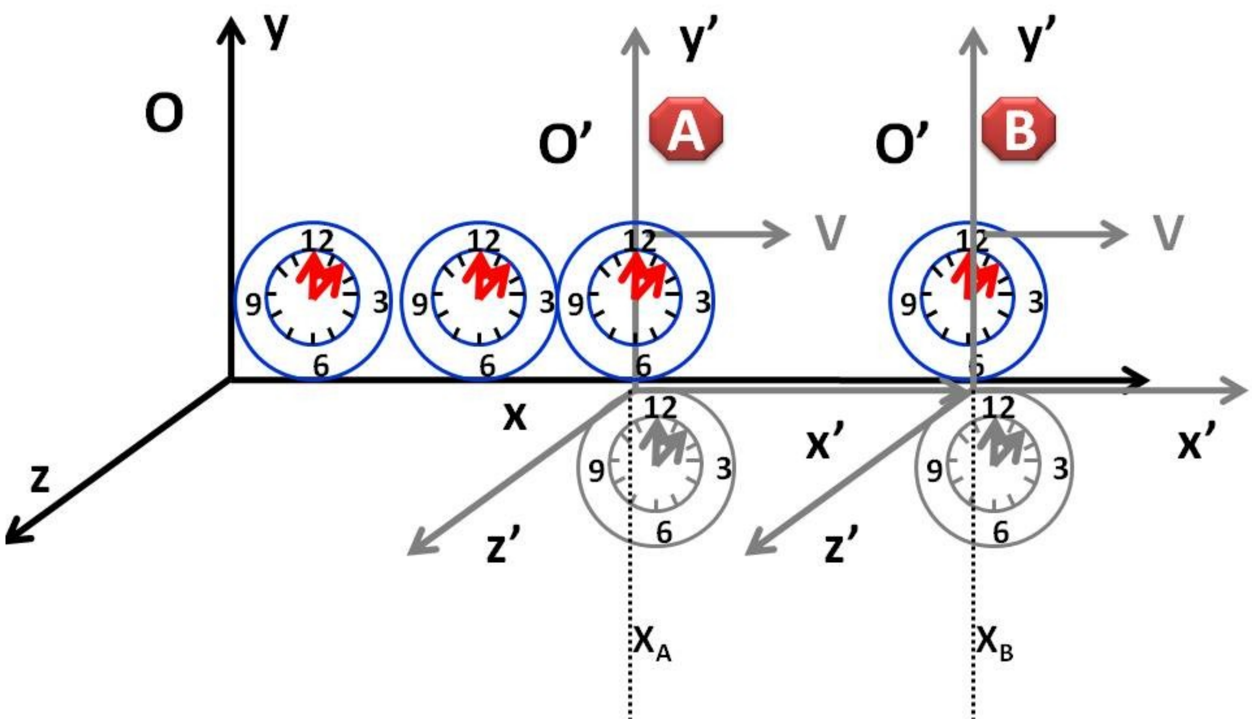
Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–7, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Οι Μετασχηματισμοί του Lorentz και η Διαστολή του Χρόνου

9.2.2012

Σκοπός της έβδομης διάλεξης:

- Η κατανόηση της διαστολής τού χρόνου σαν απόρροια των μετασχηματισμών του Lorentz.
- Η κατανόηση ότι τόσο η διαστολή του χρόνου όσο και η συστολή του μήκους μπορούν να εξηγηθούν με σχετικά απλά μαθηματικά και πηγάζουν από το γεγονός ότι η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.
- Εμπέδωση των αποτελεσμάτων με παραδείγματα.



*Σχήμα 1: Δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς **O** και **O'**. Το **O'** να κινείται με ταχύτητα **V** σε σχέση με το **O**.*

Η διαστολή του χρόνου σαν επακόλουθο των μετασχηματισμών του Lorentz:

Ας θεωρήσουμε πάλι δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς **O** και **O’** όπως στο Σχήμα 1. Το **O’** κινείται με ταχύτητα **V** σε σχέση με το **O**. Δύο παρατηρητές στα συστήματα **O** και **O’** είναι εφοδιασμένοι με χάρακες και χρονόμετρα. Ο παρατηρητής στο **O** έχει ορίσει σύστημα αναφοράς με συντεταγμένες **(ct, x, y, z)** χρησιμοποιώντας χάρακες απείρου μήκους στις διευθύνσεις **x, y, z** ορθογώνιου συστήματος αναφοράς και συγχρονισμένα χρονόμετρα τοποθετημένα *σε κάθε σημείο του χώρου*. Έτσι ο χρόνος είναι μια ιδιότητα του κάθε σημείου στον 4-διάστατο χώρο όπως απαιτούν οι μετασχηματισμοί Lorentz και όχι κάτι το απόλυτο και ίδιο σε όλα τα σημεία όπως στη σχετικότητα του Γαλιλαίου. Ο άξονας των **x** έχει επιλεγεί στην διεύθυνση της ταχύτητας **V**. Με τον ίδιο τρόπο ο παρατηρητής στο **O’** ορίζει κινούμενο σύστημα αναφοράς με συντεταγμένες **(ct', x', y', z')**.

Ας θεωρήσουμε το χρονόμετρο στο **O'** που βρίσκεται ακίνητο στην θέση **(x'=0, y'=0, z'=0)**. Κάθε φορά που το χρονόμετρο στο **O'** χτυπά συμβολίζεται από ένα γεγονός. Έστω λοιπόν δύο γεγονότα **A** και **B** από δύο διαδοχικά χτυπήματα του ρολογιού στο **O'**. Ο παρατηρητής στο **O'** μετρά τις συντεταγμένες των δύο γεγονότων και βρίσκει ότι έχουν τις ίδιες χωρικές συντεταγμένες,

$$A=(ct'_A, x'=0,\;\; y'=0,\;\; z'=0) \qquad\qquad B=(ct'_B, x'=0,\;\; y'=0,\;\; z'=0)$$

αλλά διαφέρουν χρονικά κατά:

$$\Delta\tau \;=\; t'_A - t'_B$$

Ο παρατηρητής στο **O** παρατηρεί (μετρά) το γεγονός **A** την στιγμή που το κινούμενο ρολόι του **O'** περνάει από το σημείο $(x \;=\; x_A,\;\; y \;=\; 0,\;\; z \;=\; 0)$ του **O** και το χρονόμετρο που βρίσκεται στο σημείο αυτό στο **O** μετρά χρόνο $t \;=\; t_A$. Για τον παρατηρητή στο **O** το γεγονός **B** λαμβάνει χώρα όταν το κινούμενο χρονόμετρο του **O'** περνά από διαφορετικό σημείο $(x \;=\; x_B,\;\; y \;=\; 0,\;\; z \;=\; 0)$ στο **O** και το ρολόι στο σημείο αυτό μετρά χρόνο $t \;=\; t_B$. Είναι σημαντικό να καταλάβει ο αναγνώστης ότι *ο ακίνητος παρατηρητής μετρά τα δύο γεγονότα σε διαφορετικές χωρικές και χρονικές συντεταγμένες*. Ο ακίνητος παρατηρητής μετρά χρονική διαφορά ίση με:

$$\Delta t \;=\; t_A - t_B$$

Προφανώς το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε το $\Delta\tau$ σαν συνάρτηση του Δt.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–7, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Ο μετασχηματισμός Lorentz που μετατρέπει τον χρόνο που μετρά το χρονόμετρο στο **Ο’** σε χρόνο που μετρά το χρονόμετρο στο σύστημα **Ο** δίνεται από:

$$ct = \gamma(ct' + \beta x')$$

Συνεπώς η χρονική διαφορά μεταξύ των δύο γεγονότων στο **Ο** δίνεται από:

$$c(t_A - t_B) = \gamma(c(t'_A - t'_B) + \beta(x'_A - x'_B)) \quad \Rightarrow$$

$$c(t_A - t_B) = \gamma(c\Delta\tau + \beta(0-0)) \quad \Rightarrow$$

$$\Delta t = t_A - t_B = \gamma\Delta\tau \quad \Rightarrow$$

$$\Delta t = \gamma\Delta\tau$$

Δηλαδή τα χτυπήματα του ρολογιού στο Ο' , όταν μετρούνται στο Ο, έρχονται σε χρονικά διαστήματα τα οποία είναι μεγαλύτερα ($\gamma > 1$) από αυτά που παρατηρεί ο παρατηρητής στο ακίνητο ως προς αυτόν χρονόμετρο του Ο. *Συνεπώς το κινούμενο χρονόμετρο είναι πιο αργό από το ακίνητο.*

