Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων, Ειδική Σχετικότητα,

Διάλεξη–5
Οι Μετασχηματισμοί του Lorentz και η Συστολή του μήκους

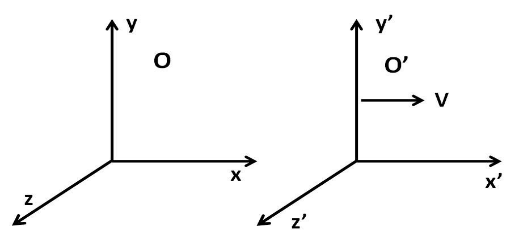
10.11.2011

Σκοποί της πέμπτης διάλεξης:

- Εξοικείωση με τους μετασχηματισμούς του Lorentz και τις διάφορες μορφές που μπορούν να πάρουν για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων.
- Η κατανόηση της συστολής του μήκους σαν επακόλουθο των μετασχηματισμών του Lorentz.

Οι Μετασχηματισμοί του Lorentz:

Στην προηγούμενη διάλεξη είδαμε ότι η απαίτηση να έχει το φως την ίδια ταχύτητα σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς οδήγησε σε συγκεκριμένες σχέσεις, τούς μετασχηματισμούς Lorentz, μεταξύ των χωροχρονικών συντεταγμένων δύο διαφορετικών συστημάτων αναφοράς τα οποία κινούνται μεταξύ τους με σχετική ταχύτητα V (Σχήμα 1):



Σχήμα 1: Δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς Ο και Ο'. Το Ο κινείται με ταχύτητα V σε σχέση με το Ο'. Στο Ο έχουμε ορίσει σύστημα συντεταγμένων (ct, x, y, z) και στο Ο' (ct', x', y', z'). Οι άξονες x-x' έχουν οριστεί να είναι στην διεύθυνση της ταχύτητας V.

Οι μετασχηματισμοί Lorentz που αντιστοιχούν στο Σχήμα 1 είναι:

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \; ; \; x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}(x - Vt) \; ; y' = y ; z' = z$$

Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων, Ειδική Σχετικότητα,

Διάλεξη–5

Όπως βλέπουμε ο χρόνος και η συντεταγμένη κατά την διεύθυνση της ταχύτητας V αλλάζουν γραμμικά ενώ οι συντεταγμένες που είναι κάθετες στην V δεν επηρεάζονται από τον μετασχηματισμό Lorentz. Συνηθίζεται να γράφει κανείς τους μετασχηματισμούς Lorentz σαν συνάρτηση των μεταβλητών β και γ τα οποία ορίζονται ως:

$$\beta = \frac{V}{c} \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Προφανώς το β είναι ένας πραγματικός αριθμός μεταξύ μηδέν και ένα, το δε γ είναι πραγματικός αριθμός από το ένα μέχρι το άπειρο. Έτσι οι μετασχηματισμοί του Lorentz γράφονται:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \qquad \text{(A1)} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Οι ίδιες σχέσεις μπορούν να γραφτούν χρησιμοποιώντας πίνακες σαν μία εξίσωση:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$R_i' = \sum_{j=1}^{j=4} [\Lambda_{ij} \times R_j] \qquad \text{(B1)}$$

όπου

$$R = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad R' = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

είναι τετραδιανύσματα στο χωρόχρονο και ο πίνακας του μετασχηματισμού Lorentz δίνεται από (**Lorentz Boost**):

$$\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς η σχέση (Β1) είναι απλά μια πιο κομψή μορφή των εξισώσεων (Α1).

Ο πίνακας $\Lambda(\beta)$ έχει τις εξής ιδιότητες:

I. Αν η ταχύτητα είναι μηδέν τότε

$$\Lambda(\beta) = \Lambda(0) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου I είναι ο μοναδιακός πίνακας σε τέσσερις διαστάσεις.

