



## Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–4, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων Η Αρχές της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας και οι μετασχηματισμοί του Lorentz

**25.10.2011**

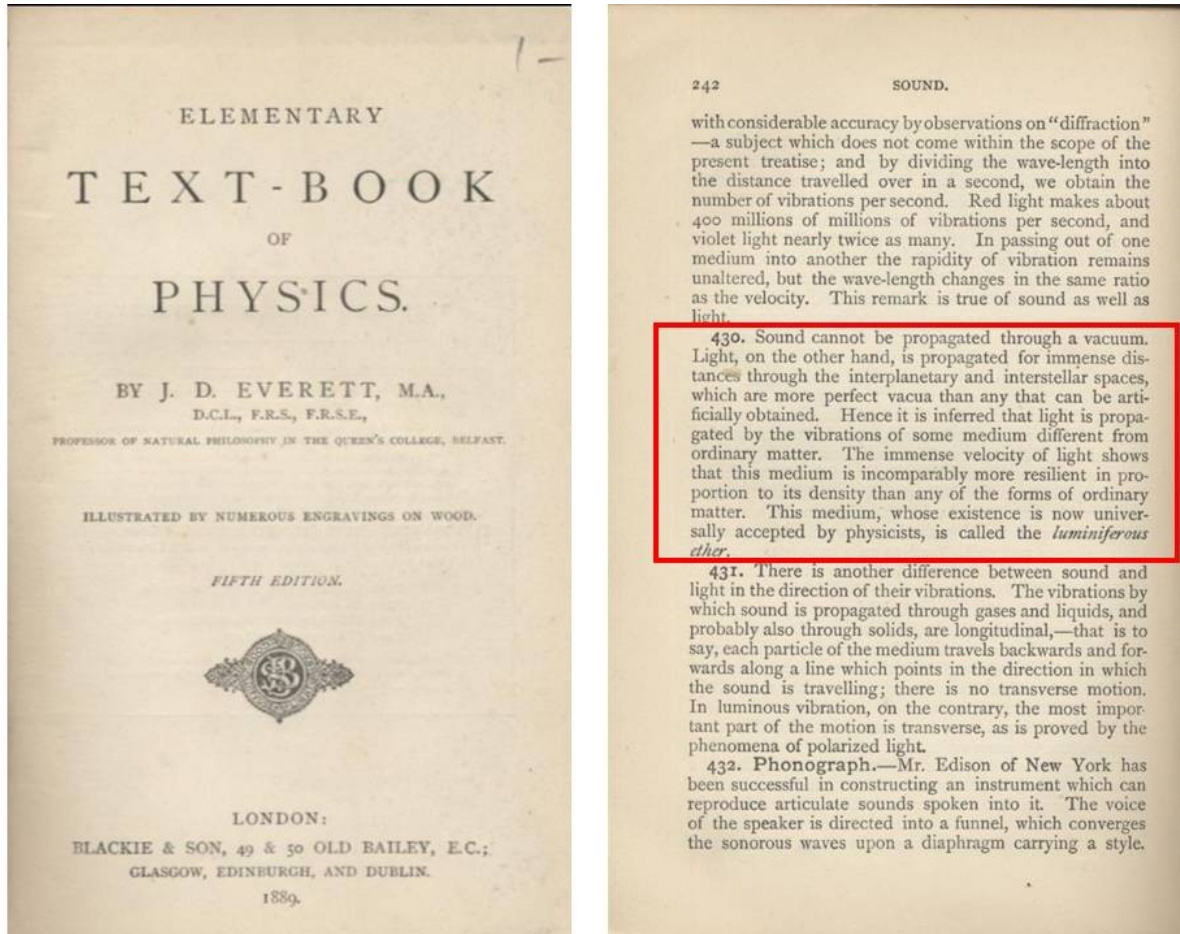
### Σκοποί της τέταρτης διάλεξης:

- Να κατανοηθούν οι αρχές με τις οποίες ο Albert Einstein θεμελίωσε την ειδική θεωρία της σχετικότητας το 1905.
- Να αποδειχτεί ότι από τις αρχές της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας πηγάζουν όλα τα σχετικιστικά φαινόμενα μέσω των μετασχηματισμών του Lorentz.