Το φαινόμενο αυτό είναι διαστολή του χρόνου που προβλέπει η θεωρία της ειδικής σχετικότητας. Ο χρόνος $\Delta\tau = t'_A - t'_B$ στο αδρανειακό σύστημα του ρολογιού ονομάζεται *ιδιοχρόνος* (proper time) και χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι κατά την μέτρηση του έχουμε $x'_A - x'_B = 0$.

Παρατηρήσεις:

1. Είναι σημαντικό να κατανοηθεί ότι το χρονόμετρο στο **Ο'** δεν φαίνεται απλά στον παρατηρητή στο **Ο** να χτυπά αργότερα. Ο παρατηρητής στο **Ο**, χρησιμοποιώντας τα διάφορα χρονόμετρα που έχει εγκαταστήσει κατά μήκος του άξονα των **x**, μετρά τα χτυπήματα του χρονομέτρου στο **Ο'**, και τα βρίσκει πραγματικά να έρχονται σε αραιότερα χρονικά διαστήματα. Δεν πρόκειται δηλαδή για κάποια οπτική αυταπάτη αλλά για πραγματικό αποτέλεσμα μέτρησης (βλέπε παραδείγματα 1, 2, 3, 4 στις επόμενες σελίδες).

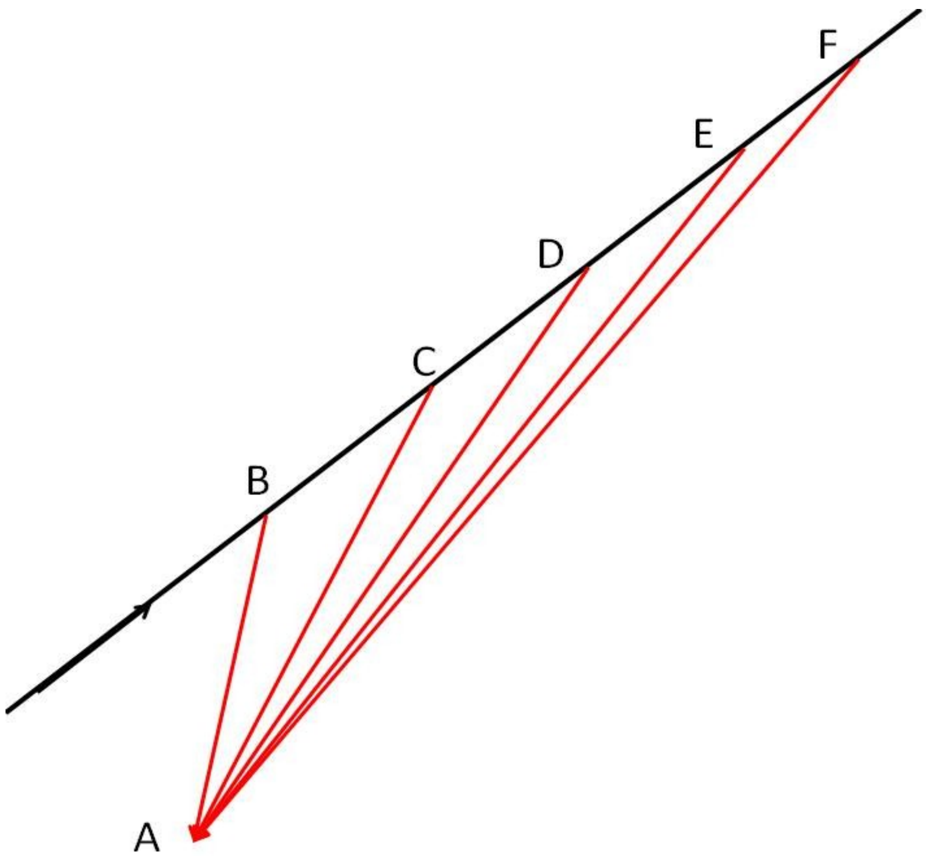
2. Αν αντί για χρονόμετρα σε κάθε σημείο στο **Ο** είχαμε επιλέξει να πληροφορούμε τον παρατηρητή στο **Ο** με σήματα φωτός εκπεμπόμενα από τον παρατηρητή στο **Ο'** για κάθε χτύπημα του χρονομέτρου του θα καταλήγαμε στο ίδιο συμπέρασμα για την διαστολή του χρόνου του κινούμενου χρονομέτρου. Προφανώς σ' αυτή την περίπτωση πρέπει κανείς να λάβει υπ' όψιν του την πεπερασμένη ταχύτητα του φωτός και να κάνει διορθώσεις

αφαιρώντας το χρόνο που χρειάζεται το φως για να φτάσει στον παρατηρητή **O**. Μετά από τις διορθώσεις αυτές θα βρει ότι η περίοδος του χρονομέτρου στο **O'** θα είναι πάλι $\Delta t = \gamma\Delta\tau$. Συνεπώς το συγκεκριμένο αποτέλεσμα δεν έχει τίποτα να κάνει με το χρόνο που χρειάζονται τα σήματα του φωτός για να φτάσουν από τον ένα παρατηρητή στον άλλο. Η ειδική σχετικότητα προβλέπει και το πείραμα αποδεικνύει ότι το κινούμενο χρονόμετρο μετρά χρόνο πιο αργά από το ακίνητο.

Ένα παράδειγμα για αυτό βλέπουμε στο Σχήμα 2 όπου η πληροφορία για τα χτυπήματα του κινούμενου χρονομέτρου στα σημεία **B, C, D, E, F** μεταδίδονται στο σημείο **A** με σήματα φωτός. Ο παρατηρητής στο **A** θα πρέπει να λάβει υπόψη του την πεπερασμένη ταχύτητα του φωτός καθώς και το σημείο εκπομπής του κάθε σήματος και να κάνει διορθώσεις πριν λογαριάσει το χρόνο Δt. Στο τέλος όμως θα καταλήξει πάλι στο ότι $\Delta t = \gamma\Delta\tau$.

3. Κάτι που είναι επίσης σημαντικό να κατανοηθεί είναι το γεγονός ότι το τι *μετρά* ακίνητος παρατηρητής (με τους 3 χάρακες και τα άπειρα χρονόμετρα σε κάθε σημείο του χώρου) είναι πολύ διαφορετικό από το τι *βλέπει* ο παρατηρητής. Στην πρώτη περίπτωση ο παρατηρητής μετρά την διαστολή του χρόνου ενώ στην δεύτερη περίπτωση βλέπει το αποτέλεσμα της διαστολής του χρόνου μαζί με τα αποτελέσματα της πεπερασμένης ταχύτητας των σημάτων του φωτός από το κινούμενο χρονόμετρο προς αυτόν (βλέπε παράδειγμα 5, 6).

