Rightarrow$$

$$T \;=\; \sqrt{\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}}\,\tau \qquad (1)$$

Δηλαδή η περίοδος που βλέπει ο κινούμενος παρατηρητής είναι μεγαλύτερη από την περίοδο της πυγής σε ηρεμία. **Αξίζει να σημειωθεί ότι η σχέση (1) συμπεριλαμβάνει την σχετικιστική διαστολή του χρόνου καθώς επίσης και τον χρόνο που χρειάζονται τα σήματα φωτός να φτάσουν τον κινούμενο παρατηρητή.** Αυτό είναι το σχετικιστικό φαινόμενο Doppler το οποίο μπορεί να γραφτεί και σαν συνάρτηση της συχνότητας με την οποία εκπέμπει η πηγή:

$$f \;=\; \sqrt{\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}}\,f_0 \qquad f \;=\; \frac{1}{T} \qquad f_0 \;=\; \frac{1}{\tau} \qquad (2)$$

Επειδή η ταχύτητα, η συχνότητα και το μήκος κύματος συνδέονται με την σχέση: $c \;=\; f\lambda$ η σχέση (2) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\lambda \;=\; \sqrt{\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}}\,\lambda_0 \qquad \lambda \;=\; \frac{c}{f} \qquad \lambda_0 \;=\; \frac{c}{f_0} \qquad (3)$$

Για ταχύτητες πολύ μικρότερες της ταχύτητας του φωτός έχουμε:

$$f=f_0(1-\beta)^{1/2}(1+\beta)^{-1/2} \;=\; f_0\left(1-\frac{\beta}{2}+O(\beta^2)\right)\left(1-\frac{\beta}{2}+O(\beta^2)\right) \;\Rightarrow$$

$$f=f_0(1-\beta)^{1/2}(1+\beta)^{-1/2} \;\approx\; f_0\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\frac{\beta}{2}\right) \;=\; f_0(1-\beta) \;\Rightarrow$$

$$f \;\approx\; f_0(1-\beta)$$

Συνεπώς καταλήγουμε στο αποτέλεσμα της κλασσικής (μη-σχετικιστικής) φυσικής το οποίο είναι

$$f=f_0\left(1-\frac{V}{v_W}\right)$$

όπου V είναι η ταχύτητα του συστήματος **O'** και v_W η ταχύτητα ενός συγκεκριμένου κύματος.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–9, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Φαινόμενο Doppler για φωτόνια:

Όπως θα δούμε στη συνέχεια του μαθήματος της Σύγχρονης Φυσικής, το φως εκτός από την κυματική του φύση, έχει και σωματιδιακή φύση. Δηλαδή αποτελείται από σωματίδια τα οποία αποκαλούνται **φωτόνια**. **Τα φωτόνια είναι σωματίδια με μηδενική μάζα τα οποία όμως έχουν ορμή και ενέργεια.** Έστω λοιπόν ότι η πηγή στο **O** εκπέμπει φωτόνια με ενέργεια E_γ . Ας δούμε τι ενέργεια έχουν τα φωτόνια αυτά στο σύστημα **O'** όταν μετρούνται από τον παρατηρητή στο σύστημα αυτό. **Η ενέργεια ενός φωτονίου δίνεται από την σχέση** $E_\gamma = hf$ **όπου** h **είναι η σταθερά του Plank και** f **η συχνότητα.** Έτσι η σχέση (2) μπορεί να γραφτεί ως προς την ενέργεια του φωτονίου:

$$hf = \sqrt{\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}}\, h f_0 \Rightarrow$$

$$E'_\gamma = \sqrt{\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}}\, E_\gamma$$

όπου E'_γ είναι η ενέργεια του φωτονίου που μετρά ο κινούμενος παρατηρητής στο σύστημα **O'** και E_γ η ενέργεια του φωτονίου στο σύστημα **O**.

Παράδειγμα 1: Οδηγός συλλαμβάνεται γιατί πέρασε με κόκκινο. Στο δικαστήριο ισχυρίζεται επειδή εκινείτο προς το τον φωτεινό σηματοδότη και λόγο του φαινομένου Doppler το κόκκινο (630 nm) φως φαινόταν στο σύστημα του αυτοκινήτου του πράσινο (530 nm). Ο δικαστής τον πιστεύει και του δίνει πρόστιμο για υπερβολική ταχύτητα. Πόσο γρήγορα έπρεπε να οδηγεί για να είναι σωστός ο ισχυρισμός του;

Λύση:

Χρησιμοποιώντας την σχέση Doppler για το μήκος κύματος με $\beta \to -\beta$ (επειδή το αυτοκίνητο κινείται προς το ραντάρ) έχουμε:

$$\lambda = \sqrt{\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}}\, \lambda_0 \quad \text{(A)}$$