### Οι αρχές της Ειδικής Σχετικότητας:

Όπως είπαμε στις προηγούμενες διαλέξεις, η Φυσική στα τέλη του 19<sup>ου</sup> αιώνα βρισκόταν σε αδιέξοδο και δε μπορούσε να συμβιβάσει την αρχή της σχετικότητας, την εξίσωση του Newton και τους μετασχηματισμούς του Galileo με τις εξισώσεις του Maxwell. Η μεν εξίσωση του Newton ήταν αναλλοίωτη ως προς τους μετασχηματισμούς του Galileo, πράγμα που σήμαινε ότι η φυσική περιγραφή φαινομένων από την εξίσωση του Newton ήταν η ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς (αρχή της σχετικότητας), οι εξισώσεις του Maxwell όμως δεν ήταν αναλλοίωτες ως προς αυτούς τους και κατ' επέκταση και η εξίσωση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος επίσης δεν ήταν επίσης αναλλοίωτη (Διάλεξη 2). Ετίθετο ως εκ τούτου το ερώτημα για το ποιο είναι το αδρανειακό σύστημα όπου το φως έχει ταχύτητα  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s όπως προβλέπουν οι εξισώσεις του Maxwell? Συμπέραναν λοιπόν ότι έπρεπε να υπάρχει ένα αδρανειακό σύστημα, αυτό του αιθέρα, ο οποίος ήταν το υποθετικό μέσο στο οποίο διαδίδεται το φως, στο οποίο, και μόνο σ' αυτό, το φως έχει ταχύτητα  $c$  (σχήμα 1). Δηλαδή κατέληγαν στο συμπέρασμα ότι για ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα υπήρχε ένα προτιμητέο σύστημα αναφοράς. Σε όλα τα άλλα συστήματα αναφοράς το φως θα είχε ταχύτητα  $c \pm V$ . Με λίγα λόγια κατέληγαν ότι η αρχή της σχετικότητας δεν έπρεπε να ισχύει για τον ηλεκτρομαγνητισμό. Παρ' όλο που αυτό σήμερα ξέρουμε ότι είναι μια λανθασμένη επιλογή, ας δούμε τι επιλογές είχαν τότε βάσει αυτών που γνώριζαν:

## Σύγχρονη Φυσική-1, Διάλεξη-4, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων



**Σχήμα 1:** Πανεπιστημιακό βιβλίο φυσικής στην Αγγλία του 1889 όπου περιγράφεται η θεωρία του αιθέρα (luminiferous ether).

1. Οι εξισώσεις του Maxwell πρέπει να είναι λανθασμένες επειδή δεν είναι αναλλοίωτες κάτω από τους μετασχηματισμούς του Galileo. Δύσκολο να το πιστέψει κανείς ακόμα και τότε καθότι οι εξισώσεις του Maxwell συμφωνούσαν με πληθώρα πειραματικών δεδομένων.
2. Η αρχή της σχετικότητας έπρεπε να μην ισχύει για τα ηλεκτρομαγνητικά συστήματα αλλά μόνο για τα μηχανικά φαινόμενα που περιγράφονται από την εξίσωση του Newton. Ο ηλεκτρομαγνητισμός για κάποιο λόγο απαιτούσε ένα ειδικό σύστημα αναφοράς, αυτό του αιθέρα.
3. Η εξίσωση του Newton και οι μετασχηματισμοί του Galileo είχαν κάποιο λάθος.



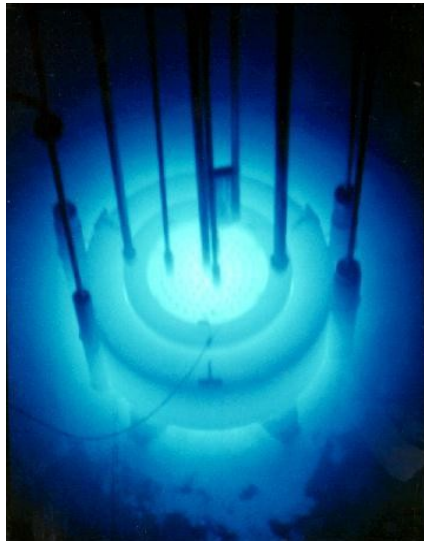
## Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–4, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Η θεωρία του αιθέρα απορρίφτηκε όπως είδαμε από το πείραμα των Michelson-Morley. Ο A. Einstein, ο οποίος δεν ξέρουμε σήμερα να ήξερε τα αποτελέσματα των Michelson-Morley, υπέθεσε ότι οι εξισώσεις του Maxwell και η αρχή της σχετικότητας ήταν σωστές και μάλλον η εξίσωση του Newton και οι μετασχηματισμοί του Galileo είχαν κάποιο λάθος και απαιτούσαν διόρθωση. Έτσι θεμελίωσε τη θεωρία της ειδικής σχετικότητας με τις εξής αρχές:

- Δέχτηκε την αρχή της σχετικότητας: Οι νόμοι της φυσικής παραμένουν αναλλοίωτοι στα διάφορα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Δηλαδή και τα φαινόμενα του ηλεκτρομαγνητισμού και της μηχανικής πρέπει να έχουν τα ίδια αποτελέσματα σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.
- Το φως και όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς ανεξάρτητα από τη σχετική ταχύτητα του συγκεκριμένου συστήματος αναφοράς. Κανένα σωματίδιο ή κύμα δε μπορεί να υπερβεί την ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Όπως είναι γνωστό από την οπτική, το φως διαδίδεται με ταχύτητα  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s μόνο στο κενό. Σε όποιο άλλο μέσο η ταχύτητα του φωτός είναι  $v_m = c/n$  όπου  $n$  είναι μια χαρακτηριστική σταθερά του κάθε μέσου διάδοσης, η οποία ονομάζεται δείκτης διάθλασης. Ο δείκτης διάθλασης είναι πάντα μεγαλύτερος της μονάδας, άρα η ταχύτητα του φωτός στο μέσο αυτό είναι πάντα μικρότερη αυτής του φωτός στο κενό (σε συμφωνία με την δεύτερη αρχή). Σ' αυτή την περίπτωση είναι δυνατόν να έχουμε σωματίδια τα οποία κινούνται με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός στο μέσο αυτό, αλλά όχι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Τα σωματίδια αυτά εκπέμπουν την ακτινοβολία Cerenkov (βλέπε σχήμα 2) η οποία είναι το μπλε φως που παρατηρεί κανείς, όταν κοιτάξει στο κέντρο ενός πυρηνικού αντιδραστήρα (reactor core), ο οποίος βρίσκεται μέσα σε νερό (για λόγους ψύξης και προστασίας).

## Σύγχρονη Φυσική-1, Διάλεξη-4, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων



**Σχήμα 2:** Ακτινοβολία Cerenkov εκπεμπόμενη από το κέντρο πυρηνικού αντιδραστήρα (reactor core) βυθισμένου σε νερό.

Ας δούμε λοιπόν με ένα παράδειγμα ποιές συνέπειες είχαν και τι προέβλεψαν οι αρχές της ειδικής σχετικότητας του A. Einstein.

**Άσκηση 4.1:** Ράβδος μήκους  $L$  κινείται στη διεύθυνση του άξονα των  $x$  με ταχύτητα  $V=0.8c$  σε σχέση με παρατηρητή ο οποίος είναι ακίνητος στο σύστημα αναφοράς  $O$  (πχ. της γης). Βαθμονομημένος χάρακας απείρου μήκους βρίσκεται και αυτός ακίνητος στο σύστημα αναφοράς  $O$ . Η ράβδος κινείται μπροστά από το χάρακα, όπως φαίνεται στο σχήμα 3. Τη χρονική στιγμή μηδέν ακίνητος παρατηρητής με φωτογραφική μηχανή στη θέση μηδέν του χάρακα φωτογραφίζει την κινούμενη ράβδο και στη φωτογραφία φαίνεται το άκρο  $A$  της ράβδου να είναι μπροστά στη θέση που έχει την ένδειξη μηδέν (πάνω στο χάρακα) το δε άκρο  $B$  της ράβδου βρίσκεται μπροστά στη θέση με ένδειξη 90 cm . Υπολογίστε το πραγματικό μήκος της ράβδου  $L$  (αυτό που μετρά παρατηρητής στο σύστημα του εργαστηρίου).