4. Η διαστολή του χρόνου έχει αποδειχτεί με πληθώρα πειραματικών αποτελεσμάτων και δεν υπάρχει καμία αμφιβολία σήμερα για την ορθότητα της. Μερικά από αυτά τα πειραματικά δεδομένα θα τα συζητήσουμε σ' αυτή τη διάλεξη.



*Σχήμα 2: Η τροχιά του κινούμενου χρονομέτρου (μαύρο) το οποίο χτυπά στα σημεία **B, C, D, E, F**. Ο παρατηρητής Α δέχεται σήματα φωτός (κόκκινο) από τα σημεία **B, C, D, E, F**. Προφανώς τα σήματα αυτά χρειάζονται διαφορετικούς χρόνους για να φτάσουν στον **Α**. Η διαφορά χρόνου μεταξύ τους είναι μεν κάτι που ο παρατηρητής **Α** πρέπει να λάβει υπόψη του στον υπολογισμό αλλά δεν είναι η διαστολή του χρόνου της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.*

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–7, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση της διαστολής του χρόνου και της συστολής του μήκους:

Παράδειγμα 1: Διαστολή του χρόνου

Ένας παρατηρητής βρίσκεται μέσα σε βαγόνι το οποίο κινείται με ταχύτητα **V** όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Στην θέση (0, 0, 0) του κινούμενου συστήματος αναφοράς έχει εγκαταστήσει διάταξη με **Laser**, καθρέφτη και φωτοδίοδο με την οποία μετρά χρόνο με την εξής μέθοδο: Εκπέμπει δέσμη **Laser** κάθετα προς την διεύθυνση κίνησης (γεγονός 1). Η δέσμη ανακλάται σε καθρέφτη εγκατεστημένο στην οροφή του βαγονιού (γεγονός 2) και επιστρέφει στην φωτοδίοδο που βρίσκεται στην ίδια θέση με το **Laser** (γεγονός 3). Η φωτοδίοδος διεγείρεται και δίνει εντολή στο **Laser** να εκπέμψει ξανά δέσμη φωτός προς τον καθρέφτη. Συνεπώς η διάταξη αυτή είναι ένα χρονόμετρο που μετρά χρόνο σε μονάδες **τ = 2D/c** (ο ιδιοχρόνος εδώ είναι η χρονική διαφορά μεταξύ των γεγονότων 1 και 3) όπου **D** είναι το ύψος του βαγονιού και **c** η ταχύτητα του φωτός. Οι διάταξη αυτή χρησιμοποιείται σαν παράδειγμα αλλά *προφανώς ο κινούμενος παρατηρητής έχει την δυνατότητα να συγχρονίσει με τη διάταξη αυτή οποιοδήποτε χρονόμετρο στο σύστημα του και ότι συμπεράσματα βγάλουμε με αυτή τη συσκευή θα ισχύουν και για οποιοδήποτε χρονόμετρο που κινείται μαζί με το βαγόνι*.

Ένας ακίνητος παρατηρητής εφοδιασμένος με χάρακες απείρου μήκους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4, παρατηρεί το βαγόνι να κινείται με ταχύτητα **V**. Ως προς αυτόν το φως του **Laser** διανύει την τροχιά που φαίνεται στο Σχήμα 4. Ο λόγος γι' αυτό είναι ότι στο χρόνο που πέρασε από το γεγονός 1 μέχρι το γεγονός 3 το βαγόνι κινήθηκε και αναγκαστικά για να φτάσει το φως στη φωτοδίοδο (έτσι ορίζεται το γεγονός 3) χρειάζεται να ακολουθήσει την συγκεκριμένη τροχιά του Σχήματος 4. Το μήκος της τροχιάς αυτής είναι:

$$\Delta S = 2l \tag{1}$$

το οποίο λογαριάζεται χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$l^2 = D^2 + \left(V\frac{l}{c}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad l^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right) = D^2 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{D}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{2}$$

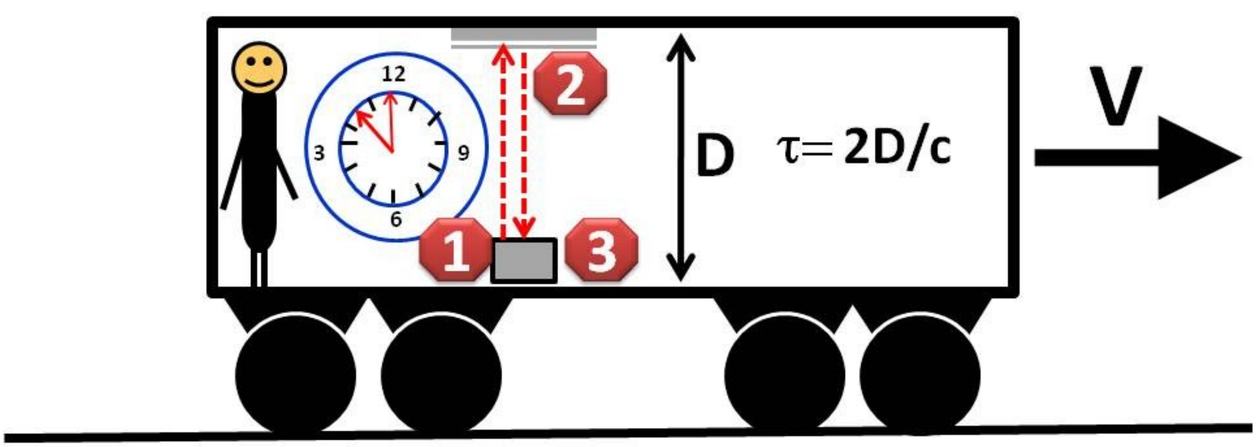
Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–7, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

δηλαδή από (1) και (2) έχουμε ότι:

$$\Delta S = \frac{2D}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

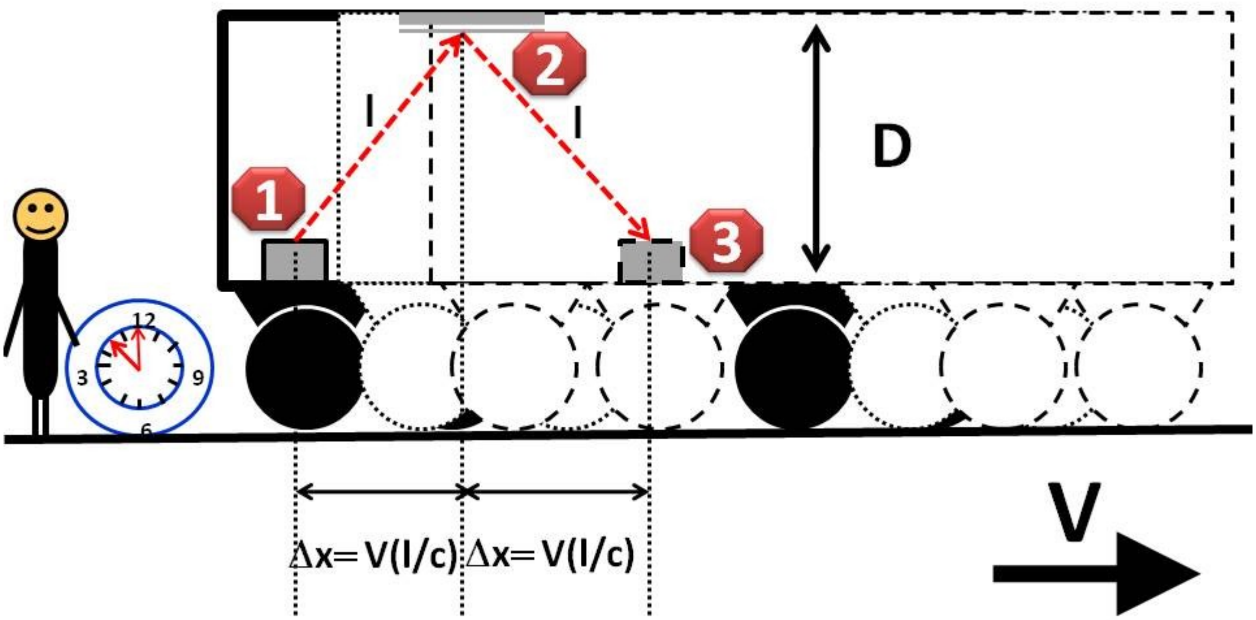
Έτσι ο ακίνητος παρατηρητής μετρά τους χτύπους του κινούμενου χρονομέτρου να έρχονται σε χρονικά διαστήματα τα οποία είναι ίσα με:

$$\Delta t = \frac{\Delta S}{c} = \frac{2D/c}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \gamma \Delta \tau$$



Σχήμα 3: Παρατηρητής μέσα σε κινούμενο βαγόνι με χρονομετρική διάταξη Laser-καθρέφτη-φωτοδίοδο.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–7, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων



Σχήμα 4: Ακίνητος παρατηρητής εφοδιασμένος με χάρακες απείρου μήκους μετρά τη διαδρομή του φωτός από το γεγονός 1 στο γεγονός 3. Χρησιμοποιώντας την ταχύτητα του φωτός υπολογίζει την περίοδο με την οποία χτυπά το κινούμενο χρονόμετρο και την συγκρίνει με την περίοδο του δικού του χρονομέτρου και βρίσκει ότι $\Delta t = \gamma \Delta \tau$.

Δηλαδή καταλήγουμε στην ήδη γνωστή σχέση για την διαστολή του χρόνου:

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau$$

Ο προσεκτικός αναγνώστης θα έχει παρατηρήσει τα εξής:

- Ο ακίνητος παρατηρητής μπορεί να κάνει την ίδια μέτρηση χρησιμοποιώντας άπειρα χρονόμετρα σε κάθε σημείο της τροχιάς του βαγονιού και θα έβρισκε το ίδιο αποτέλεσμα.

- Προφανώς μπορεί να αντιστρέψει κανείς το πείραμα και να ρωτήσει τι παρατηρεί ο παρατηρητής στο **O'** για το χρονόμετρο του **O**. Η απάντηση είναι ότι και αυτός βλέπει το χρονόμετρο του **O** να έχει υποστεί επιβράδυνση λόγο του ότι κινείται ως προς αυτόν. Αυτό μπορεί να ξενίζει τον αναγνώστη αλλά είναι απόρροια της αρχής της σχετικότητας που απαιτεί τα φυσικά φαινόμενα να έχουν τα ίδια αποτελέσματα ανεξαρτήτως του παρατηρητή.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–7, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Παράδειγμα 2: Συστολή του μήκους – 1

Έστω παρατηρητής **A** ο οποίος βρίσκεται ακίνητος και παρατηρητής **B** ο οποίος κινείται με ταχύτητα **V** σε σχέση με τον **A** και εκτελεί τροχιά από σημείο **1** στο σημείο **2**. Ο παρατηρητής **B** είναι εφοδιασμένος με ψηφιακό χρονόμετρο το οποίο μετρά **0** στο σημείο **1** και το **100** στο σημείο **2**. Ο παρατηρητής **A** βλέπει φυσικά το κινούμενο χρονόμετρο στο σημείο **2** να έχει την ένδειξη 100 (η σχετικότητα δεν μπορεί να αλλάξει τον αριθμό 100 σε 99 η 101). Σ' αυτό που διαφωνεί με τον παρατηρητή **B** είναι στο χρόνο που αντιστοιχεί σε κάθε χτύπημα του χρονομέτρου. Ο παρατηρητής **A** μετρά με δικό του χρονόμετρο ότι ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών χτυπημάτων του ψηφιακού χρονομέτρου του παρατηρητή **B** είναι Δt ενώ ο παρατηρητής **B** μετρά $\Delta\tau$ (ιδιοχρόνος) και λόγο της διαστολής του χρόνου $\Delta t = \gamma\Delta\tau > \Delta\tau$.

Ας δούμε τώρα τι ακριβώς παρατηρούν ο **A** και ο **B** για την απόσταση μεταξύ **1** και **2**.

Ο παρατηρητής **A** λέει ότι η απόσταση είναι:

$$l = 100 V \Delta t$$

Ο παρατηρητής **B** λέει ότι η απόσταση είναι:

$$l' = 100 V \Delta\tau$$

Λόγο της διαστολής το χρόνου έχουμε:

$$\Delta t = \gamma\Delta\tau$$

Συνεπώς

$$l' = 100 V \frac{\Delta t}{\gamma} \Rightarrow \qquad l' = \frac{l}{\gamma}$$

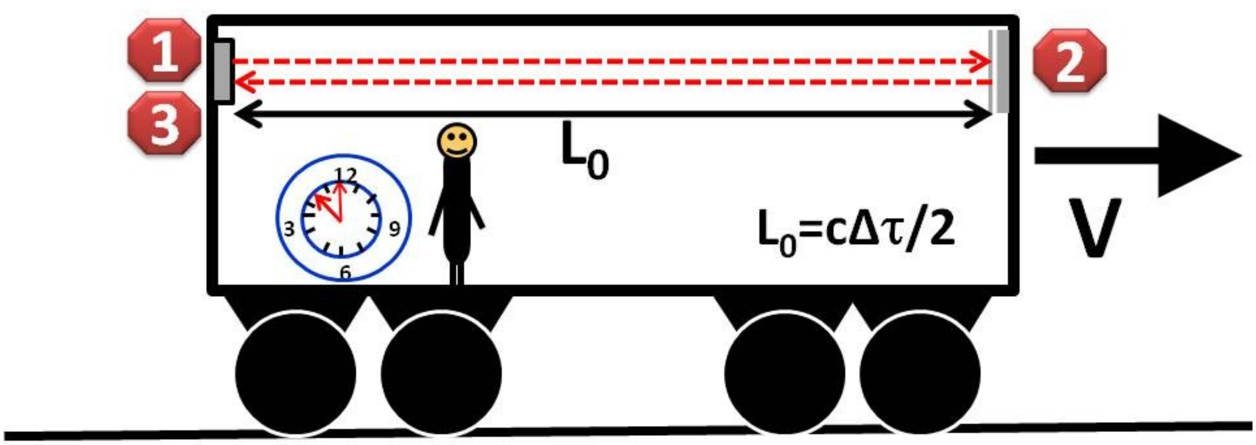
Έτσι καταλήγουμε στη συστολή του μήκους που υπολογίσαμε και με τους μετασχηματισμούς Lorentz.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–7, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Παράδειγμα 3: Συστολή του μήκους - 2