II. Έχει ορίζουσα θετική και ίση με

$$det(\Lambda(\beta)) = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = 1$$

Συνεπώς έχει πάντα αντίστροφο $\Lambda^{-1}(\beta)$ πίνακα που ικανοποιεί την σχέση:

$$\Lambda^{-1}(\beta)\Lambda(\beta) = \Lambda(\beta)\Lambda^{-1}(\beta) = I$$

Ο υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού $\Lambda^{-1}(\beta)$ μπορεί να γίνει λύνοντας τις εξισώσεις (Α1) ως προς t, x, y, z. Ένας πιο εύκολος τρόπος είναι ο εξής: Αν θεωρήσουμε ακίνητο παρατηρητή στο σύστημα **O'** τότε το σύστημα **O** φαίνεται σε αυτόν να κινείται με ταχύτητα $-V$ άρα **ο αντίστροφος μετασχηματισμός** δίνεται από την σχέση:

$$\Lambda^{-1}(\beta) = \Lambda(-\beta)$$

Δηλαδή:

$$ct = \gamma(ct' + \beta x')$$
$$x = \gamma(x' + \beta ct') \qquad (\Gamma 1)$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

και οι ίδιες σχέσεις σε μορφή εξίσωσης πινάκων γράφονται:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ταυτόχρονα γεγονότα και οι μετασχηματισμοί του Lorentz:

Μια από τις πρώτες παρατηρήσεις που απορρέουν από τις σχέσεις (Α1) είναι ότι **δυο γεγονότα,** $A=(ct_A, x_A, y_A, z_A)$, $B=(ct_B, x_B, y_B, z_B)$ **τα οποία συμβαίνουν ταυτόχρονα στο σύστημα Ο,** $t_A = t_B$ **δεν είναι αναγκαστικά ταυτόχρονα και στο σύστημα Ο'**.

Πράγματι από τις (Α1) έχουμε ότι:

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) \qquad (1)$$

όπου το σύμβολο **Δ** αναφέρεται στη χωρική ή τη χρονική διαφορά δυο γεγονότων στο χωρόχρονο, δηλαδή $\Delta x = x_A - x_B$ και $\Delta t = t_A - t_B$. Είναι προφανές λοιπόν από την (1) ότι αν δυο γεγονότα στο **Ο** έχουν $\Delta t = 0$ δεν είναι αναγκαίο ότι θα έχουν $\Delta t' = 0$ στο **Ο'**. Γενικά έχουμε ότι:

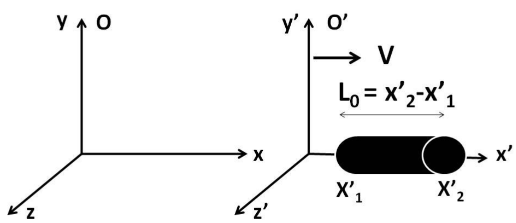
$$c\Delta t' = -\gamma\beta\Delta x$$

Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων, Ειδική Σχετικότητα,

Διάλεξη–5

Η συστολή του μήκους σαν επακόλουθο των μετασχηματισμών του Lorentz:

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ράβδο, όπως φαίνεται στο Σχήμα-2, η οποία κινείται με ταχύτητα V κατά την διεύθυνση του άξονα των x στο αδρανειακό σύστημα **Ο** και ας ορίσουμε το σύστημα **Ο'** το οποίο κινείται και αυτό με την ίδια ταχύτητα V (δηλαδή η ράβδος είναι ακίνητη στο **Ο'**). Παρατηρητής στο σύστημα **Ο'** εφοδιασμένος με χάρακα συγκρίνει τον ακίνητο χάρακα με την ακίνητη ράβδο και βρίσκει ότι όταν η αρχή της ράβδου βρισκόταν μπροστά από την ένδειξη x'_1 του χάρακα, τότε το τέλος της ράβδου ήταν μπροστά στην ένδειξη x'_2 του χάρακα και απ' αυτό συμπεραίνει ότι το μήκος της ράβδου είναι $L_0 = x'_2 - x'_1$. **Το ερώτημα είναι τη μήκος μετρά ο παρατηρητής στο Ο αν έχει και αυτός ένα χάρακα ο οποίος είναι φυσικά ακίνητος στο Ο. Με άλλα λόγια τη μήκος έχει η ράβδος όταν βρίσκεται σε κίνηση σε σχέση με το χάρακα.**



Σχήμα 2: Κινούμενη ράβδος στο σύστημα **Ο** με ταχύτητα V. Στο **Ο'** η ράβδος βρίσκεται σε ηρεμία και έχει μήκος $L_0 = x_2' - x_1'$.