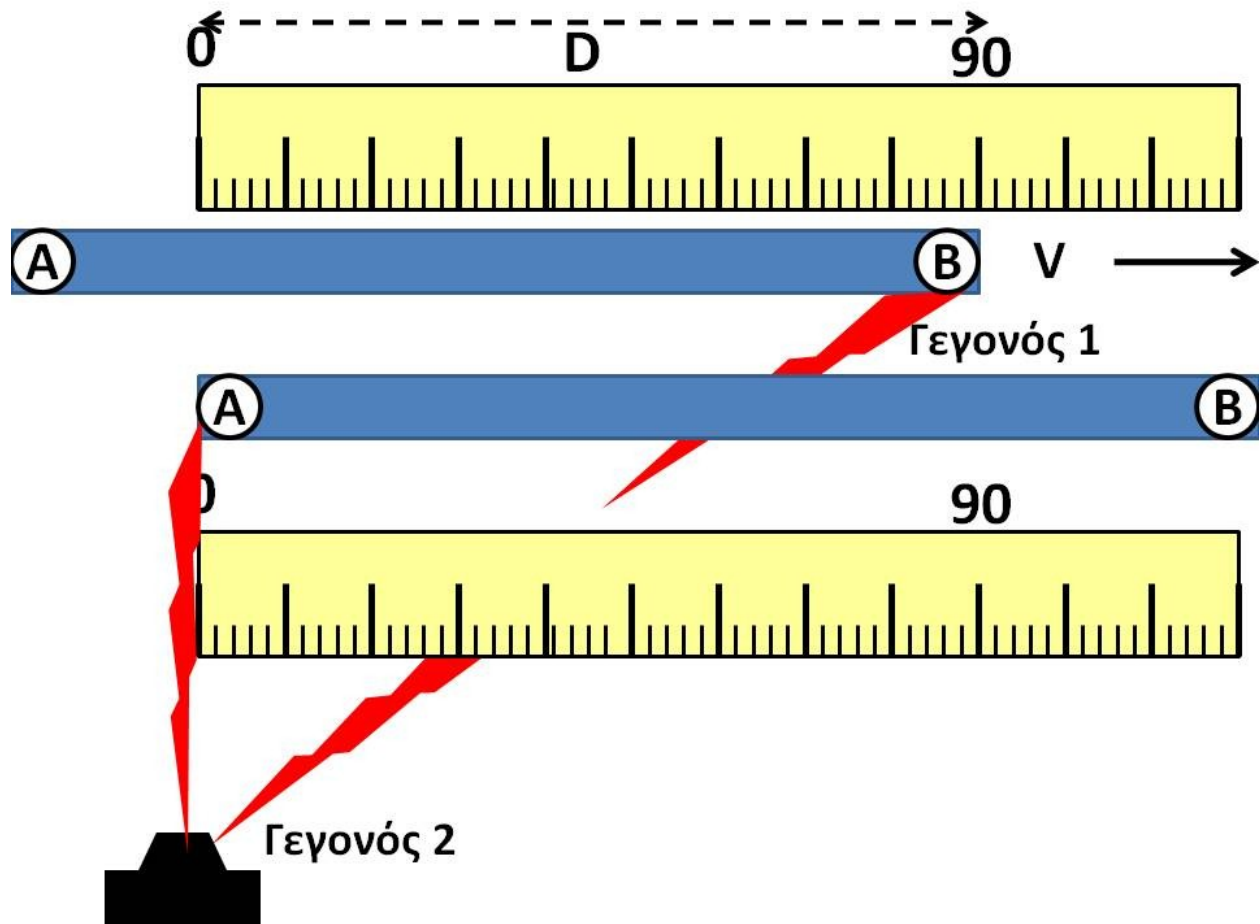
### Λύση:

Προφανώς για να μας λένε να υπολογίσουμε το πραγματικό μήκος της ράβδου η φαινομενικά εύκολη απάντηση (90 cm) είναι μάλλον λάθος. Ας συζητήσουμε λοιπόν πρώτα τι σημαίνει ότι τραβιέται φωτογραφία: Η φωτογραφική μηχανή καταγράφει στο film τα ίχνη από δύο ακτίνες φωτός οι οποίες ξεκινάνε από τα σημεία A, B της ράβδου και καταφθάνουν ταυτόχρονα στη φωτογραφική μηχανή (Γεγονός 2). Η ταχύτητα του φωτός όμως είναι πεπερασμένη και ίση με  $3 \times 10^8$  m/s. Συνεπώς η ακτίνα φωτός η οποία εκπέμπεται από το