Ας θεωρήσουμε κινούμενο παρατηρητή μέσα σε βαγόνι, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5, ο οποίος προσπαθεί να μετρήσει το μήκος του βαγονιού αντανακλώντας δέσμη Laser και μετρώντας το χρόνο που χρειάζεται για να επιστρέψει. Την εκπομπή της δέσμης την συμβολίζουμε με το Γεγονός-1, την ανάκλαση με το Γεγονός-2 και την επιστροφή με το Γεγονός-3. Ο παρατηρητής υπολογίζει το μήκος του βαγονιού με τον εξής τρόπο: Μετρά τη διαφορά χρόνου μεταξύ γεγονότων 1 και 3 με χρονόμετρο που είναι ακίνητο στο σύστημα του, διαιρεί το χρόνο δια δύο και πολλαπλασιάζει με την ταχύτητα του φωτός:

$$L_0 = c\frac{\Delta\tau}{2}$$



Σχήμα 5: Παρατηρητής κινούμενος με ταχύτητα V μέσα σε ένα βαγόνι μετρά το μήκος του βαγονιού μέσω της μέτρησης του χρόνου που χρειάζεται να επιστρέψει μια δέσμη Laser η οποία εκπέμπεται από την αρχή του βαγονιού και αντανακλάται από καθρέπτη ευρισκόμενο στο τέλος του βαγονιού (χρονική διαφορά μεταξύ γεγονότων 1, 3).

Ας θεωρήσουμε τον ακίνητο παρατηρητή του Σχήματος 6 ο οποίος παρατηρεί το πείραμα του κινούμενου παρατηρητή και προσπαθεί να βγάλει συμπεράσματα για το μήκος του βαγονιού στο σύστημα του. Αυτός φυσικά παρατηρεί το βαγόνι να κινείται και ξέρει ότι στο σύστημα του η διαφορά χρόνου μεταξύ γεγονότων 1 και 3 δεν αντιστοιχεί στο μήκος το βαγονιού και για αυτό απαιτούνται διορθώσεις.

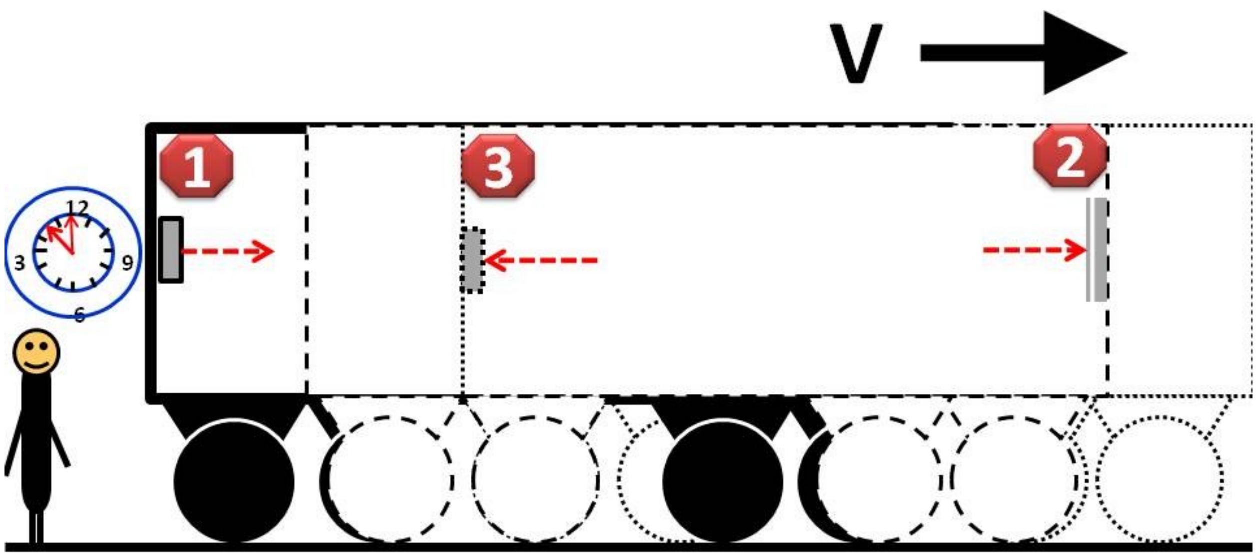
Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–7, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Η χωρική διαφορά μεταξύ γεγονότων 1 και 2 στο σύστημα του ακίνητου παρατηρητή είναι ίση με το μήκος του βαγονιού συν την απόσταση που κινήθηκε το βαγόνι στο χρονικό διάστημα μεταξύ γεγονότων 1 και 3:

$$c\,\Delta t_{12} \;=\; L + V\,\Delta t_{12} \;\Rightarrow\; \Delta t_{12} \;=\; \frac{L}{c-V}$$

Η χωρική διαφορά μεταξύ γεγονότων 2 και 3 στο σύστημα του ακίνητου παρατηρητή είναι ίση με το μήκος του βαγονιού μείον την απόσταση που κινήθηκε το βαγόνι στο χρονικό διάστημα μεταξύ γεγονότων 2 και 3:

$$c\,\Delta t_{23} \;=\; L - V\,\Delta t_{23} \;\Rightarrow\; \Delta t_{23} \;=\; \frac{L}{c+V}$$



Σχήμα 5: Ακίνητος παρατηρητής μετρά το μήκος του βαγονιού μετρώντας με το χρονόμετρο του την χρονική διαφορά μεταξύ γεγονότων 1, 3.

Συνεπώς η χρονική διαφορά μεταξύ γεγονότων 1 και 3 είναι ίση με:

$$\Delta t \;=\; \Delta t_{12} + \Delta t_{23} \;=\; L\left[\frac{1}{c-V} + \frac{1}{c+V}\right] \;=\; L\frac{2c}{c^2 - V^2} \;=\; \frac{2L}{c}\frac{1}{1-\dfrac{V^2}{c^2}} \;=\; \frac{2L}{c}\gamma^2$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–7, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Λύνοντας ως προς το μήκος του βαγονιού στο σύστημα του ακίνητου παρατηρητή έχουμε:

$$L = \frac{c\Delta t}{2}\frac{1}{\gamma^2}$$

Προφανώς μας ενδιαφέρει να απαντήσουμε το ερώτημα για το τη σχέση έχει το μήκος του βαγονιού στο ακίνητο σύστημα ως προς αυτό που μετρά ο κινούμενος παρατηρητής. Παρατηρούμε ότι ο χρόνος Δt έχει οριστεί στο ακίνητο σύστημα και σχετίζεται προφανώς με τον ιδιοχρόνο στο κινούμενο σύστημα μέσω της σχέσης της διαστολής του χρόνου:

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau$$

Άρα

$$L = \frac{c\Delta t}{2}\frac{1}{\gamma} \Rightarrow L = \frac{L_0}{\gamma}$$

Δηλαδή καταλήξαμε στην γνώστη σχέση της συστολής του μήκους.