Όταν ράβδος κινείται σε σχέση με το χάρακα, όπως έχουμε δει στην διάλεξη 4, πρέπει κανείς να είναι προσεκτικός. Στην διάλεξη 4 η φωτογραφική μηχανή έδειξε το λάθος μήκος διότι μέτρησε τα δυο άκρα της ράβδου δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Η λύση που δώσαμε εκεί δεν ήταν τίποτα άλλο παρά ν**α βρούμε την θέση των δύο άκρων της ράβδου την ίδια χρονική στιγμή οι οποίες μας έδωσαν το πραγματικό μήκος της ράβδου στο σύστημα του εργαστηρίου**. Απαιτείται λοιπόν ένας γενικός ορισμός της μέτρησης του μήκους που θα περιλαμβάνει και την περίπτωση που η ράβδος κινείται σε σχέση με τον παρατηρητή και τον χάρακα του. Ο ορισμός αυτός είναι: ***Μήκος ονομάζουμε την απόσταση μεταξύ των ενδείξεων x_1 και x_2 ενός χάρακα τα οποία συμπίπτουν <u>ταυτόχρονα</u> με τα άκρα της ράβδου.***

Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων, Ειδική Σχετικότητα,

Διάλεξη–5

Στο σύστημα **O'** το μήκος βάση του παραπάνω ορισμού δεν αλλάζει

$$L_0 = x_2' - x_1'$$

γιατί έτσι και αλλιώς όπως είπαμε

$$t_2' = t_1'$$

αλλά ακόμα και αν η μέτρηση γινόταν σε διαφορετικούς χρόνους δεν θα έκανε διαφορά γιατί ράβδος και χάρακας δεν κινούνται μεταξύ τους. **Το μήκος της ράβδου το οποίο μετράται από παρατηρητή με χάρακα ο οποίος είναι ακίνητος σε σχέση με την ράβδο ονομάζεται ιδιομήκος, L_0.**

Στο σύστημα **O** όμως τα πράγματα είναι διαφορετικά: Ας υποθέσουμε τώρα ότι η μέτρηση γίνεται στο σύστημα **O,** με χάρακα απείρου μήκους ακίνητο στο **O,** ο οποίος είναι τοποθετημένος πάνω στον άξονα των x . Το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι δυο σημεία στο χωρόχρονο (t_1, x_1), (t_2, x_2) όπου $t_2 = t_1$ (σύμφωνα με τον πιο πάνω ορισμό) από τα οποία συμπεραίνουμε ότι

$$L = x_2 - x_1$$

Το ερώτημα είναι πώς σχετίζεται το μήκος αυτό με το L_0 που μέτρησε ο παρατηρητής στο **O'**. Θα χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμούς Lorentz για να συσχετίσουμε τις χωροχρονικές συντεταγμένες της μέτρησης μήκους στο σύστημα **O** με αυτές στο **O'**

$$x_1' = \gamma(x_1 - \beta c t_1) \quad (2)$$

$$x_2' = \gamma(x_2 - \beta c t_2) \quad (3)$$

και από (2) και (3) έχουμε ότι

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) \quad (4)$$

όπου $\Delta x = x_2 - x_1 \quad \Delta x' = x_2' - x_1' \quad \Delta t = t_2 - t_1$

Αφού η μέτρηση γίνεται στο **O,** χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μέτρησης του μήκους, έχουμε ότι:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0 \quad \text{(ταυτόχρονες μετρήσεις)}$$

Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων, Ειδική Σχετικότητα,

Διάλεξη–5

Άρα από την (4) έχουμε

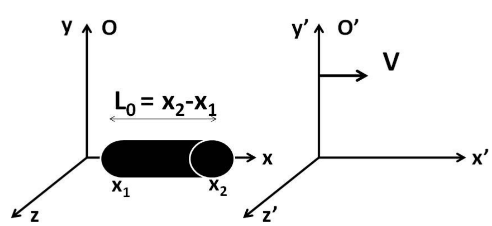
$$\Delta x' = \gamma \Delta x \quad \Rightarrow \quad L_0 = \gamma L \quad \Rightarrow$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

Συνεπώς ακίνητος παρατηρητής μετρά ένα μήκος ράβδου το οποίο είναι μικρότερο από το ιδιομήκος και αυτή είναι πασίγνωστη συστολή μήκους Lorentz-Fitzgerald που προβλέπεται από τούς μετασχηματισμούς του Lorentz.