Ένας άλλος τρόπος για να αποφασίσει κανείς για το που να βάλει +/- είναι να σκεφτεί ότι αφού το αυτοκίνητο πλησιάζει το ραντάρ, η συχνότητα αυξάνεται άρα το μήκος κύματος μικραίνει. Έτσι το '–' πρέπει να είναι στον αριθμητή και το '+' στον παρονομαστή.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–9, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Έτσι από την (Α) έχουμε

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 = \frac{(1-\beta)}{(1+\beta)} \Rightarrow (1-\beta) = (1+\beta)\Delta^2 \quad \text{όπου} \quad \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 = \Delta^2$$

$$\beta = \frac{\Delta^2 - 1}{\Delta^2 + 1} = 0.171$$

Παράδειγμα 2: Αστυνομικό ραντάρ μετρά την ταχύτητα αυτοκινήτου το οποίο κινείται προς το ραντάρ. Το ραντάρ μετρά την διαφορά μεταξύ της συχνότητας που εκπέμπει και αυτής που επιστέφει στο ραντάρ αφού ανακλαστεί από το αυτοκίνητο. Από τις δύο αυτές μετρήσεις υπολογίζεται η ταχύτητα του αυτοκινήτου. Έστω λοιπόν ότι το ραντάρ μετρά κλασματική διαφορά συχνότητας η οποία είναι ίση με: $\Delta f / f_0 = 2.86\times10^{-7}$ όπου f_0 είναι η εκπεμπόμενη συχνότητα. Πόσο γρήγορα κινείται το αυτοκίνητο;

Λύση:

Έστω ότι η συχνότητα του ραντάρ είναι f_0 , αυτή που μετράται από παρατηρητή πάνω στο αυτοκίνητο f_1 και αυτή που επιστρέφει στο ραντάρ f_2 . Το ότι η f_1 έχει υποστεί μετατόπιση Doppler είναι προφανές:

$$f_1 = (1+\beta)^{1/2}(1-\beta)^{-1/2} f_0 \qquad (1)$$

Επειδή όμως στο σύστημα του αυτοκινήτου το εισερχόμενο σήμα έχει συχνότητα f_1 τότε και το ανακλώμενο σήμα έχει συχνότητα f_1 <u>στο σύστημα του αυτοκινήτου</u> . Συνεπώς και το ανακλώμενο σήμα έχει υποστεί μετατόπιση Doppler σε σχέση με το ραντάρ που τελικά το λαμβάνει. Άρα

$$f_2 = (1+\beta)^{1/2}(1-\beta)^{-1/2} f_1 \qquad (2)$$

Συνεπώς από (1) και (2) έχουμε ότι:

$$f_2 = \frac{(1+\beta)}{(1-\beta)} f_0 \Rightarrow \frac{f_2}{f_0} = \frac{(1+\beta)}{(1-\beta)} \Rightarrow \frac{f_2 - f_0}{f_0} = \frac{2\beta}{1-\beta} \Rightarrow \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{2\beta}{1-\beta} \Rightarrow$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–9, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

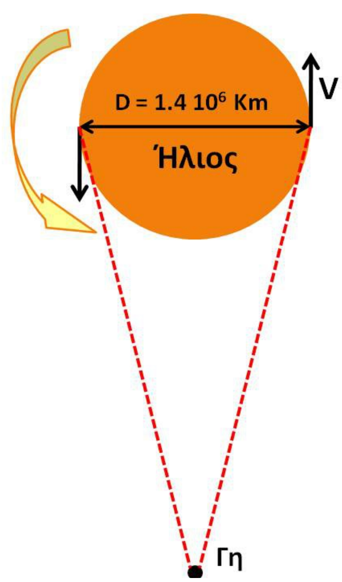
$$\beta = \frac{\frac{\Delta f}{f_0}}{2+\frac{\Delta f}{f_0}}$$

Άρα

$$V = \beta c \Rightarrow V = 42.9\, m/s \approx 154\, km/h$$

Παράδειγμα 3: Φασματογράφος πάνω στην γη μετρά την $\lambda = 656\, nm$ γραμμή του υδρογόνου δύο φορές χρησιμοποιώντας φως που προέρχεται από δύο αντιδιαμετρικά σημεία του ηλίου. Ο φασματογράφος μετρά μία διαφορά μήκους κύματος $\Delta\lambda = 0.009\, nm$ μεταξύ των δύο μετρήσεων. Υπολογίστε την περίοδο περιστροφής του ηλίου. Ο ήλιος έχει διάμετρο $D = 1.4\times10^6\ Km$. Η απόσταση Ηλίου-Γης είναι αρκετά μεγάλη έτσι ώστε να μπορούμε προσεγγιστικά να πούμε ότι οι δύο ακτίνες φωτός είναι στην πράξη παράλληλες και μεταξύ τους καθώς και με την ταχύτητα με την οποία κινείται περιστροφικά η επιφάνεια του ηλίου.