Παράδειγμα 4: Διαστολή χρόνου

Ένα χρονόμετρο σε ηρεμία χτύπα μία φορά ανά δευτερόλεπτο. Ας υποθέσουμε ότι το ίδιο χρονόμετρο κινείται με ταχύτητα $V = 0.80c$. Κάθε πότε χτύπα το χρονόμετρο (όπως μετράται ακίνητο παρατηρητή) ;

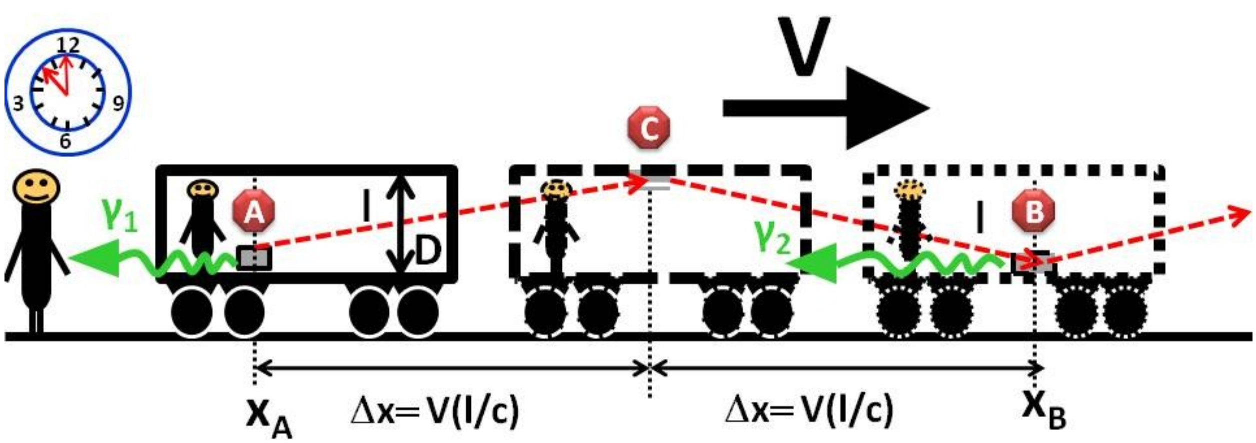
$$\Delta \tau = 1\,sec$$

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\Delta \tau = \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}}1\,sec = 1.67\,sec$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–7, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Παράδειγμα 5: Η περίοδος κινούμενου χρονομέτρου όπως *φαίνεται* από ακίνητο παρατηρητή

Ας υποθέσουμε, όπως φαίνεται στο σχήμα 7, ότι ο κινούμενος παρατηρητής του πρώτου παραδείγματος αποφασίζει να πληροφορήσει τον ακίνητο παρατηρητή, για κάθε φορά που χτυπά το χρονόμετρο του, με μία δεύτερη δέσμη Laser (πράσινο) η οποία εκπέμπεται συγχρόνως στο κινούμενο σύστημα του με την δέσμη του χρονομέτρου (κόκκινο). Ο ακίνητος παρατηρητής μετρά με το χρονόμετρο του το χρόνο άφιξης της δεύτερης δέσμης (γεγονός) και η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών γεγονότων είναι η περίοδος που *βλέπει* ο ακίνητος παρατηρητής. **Ας δούμε λοιπόν τη σχέση έχει η περίοδος που βλέπει ο ακίνητος παρατηρητής με αυτή που μετρά ο κινούμενος παρατηρητής στο σύστημά του**.



Σχήμα 6: Ταυτόχρονα με την εκπομπή της δέσμης Laser (κόκκινο) του κινούμενου χρονομέτρου ο κινούμενος παρατηρητής πληροφορεί τον ακίνητο παρατηρητή ότι χτύπησε το χρονόμετρο του με δεύτερη δέσμη Laser (πράσινο).

Στο σύστημα του ακίνητου παρατηρητή δύο διαδοχικές ακτίνες Laser (πράσινο) φτάνουν σε αυτόν σε χρόνους

$$t_1 = t_A + \frac{x_A}{c} \qquad t_2 = t_B + \frac{x_B}{c}$$

όπως μετρούνται από το χρονόμετρο που <u>βρίσκεται στην ίδια θέση με τον ακίνητο παρατηρητή</u>. Οι χρόνοι t_1 και t_2 είναι οι χρόνοι άφιξης στον ακίνητο παρατηρητή, ενώ οι χρόνοι t_A και t_B είναι οι χρόνοι εκπομπής των ακτίνων όπως μετρούνται στα σημεία εκπομπής τους x_A και x_B .

Έτσι η διαφορά χρόνου άφιξης υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta t_{12} = t_2 - t_1 = t_B - t_A + \frac{1}{c}(x_B - x_A) = t_B - t_A + \frac{1}{c}(t_B - t_A)V \Rightarrow$$

$$\Delta t_{12} = (1 + \frac{V}{c})(t_A - t_B) \qquad (3)$$

Όμως η διαφορά χρόνου εκπομπής στο σύστημα του ακίνητου παρατηρητή σχετίζεται με την διαφορά χρόνου στο κινούμενο σύστημα με την γνωστή σχέση της διαστολής του χρόνου:

$$\Delta t_{BA} = t_B - t_A = \gamma \Delta\tau \qquad (4)$$

Έτσι από (3) και (4) έχουμε ότι:

$$\Delta t_{12} = (1 + \beta)\gamma \Delta\tau = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}\Delta\tau$$

Δηλαδή ο ακίνητος παρατηρητής <u>*βλέπει*</u> μια περίοδο που είναι μεγαλύτερη από αυτή που περιμένουμε εξ' αιτίας της διαστολής του χρόνου λόγω του ότι το βαγόνι κινείται. Με άλλα λόγια οι δύο δέσμες φωτός χρειάζονται διαφορετικό χρόνο για να φτάσουν τον παρατηρητή όταν το βαγόνι βρίσκεται σε κίνηση και η χρονική διαφορά αυτή $\beta\gamma\Delta\tau$ πρέπει να συνυπολογιστεί. Αυτό είναι το φαινόμενο Doppler που θα συζητήσουμε στην επόμενη διάλεξη.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–7, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Παράδειγμα *6*: Κινούμενο χρονόμετρο – Τι μετρά και τη βλέπει ο ακίνητος παρατηρητής

Έστω χρονόμετρο το οποίο σε κατάσταση ηρεμίας εκπέμπει δέσμη φωτός κάθε δευτερόλεπτο. Ας υποθέσουμε ότι το χρονόμετρο κινείται με ταχύτητα $V = 0.8c$ απομακρυνόμενο από ακίνητο παρατηρητή. (α) Με τι περίοδο χτυπά το κινούμενο χρονόμετρο στο σύστημα ακίνητου παρατηρητή; (β) Πόσο αυξάνεται η απόσταση το χρονομέτρου από ακίνητο παρατηρητή με κάθε χτύπημα του χρονομέτρου; (γ) Πόσο περισσότερο χρειάζεται μία συγκεκριμένη δέσμη για να φτάσει τον ακίνητο παρατηρητή σε σχέση με την προηγούμενη; (δ) Συνεπώς τι περίοδο βλέπει ο ακίνητος παρατηρητής;

Όπως και στο παράδειγμα 4: $\Delta t = \gamma \Delta \tau = 1.67\,sec$.

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών χτυπημάτων είναι προφανώς:

$$\Delta S = 0.8\,c\,\Delta t \approx 1.67\,sec \times 0.8 \times 3\,10^8 \frac{m}{sec} = 4\,10^8\,m$$

Άρα η κάθε δέσμη χρειάζεται επί πλέον $\frac{\Delta S}{c} = 0.8\Delta t = 1.34 \; sec$ για να φτάσει τον παρατηρητή (η ταχύτητα των φωτεινών σημάτων είναι πεπερασμένη).

Συνεπώς η περίοδος που *βλέπει* ο ακίνητος παρατηρητής είναι η περίοδος λόγω της διαστολής του χρόνου συν την χρονική διόρθωση που λαμβάνει υπόψη την πεπερασμένη ταχύτητα των σημάτων φωτός:

$$\Delta T = (1 + 0.8)\Delta t = 1.8 \times 1.67 \approx 3 \; sec$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–7, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Στοιχεία Σωματιδιακής Φυσικής:

Στοιχειώδη Σωμάτια:

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να εισαγάγει μόνο τις απαραίτητες έννοιες από την φυσική υψηλών ενεργειών οι οποίες χρειάζονται σε εφαρμογές της θεωρίας της σχετικότητας.