Πιθανόν ο αναγνώστης να παρατήρησε ότι εάν $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$ τότε σίγουρα έχουμε ότι $\Delta t' = t_2' - t_1' \neq 0$ και τότε, βάση του ορισμού του μήκους, φαίνεται ότι κατ' αρχήν δεν μπορούμε να ορίσουμε το $L_0 = x_2' - x_1'$ σαν το μήκος της ράβδου στο **O'** διότι η μετρήσεις των δύο άκρων, σύμφωνα με τον παρατηρητή στο **O'**, δεν έγιναν ταυτόχρονα. Αυτό που μας δίνει το δικαίωμα να θεωρήσουμε ότι $L_0 = x_2' - x_1'$ είναι το γεγονός ότι η ράβδος είναι ακίνητη σε σχέση με τον χάρακα του παρατηρητή στο **O'** πράγμα πού σημαίνει ότι δεν είναι αναγκαίο η μετρήσεις να γίνουν ταυτόχρονα στο **O'**.

Ας θεωρήσουμε τώρα την ράβδο ακίνητη στο αδρανειακό σύστημα **O,** όπως φαίνεται στο Σχήμα-3, και ας δούμε τι μήκος μετρά ο κινούμενος παρατηρητής στο **O'** το οποίο κινείται με ταχύτητα V στη διεύθυνση του άξονα των x .



Σχήμα 3: Ακίνητη ράβδος στο σύστημα **O** η οποία κινείται με ταχύτητα **-V** στο σύστημα **O'.** Το μήκος της ράβδου στο **O** είναι $L_0 = x_2 - x_1$.

Όπως πριν το ιδιομήκος ορίζεται στο σύστημα οπού η ράβδος είναι ακίνητη ως

$$\Delta x = L_0 = x_2 - x_1$$

και τα άκρα της ράβδου στο σύστημα **O** 'μεταφράζονται' στο σύστημα **O'** μέσω των μετασχηματισμών του Lorentz:

$$x_1 = \gamma(x_1'+\beta c t_1') \qquad x_2 = \gamma(x_2'+\beta c t_2')$$

και από αυτές έχουμε

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + \beta c \Delta t')$$

όπου

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \Delta x' = x_2' - x_1' \quad \Delta t' = t_2' - t_1'$$

Επειδή η μέτρηση μήκους γίνεται στο **O'** έχουμε ότι

$$\Delta t' = 0$$

και όπως πριν

$$\Delta x' = \frac{L_0}{\gamma}$$

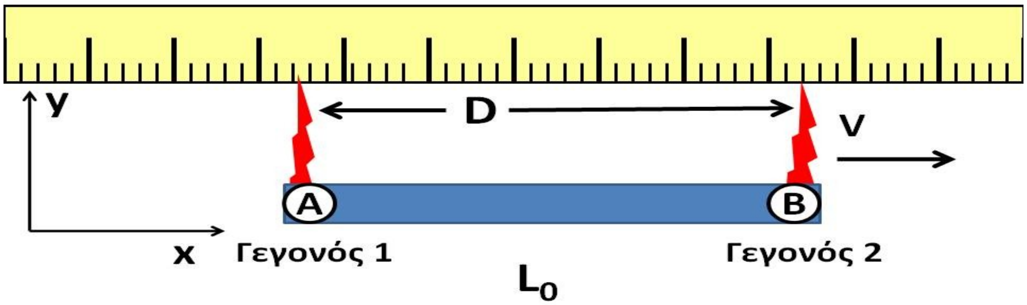
δηλαδή η ράβδος έχει υποστεί συστολή μήκους.

Συνεπώς ανεξάρτητα από την επιλογή του συγκεκριμένου αδρανειακού συστήματος αναφοράς, το μήκος της ράβδου συστέλλεται πάντα όταν μετράται από σύστημα διαφορετικό από το αδρανειακό σύστημα της ράβδου, το οποίο κινείται με ταχύτητα V σε σχέση με την ράβδο.