Λύση:



Η ταχύτητα περιστροφής του ηλίου δίνεται από την σχέση:

$$V = \omega R = \frac{\omega D}{2} = \frac{2\pi f\, D}{2} = \pi f\, D = \frac{\pi D}{T} \qquad (1)$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–9, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

όπου R είναι η ακτίνα του ηλίου και $\omega,\ f,\ T$ η γωνιακή συχνότητα, η συχνότητα και η περίοδος περιστροφής του ηλίου.

Το φως που προέρχεται από το σημείο του ηλίου που κινείται αντίθετα από την κατεύθυνση που είναι η γη δίνεται από την σχέση:

$$\lambda_+ = \sqrt{\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}}\lambda_0$$

και το φως που προέρχεται από το σημείο του ηλίου που κινείται προς την κατεύθυνση που είναι η γη δίνεται από την σχέση:

$$\lambda_- = \sqrt{\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}}\lambda_0$$

Λόγω του ότι η ταχύτητα περιστροφής του ηλίου είναι πολύ μικρότερη της ταχύτητας του φωτός έχουμε ότι $\beta \ll 1$. Συνεπώς από την διωνυμική σχέση έχουμε ότι:

$$\lambda_+ = (1+\beta)^{1/2}(1-\beta)^{-1/2}\lambda_0 = (1+\beta/2 \ +\ldots+\ )(1+\beta/2 \ +\ldots+\ )\lambda_0 = (1+\beta)\lambda_0 \quad (2)$$

$$\lambda_- = (1-\beta)^{1/2}(1+\beta)^{-1/2}\lambda_0 = (1-\beta/2 \ +\ldots+\ )(1-\beta/2 \ +\ldots+\ )\lambda_0 = (1-\beta)\lambda_0 \quad (3)$$

Έτσι από (2) και (3) έχουμε ότι:

$$\lambda_+ - \lambda_- = 2\beta\lambda_0 \ \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2\lambda_0} = \frac{0.009\,nm}{2\times 656\,nm} \Rightarrow V = 2.06 \ \ Km/s \quad (4)$$

Από (1) και (4) έχουμε ότι

$$T = \frac{\pi D}{V} = 2.14\times 10^6 \ s \ \approx \ 25 \ \ d$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–9, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Παράδειγμα 4: Ουδέτερο πιόνιο κινείται με ταχύτητα $V = 0.998c$ στη διεύθυνση του άξονα των x. Το πιόνιο διασπάται σε δύο φωτόνια μέσω της αντίδρασης $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ και έχει μάζα ίση με $m_{\pi^0}c^2 = 135\,MeV$. Ας υποθέσουμε ότι το ένα από τα φωτόνια εκπέμπεται στην κατεύθυνση του θετικού άξονα των x και το δεύτερο στην αντίθετη ακριβώς κατεύθυνση. Υπολογίστε τις ενέργειες των φωτονίων στο σύστημα του εργαστηρίου.

Λύση:

Στο σύστημα ηρεμίας του φωτονίου η αρχική ενέργεια του π^0 είναι μόνο αυτή που προέρχεται από την μάζα του πιονίου δηλαδή $m_{\pi^0}c^2 = 135\,MeV$. Η ενέργεια αυτή μοιράζεται εξ ίσου στα δύο φωτόνια λόγω συμμετρίας. Έτσι η ενέργεια του κάθε φωτονίου είναι:

$$E_\gamma^* = \frac{135\,MeV}{2} = 67.5\,MeV$$

Επειδή το π^0 κινείται με $V = 0.998c$ στο σύστημα του εργαστηρίου οι ενέργειες τους έχουν υποστεί μετατόπιση Doppler και δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

Το φωτόνιο το οποίο κινείται στην ίδια κατεύθυνση με το π^0 έχει ενέργεια στο εργαστήριο η οποία είναι ίση με:

$$E_\gamma^{MAX} = \sqrt{\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}}\,E_\gamma^* = \sqrt{\frac{(1+0.998)}{(1-0.998)}}\,67.5 \quad MeV = 2133.5\,MeV$$

και το φωτόνιο το οποίο κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση με το π^0 έχει ενέργεια στο εργαστήριο η οποία είναι ίση με:

$$E_\gamma^{MIN} = \sqrt{\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}}\,E_\gamma^* = \sqrt{\frac{(1-0.998)}{(1+0.998)}}\,67.5 \quad MeV = 2.14\,MeV$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι αν μετρήσουμε το φάσμα φωτονίων τα οποία προέρχονται από μεταπτώσεις δέσμης ουδέτερων πιονίων (π^0) μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα των πιονίων χρησιμοποιώντας τα E_γ^{MAX} και E_γ^{MIN} του φάσματος.