Σύμφωνα με τα πειραματικά δεδομένα το σύμπαν αποτελείται από δύο κατηγορίες σωματιδίων τα λεπτόνια (leptons) και τα κουάρκς (quarks). Τα κουάρκς και τα λεπτόνια έχουν σπιν ίσο με ½, δηλαδή είναι φερμιόνια.

Υπάρχουν τρεις οικογένειες λεπτονίων και η κάθε μία αποτελείται από ένα ουδέτερο νετρίνο ν_e, ν_μ, ν_τ και ένα φορτισμένο σωματίδιο το πιο γνωστό από τα οποία είναι το ηλεκτρόνιο e^- :

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$$

Το μιόνιο (muon), και το ταυ-λεπτόνιο (tau-lepton), έχουν τις ίδιες ιδιότητες με το ηλεκτρόνιο αλλά είναι αρκετά βαρύτερα. Όλα τα λεπτόνια αλληλεπιδρούν μέσω της ασθενούς πυρηνικής αλληλεπίδρασης και τα φορτισμένα από αυτά αλληλεπιδρούν επίσης μέσω της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης. Λόγο του ότι έχουν μάζα αλληλεπιδρούν επίσης και μέσω τής βαρύτητας άλλα η αλληλεπίδραση αυτή μπορεί να αγνοηθεί σε υψηλές ενέργειες επειδή είναι ιδιαίτερα ασθενής σε σχέση με τις άλλες δύο αλληλεπιδράσεις.

Υπάρχουν επίσης τρεις οικογένειες από κουάρκς:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

Τα κουάρκς έχουν μάζα, και φορτία τα οποία είναι κλάσματα του φορτίου του ηλεκτρονίου

$$Q_{u,c,t} = +(2/3)|q_e|$$

$$Q_{d,s,b} = -(1/3)|q_e|$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–7, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

($|q_e| = 1.6\times10^{-19}Cb$) και αλληλεπιδρούν και με τις τέσσερις γνωστές αλληλεπιδράσεις: Την ισχυρή και ασθενή πυρηνική, την ηλεκτρομαγνητική και την βαρύτητα (η οποία είναι αμελητέα σε σχέση με της άλλες τρεις αλληλεπιδράσεις).

Η τέσσερις αλληλεπιδράσεις μεταδίδονται μέσω σωματιδίων τα οποία ονομάζονται μεταδότες και έχουν ακέραιο σπιν δηλαδή είναι μποζόνια:

- Ο μεταδότης της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης είναι το φωτόνιο, γ , το οποίο μεταδίδει την ηλεκτρομαγνητική δύναμη μεταξύ σωματιδίων που έχουν φορτίο. Το φωτόνιο έχει σπιν 1 και μάζα μηδέν λόγο του ότι η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση έχει άπειρη εμβέλεια.

- Η ασθενής πυρηνική αλληλεπίδραση μεταδίδεται μέσω δύο φορτισμένων σωματιδίων, $W^{\pm}$ και ενός ουδέτερου του Z^0 τα οποία έχουν μάζα και σπιν ίσο με 1.
- Η ισχυρή πυρηνική αλληλεπίδραση διαδίδεται μέσω οκτώ σωματιδίων τα οποία ονομάζονται γκλουόνια (gluons), g , και έχουν σπιν 1.
- Βαρυτική αλληλεπίδραση μεταδίδεται μέσω σωματιδίων που έχουν σπιν 2, τα λεγόμενα γκραβιτόνια (gravitons), G .

Όλα τα γνωστά σωματίδια που συναντώνται στην φύση η παράγονται στο εργαστήριο με επιταχυντές είναι ή λεπτόνια ή προέρχονται από συνδυασμούς από κουάρκς.

- Σωματίδια που αποτελούνται από τρία κουαρκς λέγονται βαρυόνια (*baryons*) και μερικά παραδείγματα από αυτά είναι: Το πρωτόνιο $p = uud$ (σπιν-1/2), το νετρόνιο $n = udd$ (σπιν-1/2), το λάμδα-βαρυόνιο $\Lambda^0 = uds$ (σπιν-1/2), το $\Xi^- = dss$ (σπιν-1/2, 3/2), $\Xi^0 = uss$ (σπιν-1/2, 3/2) και το $\Omega^- = sss$ (σπιν-3/2).
- Σωματίδια που αποτελούνται από ένα ζευγάρι από κουαρκ-αντι-κουάρκ λέγονται μεσόνια (mesons) και μερικά παραδείγματα από αυτά είναι: τα Πιόνια (pions) $\pi^+ = u\bar{d} \quad \pi^- = \bar{u}d \quad \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}-d\bar{d})$ (σπιν-0)
  τα Καόνια $K^+ = u\bar{s} \quad K^- = \bar{u}s \quad K^0 = d\bar{s} \quad \bar{K}^0 = \bar{d}s$ (σπιν-0)
  και τα διανυσματικά μποζόνια $J/\Psi = c\bar{c} \quad \Upsilon = b\bar{b}$ (σπιν-1).

Τα βαρυόνια και τα μεσόνια λέγονται αδρόνια (hadrons).

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–7, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Ο νόμος των ραδιενεργών διασπάσεων:

Τα περισσότερα από τα σωματίδια, στοιχειώδη η μη-στοιχειώδη, έχουν πεπερασμένο χρόνο ζωής και διασπώνται σε άλλα ελαφρότερα σωματίδια. Οι νόμοι που διέπουν την φυσική αυτών των διασπάσεων δεν είναι το θέμα της παρούσας διάλεξης και θα αρκεστούμε να πούμε μόνο ότι έχουν να κάνουν με την αλληλεπίδραση που είναι υπεύθυνη για κάθε συγκεκριμένη διάσπαση. Η πιθανότητα διάσπασης υπολογίζεται με μεθόδους της Κβαντικής Θεωρίας. Οι διασπάσεις των σωματιδίων διέπονται από τον νόμο των ραδιενεργών διασπάσεων ο οποίος είναι το θέμα της παρούσας παραγράφου.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα αρχικό αριθμό N_0 μιονίων σε ηρεμία τα οποία διασπώνται σε τρία άλλα σωματίδια μέσω της αντίδρασης:

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

Φυσικά δεν διασπώνται όλα τα μιόνια μονομιάς. Έστω λοιπόν ότι την χρονική στιγμή t έχουμε $N(t)$ μιόνια και ότι στο χρονικό διάστημα μεταξύ t και $t+\Delta t$ παρατηρήθηκαν $\Delta N(t)$ διασπάσεις. Τότε η πιθανότητα διάσπασης σε χρόνο Δt είναι $\Delta N(t)/N(t)$. Ο νόμος των ραδιενεργών διασπάσεων μας λέει ότι η πιθανότητα διάσπασης σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα Δt είναι σταθερά:

$$\frac{1}{\Delta t}\frac{\Delta N(t)}{N(t)} = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda \qquad (5)$$

Αυτό έρχεται σε αντίφαση με αυτό που θα περίμενε κανείς και το οποίο συμβαίνει σε βιολογικά όντα, δηλαδή ότι όσο πιο μεγαλύτερη είναι η ηλικία κάποιου ατόμου τόσο μεγαλύτερη η πιθανότητα να πεθάνει. Για σωματίδια αυτό δεν ισχύει και η πιθανότητα να διασπαστούν (πεθάνουν) παραμένει σταθερή καθ' όλη την διάρκεια της ζωής τους.