Για να τονίσουμε την σημασία του ταυτοχρονισμού των δύο μετρήσεων στον καθορισμό του μήκους παραθέτουμε το παρακάτω υποθετικό πείραμα (Gedankenexperiment). Ας θεωρήσουμε πάλι την κινούμενη ράβδο στο σύστημα **O'** το οποίο κινείται με ταχύτητα V σε σχέση με το σύστημα **O** (όπως φαίνεται στο σχήμα-4). Στο σύστημα **O** έχουμε πάλι ένα χάρακα απείρου μήκους στην διεύθυνση του άξονα των x έτσι ώστε η ράβδος κινείται ακριβώς δίπλα από το χάρακα (σχήμα-4). Δύο διατάξεις στα άκρα της ράβδου εκπέμπουν ταυτόχρονα στο σύστημα **O'** δύο σπινθήρες κατά την διεύθυνση του άξονα των y οι οποίοι χτυπούν τον χάρακα και αφήνουν δύο ίχνη σε απόσταση **D** πάνω στο χάρακα. Ο αναγνώστης που περιμένει ότι το **D** είναι το μήκος της ράβδου στο σύστημα **O** που έχει υποστεί συστολή έχει κάνει μεγάλο λάθος. Ας υπολογίσουμε πρώτα το **D** σαν συνάρτηση των V και του ιδιομήκους L_0 :

Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων, Ειδική Σχετικότητα,

Διάλεξη–5



Σχήμα 4: Κινούμενη ράβδος στη διεύθυνση το άξονα των **x** εκπέμπει δύο σπινθήρες από τα άκρα της οι οποίοι αφήνουν δυο ίχνη σε απόσταση **D** πάνω στον ακίνητο χάρακα.

Ας θεωρήσουμε την εκπομπή των δύο σπινθήρων σαν δύο γεγονότα (Γεγονός 1 και Γεγονός 2) όπως στο Σχήμα-4. Η χωρική διαφορά των δύο γεγονότων στο σύστημα Ο σαν συνάρτηση της χωρικής και χρονικής διαφοράς των δύο γεγονότων στο Ο' δίνεται από το μετασχηματισμό Lorentz:

$$D=\Delta x=\gamma(\Delta x'+\beta c \Delta t') \qquad (1)$$

Στο σύστημα **Ο΄** η ράβδος είναι ακίνητη άρα

$$\Delta x'=L_0 \qquad (2)$$

και οι σπινθήρες εκπέμπονται ταυτόχρονα δηλαδή

$$\Delta t'=0 \qquad (3)$$

Συνεπώς από (1) (2) και (3) έχουμε:

$$D=\gamma L_0 \qquad (4)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το **D** είναι μεγαλύτερο από το ιδιομήκος L_0 και όχι μικρότερο όπως μπορεί να περίμενε κανένας. Ο λόγος είναι ότι **το D δεν είναι το μήκος της ράβδου στο Ο διότι οι δύο σπινθήρες φτάνουν στο Ο σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές.** Δηλαδή οι δύο μετρήσεις έλαβαν χώρα σε δυο διαφορετικές χρονικές στιγμές στο **Ο**, άρα δεν ικανοποιούν το κριτήριο του ταυτοχρονισμού για μετρήσεις μήκους, άρα το αποτέλεσμα **D** δεν έχει να κάνει με μήκος και γι' αυτό η (4) δεν έχει τίποτα κοινό με την συστολή του μήκους. Οι δυο σπινθήρες χτυπούν το χάρακα με διαφορά χρόνου που μπορεί να υπολογιστεί πάλι από τους μετασχηματισμούς του Lorentz:

$$c\Delta t = \gamma(c\Delta t'+\beta \Delta x') \Rightarrow \Delta t=\beta\gamma\frac{L_0}{c}$$

Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων, Ειδική Σχετικότητα,

Διάλεξη–5

Ο Χώρος Minkowski και η μετρική του:

Από την προηγούμενη συζήτηση πρέπει να άρχισε να φαίνεται ότι τα τετραδιανύσματα συμπεριφέρονται στον τετραδιάστατο χώρο σαν τα διανύσματα στον τρισδιάστατο χώρο και οι μετασχηματισμοί του Lorentz (Σχήμα-5) θυμίζουν μετασχηματισμούς στροφής στον τρισδιάστατο χώρο. Παραδείγματος χάριν μια στροφή με γωνία ϕ γύρο από τον άξονα των z ορίζεται από το μετασχηματισμό:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{όπου} \quad \vec{r}\,' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Οι μετασχηματισμοί στροφής σε τρεις διαστάσεις αφήνουν το μέτρο των τρισδιάστατων διανυσμάτων (δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων) αναλλοίωτο:

$$|\vec{r}\,'| = \sqrt{\vec{r}\,'\cdot\vec{r}\,'} = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = |\vec{r}| \quad (1)$$

Ας δούμε όμως πρώτα τι εννοούμε ακριβώς όταν μιλάμε για εσωτερικό γινόμενο. Στον τρισδιάστατο χώρο το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ και $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$ ορίζεται ως:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot G_3\cdot b = (a_x, a_y, a_z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