## Σύγχρονη Φυσική-1, Διάλεξη-4, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

σημείο B, δηλαδή τη στιγμή που το δεξιό άκρο της ράβδου περνά από το σημείο B '90 cm' του χάρακα (Γεγονός 1) χρειάζεται ένα χρόνο



Σχήμα 3: Η κινούμενη ράβδος της άσκησης 1.

$$\Delta t = \frac{D}{c} = \frac{0.9 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3 \times 10^{-9} \text{ sec} = 3 \text{ nsec}$$

για να φτάσει στο σημείο '0 cm' του χάρακα όπου βρίσκεται η φωτογραφική μηχανή την στιγμή που τραβιέται η φωτογραφία (Γεγονός 2). Δηλαδή η ακτίνα που εκπέμπεται από το B (Γεγονός 1) έχει εκπεμφθεί **3 nsec** πριν τραβηχτεί η φωτογραφία (Γεγονός 2). Στο σύστημα O λοιπόν την στιγμή που εκπέμπεται η ακτίνα από το B το άκρο A δε βρίσκεται στο '0 cm' του χάρακα αλλά σε μία απόσταση



## Σύγχρονη Φυσική-1, Διάλεξη-4, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

$$\Delta l = V \cdot \Delta t = 0.8c \Delta t = 0.8 \cdot 3 \times 10^8 \frac{m}{sec} \cdot 3 \times 10^{-9} sec = 0.72 m$$

πριν από αυτό. Άρα το συνολικό μήκος της ράβδου είναι:

$$L = D + \Delta l = 1.62 m$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το μήκος **D** που φαίνεται στην φωτογραφία δεν αντιπροσωπεύει το πραγματικό μήκος της ράβδου. Ένα επιπλέον σημαντικό σημείο που θα πρέπει να αποκομίσουν οι φοιτητές είναι ότι ο παρατηρητής στο **O** βλέπει/φωτογραφίζει ένα μήκος **D** το οποίο είναι μικρότερο από το 'πραγματικό' μήκος της ράβδου **L** στο σύστημα του εργαστηρίου. Παρ' όλα αυτά, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, ούτε το **L** είναι το 'πραγματικό' μήκος της ράβδου. Με τον ορισμό 'πραγματικό' μήκος της ράβδου εννοούμε το μήκος **L<sub>0</sub>** (η **αλλιώς ιδιομήκος**) που θα έβλεπε ένας παρατηρητής ο οποίος είναι ακίνητος στο σύστημα της ράβδου και το οποίο είναι ακόμη μεγαλύτερο από το **L**.

### Οι Μετασχηματισμοί του Lorentz:

Στην παράγραφο αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της σχετικότητας που λέει ότι το φως έχει την ίδια ταχύτητα **c** σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς για να δούμε αν υπάρχουν μετασχηματισμοί του χωροχρόνου που είναι συμβατοί με την αρχή αυτή. Προφανώς οι μετασχηματισμοί αυτοί πρέπει να είναι διαφορετικοί από τους μετασχηματισμούς του Galileo οι οποίοι ξέρουμε ότι προβλέπουν πως το φως έχει διαφορετική ταχύτητα στα διάφορα αδρανειακά συστήματα και συνεπώς δεν είναι συμβατοί με την αρχή αυτή.