Έτσι από την (5) έχουμε ότι:

$$\frac{d\ln N(t)}{dt} = -\lambda \Rightarrow \ln N(t) = -\lambda t + C \Rightarrow N(t) = A e^{-\lambda t}$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–7, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Όπου A είναι μια σταθερά που προέρχεται από την ολοκλήρωση και η οποία καθορίζεται από την αρχική συνθήκη:

$$N_0 = N(0) = A e^{-\lambda \cdot 0} = A \qquad \Rightarrow \; N_0 = A$$

Έτσι ο νόμος ραδιενεργών διασπάσεων γράφεται:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda \cdot t} \quad (6)$$

Όπως φαίνεται από την (6) ο πληθυσμός των σωματιδίων μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο και ο ρυθμός μείωσης καθορίζεται από την σταθερά $\lambda = 1/\tau$ όπου τ είναι ο **μέσος χρόνος ζωής** του σωματιδίου. Συνεπώς ο νόμος ραδιενεργών διασπάσεων μπορεί να γραφτεί:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

Η φυσική/πρακτική σημασία του μέσου χρόνου ζωής, τ , είναι ότι μετά την παρέλευση χρόνου τ απομένουν:

$$N(\tau) = \frac{N_0}{e}$$

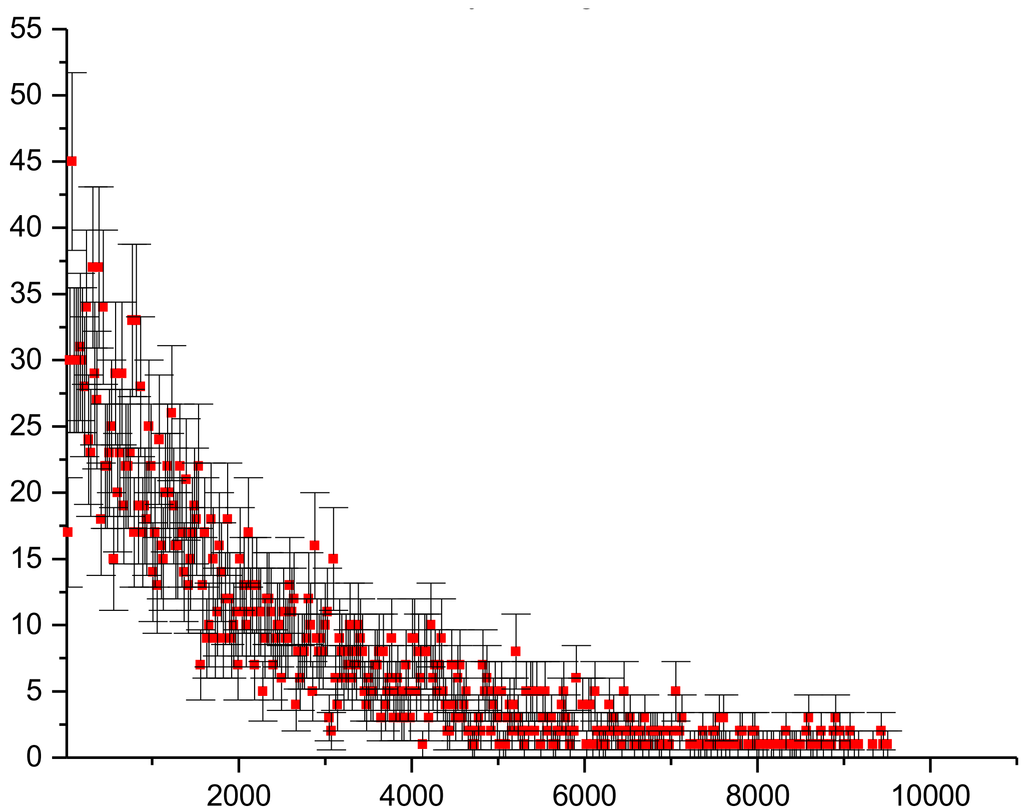
σωματίδια.

Έτσι στο εξής όταν λέμε ότι ο μέσος χρόνος ζωής σωματιδίου είναι τ <u>δεν εννοούμε</u> ποτέ ότι έχουμε ένα και μοναδικό σωματίδιο (πράγμα πολύ δύσκολο να επιτευχθεί πειραματικά) το οποίο διασπάται ακριβώς μετά από χρόνο τ <u>αλλά εννοούμε</u> ότι έχουμε μια συλλογή σωματιδίων και μετά από χρόνο τ απομένουν $N(\tau) = N_0/e$ από αυτά.

Στο Σχήμα 7 φαίνονται τα αποτελέσματα ενός πειράματος που μετρά το μέσο χρόνο ζωής μιονίων. Δεδομένα από μετρήσεις του αριθμού διασπάσεων ανά μονάδα χρόνου φαίνονται στον άξονα **y** και ο χρόνος που έγινε η μέτρηση στον άξονα **x** (**t=0** είναι ο χρόνος δημιουργίας των σωματιδίων). Όπως φαίνεται εκεί ο αριθμός διασπάσεων ανά μονάδα χρόνου είναι μία εκθετικά φθίνουσα συνάρτηση σε συμφωνία με το νόμο των ραδιενεργών διασπάσεων που προβλέπει ότι:

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–7, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

$$-\Delta N(t) = -N_0 \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \Delta t$$



*Σχήμα 7: Αριθμός γεγονότων διάσπασης μιονίων (άξονας **y**) σαν συνάρτηση του χρόνου σε nsec (άξονας **x**) που έλαβε χώρα η διάσπαση. Μαζί με τα δεδομένα (κόκκινο) δίδονται και τα στατιστικά σφάλματα.*

Σημαντική παρατήρηση:

Ο νόμος των ραδιενεργών διασπάσεων εκφρασμένος ως

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

ισχύει στο αδρανειακό σύστημα του συγκεκριμένου σωματιδίου που υπόκειται σε διάσπαση.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–7, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Αν το σωματίδιο βρίσκεται σε κίνηση ως προς το σύστημα του εργαστηρίου με ταχύτητα

$$V = \beta c = \sqrt{\frac{(\gamma^2 - 1)}{\gamma^2}}\, c$$

τότε σύμφωνα με την θεωρία της σχετικότητας ο χρόνος ζωής του σωματιδίου στο εργαστήριο δίνεται από τη σχέση της διαστολής του χρόνου $\Delta t = \gamma\tau$. Συνεπώς στο σύστημα του εργαστηρίου ο νόμος των ραδιενεργών μεταπτώσεων παίρνει την μορφή:

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\gamma\tau}}$$

Παράδειγμα 7:

Ο μέσος χρόνος ζωής μιονίων σε ηρεμία είναι 2.2 μsec. Ένα πείραμα απαιτεί μιόνια με μέσο χρόνο ζωής 11 μsec. Με τι ταχύτητα πρέπει να κινούνται τα μιόνια ώστε να έχουν αυτό το χρόνο ζωής ? Τι απόσταση διανύουν σ' αυτό το χρονικό διάστημα ?

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau \Rightarrow \gamma = \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{11}{2.2} = 5 \Rightarrow \beta = \sqrt{0.96}$$

$$\Delta S = \beta c \Delta t = 0.8 \times 3\, 10^8 \frac{m}{sec} 11\, 10^{-6} sec = 3233\, m$$