όπου ο πίνακας

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι **η μετρική του τρισδιάστατου ευκλείδειου χώρου.** Η μετρική λοιπόν, περιγράφει τα χαρακτηριστικά του τρισδιάστατου χώρου και συγκεκριμένα μας δίνει τον τρόπο να **λογαριάζουμε αποστάσεις (μετρικός χώρος) που όπως φαίνεται από την (1) υπολογίζονται μέσω του εσωτερικού γινομένου.**

Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων, Ειδική Σχετικότητα,

Διάλεξη–5

Οι αποστάσεις πρέπει να μένουν αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς στροφής, έτσι το εσωτερικό γινόμενο πρέπει να είναι επίσης αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς στροφής και η μετρική $\boldsymbol{G_3}$ εξασφαλίζει ακριβώς αυτό.

Ας πάμε τώρα στον τετραδιάστατο χώρο της ειδικής σχετικότητας. Εδώ έχουμε τα τετραδιανύσματα της μορφής:

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

<u>με μία σημαντική διαφορά ως προς τον τρισδιάστατο χώρο</u>: Οι μετασχηματισμοί του Lorentz αφήνουν, όπως έχουμε ήδη δει, αναλλοίωτη την ποσότητα:

$$(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (2)$$

Αν κανείς συγκρίνει το μέτρο του διανύσματος στο τετράγωνο στην (1) με την (2) θα παρατηρήσει ότι η (2) φαίνεται σαν μέτρο στο τετράγωνο σε 4 διαστάσεις αλλά έχει αρνητικά πρόσημα εκεί που κανείς θα περίμενε να έχει θετικά. Αυτό όπως είδαμε προκύπτει από το γεγονός ότι το φως να έχει την ίδια ταχύτητα **c** σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, γεγονός που οδήγησε στην απαίτηση η ποσότητα της σχέσης (2) να παραμένει αναλλοίωτη στα διάφορα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Προφανώς η φυσική του τετραδιάστατου χώρου απαιτεί διαφορετικό ορισμό εσωτερικού γινομένου γιατί αν κανείς προσπαθήσει να χρησιμοποιήσει 4-διάστατο ευκλείδειο χώρο με μετρική της μορφής

$$\boldsymbol{G_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

θα δει αμέσως ότι δεν οδηγεί στο αναλλοίωτο εσωτερικό γινόμενο της (2) που απαιτεί η δεύτερη αρχή της σχετικότητας του Einstein (Σχήμα-5).

Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων, Ειδική Σχετικότητα,

Διάλεξη–5

Γι' αυτό χρειάζεται μία άλλη μετρική, αυτή του Minkowski (σχήμα-5):

$$g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Η μετρική αυτή ορίζει τον τετραδιάστατο χώρο της ειδικής σχετικότητας τον λεγόμενο χώρο Minkowski. Στο χώρο Minkowski το μέτρο ενός τετραδιανύσματος στο τετράγωνο ορίζεται σαν το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος με τον εαυτό του:

$$R\cdot R = R\cdot g_4 \cdot R = \begin{pmatrix} ct & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

το οποίο είναι αναλλοίωτο κάτω από τους μετασχηματισμούς του Lorentz.

Κατ' επέκταση το εσωτερικό γινόμενο δυο οποιονδήποτε τετραδιανυσμάτων στο χώρο Minkowski παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Σαν παράδειγμα, ας θεωρήσουμε δύο τετραδιανύσματα:

$$k = (ct_{1,} x_{1,} y_{1,} z_1)$$

$$q = (ct_{2,} x_{2,} y_{2,} z_2)$$

τα οποία μπορούν να γραφτούν ως:

$$k = (k_0, k_1, k_2, k_3) \;\; ; \quad k_0 = ct_{1,} \quad k_1 = x_{1,} \quad k_2 = y_{1,} \quad k_3 = z_1$$

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \;\; ; \;\; q_0 = ct_{2,} \;\; q_1 = x_{2,} \;\; q_2 = y_{2,} \;\; q_3 = z_2$$

Θα δείξουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο:

$$k\cdot g_4 \cdot q$$

είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz.

Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων, Ειδική Σχετικότητα,

Διάλεξη–5

Ας αρχίσουμε πρώτα και ας γράψουμε τις εξισώσεις μετασχηματισμού των δύο τετραδιανυσμάτων από το σύστημα **O** στο σύστημα **O'** (σχήμα-1):

$$\begin{pmatrix} k_0' \\ k_1' \\ k_2' \\ k_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(k_0-\beta k_1) \\ \gamma(k_1-\beta k_0) \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q_0' \\ q_1' \\ q_2' \\ q_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(q_0-\beta q_1) \\ \gamma(q_1-\beta q_0) \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Το εσωτερικό γινόμενο στο σύστημα **O'** γράφεται ως:

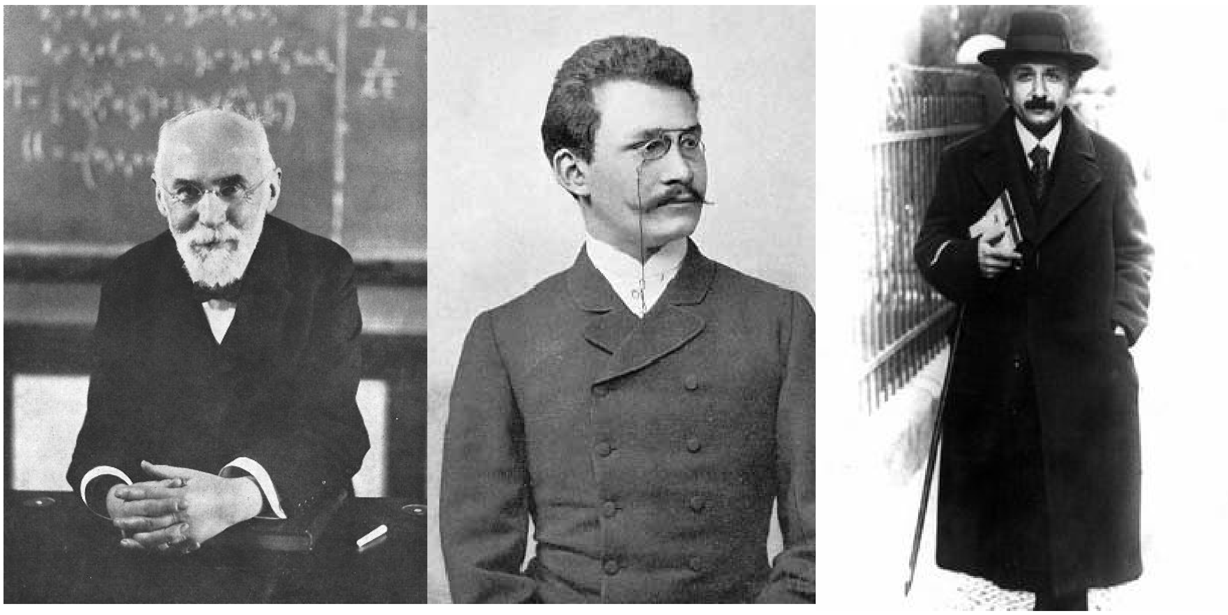
$$k'\cdot g_4\cdot q' = k_0' q_0' - k_1' q_1' - k_2' q_2' - k_3' q_3' \quad \Rightarrow$$

$$k'\cdot g_4\cdot q' = \gamma^2(k_0-\beta k_1)(q_0-\beta q_1) - \gamma^2(k_1-\beta k_0)(q_1-\beta q_0) - k_2 q_2 - k_3 q_3 \; =$$

$$= \; \gamma^2(k_0 q_0 + \beta^2 k_1 q_1 - \beta k_1 q_0 - \beta k_0 q_1) - \gamma^2(k_1 q_1 + \beta^2 k_0 q_0 - \beta k_1 q_0 - \beta k_0 q_1) - k_2 q_2 - k_3 q_3 \; =$$

$$= \; \gamma^2(1-\beta^2) k_0 q_0 + \gamma^2(\beta^2-1) k_1 q_1 - k_2 q_2 - k_3 q_3 \; = \; k_0 q_0 - k_1 q_1 - k_2 q_2 - k_3 q_3 = k\cdot g_4\cdot q$$

Συνεπώς το εσωτερικό γινόμενο δυο οποιονδήποτε τετραδιανυσμάτων παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τους μετασχηματισμούς του Lorentz.



Σχήμα 5: Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), Hermann Minkowski (1864-1909), Albert Einstein (1879-1955).