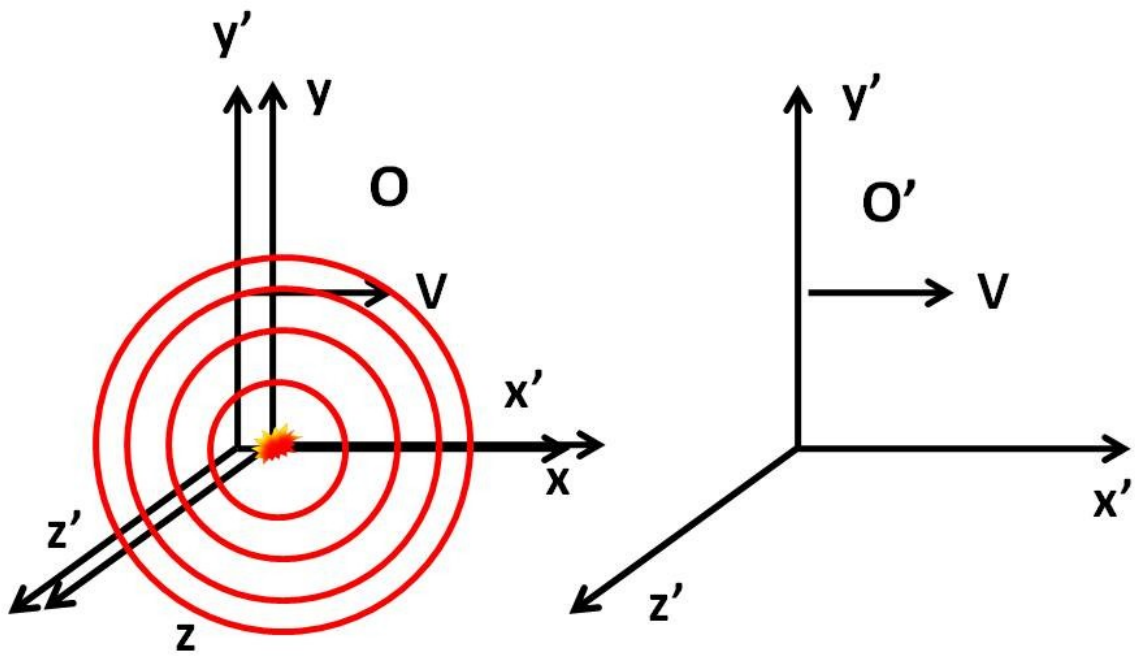
Ας θεωρήσουμε δύο συστήματα αναφοράς το **O** και το **O'** που κινείται με ταχύτητα **V** σε σχέση με το **O**, όπως φαίνεται στο σχήμα 4. Ας υποθέσουμε επίσης ότι στο κέντρο του **O** βρίσκεται φωτεινή πηγή η οποία εκπέμπει ένα σφαιρικό κύμα φωτός. Η εξίσωση που περιγράφει την ισοφασική επιφάνεια του κύματος το οποίο παρατηρεί ένας παρατηρητής στο σύστημα αναφοράς **O**, δεν είναι άλλη από αυτή της σφαίρας με ακτίνα **R = ct**:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \quad (A)$$



## Σύγχρονη Φυσική-1, Διάλεξη-4, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Με δεδομένο ότι το φως έχει την ίδια ταχύτητα σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς συμπεραίνουμε ότι και ένας παρατηρητής στο σύστημα  $O'$ , τη στιγμή που αυτό περνά από το  $O$  και τα κέντρα τους συμπίπτουν, μετρά στο σύστημα του και αυτός ένα σφαιρικό κύμα φωτός του οποίου η ισοφασική επιφάνεια περιγράφεται από την εξίσωση:



$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = (ct')^2 \quad (B)$$

**Σχήμα 4:** Σφαιρικό κύμα φωτός στο σύστημα  $O$  φαίνεται επίσης σφαιρικό στο σύστημα  $O'$  το οποίο κινείται με ταχύτητα  $V$  στην θετική κατεύθυνση του άξονα των  $x$ .

Το ερώτημα λοιπόν είναι αν υπάρχει μετασχηματισμός του χώρο-χρόνου που αφήνει την εξίσωση (A) αναλλοίωτη, δηλαδή τη μετασχηματίζει στη (B). Θα δοκιμάσουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό συντεταγμένων:



## Σύγχρονη Φυσική-1, Διάλεξη-4, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

$$x' = \alpha x + \epsilon t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \delta x + \eta t \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας την (1) στη (B) και απαιτώντας να καταλήξουμε στην (A) αναζητούμε τις τιμές για τα  $\alpha, \epsilon, \delta, \eta$ . Αν βρούμε ότι τα  $\alpha, \epsilon, \delta, \eta$  είναι πραγματικές συναρτήσεις των δυο σταθερών του προβλήματος  $V, c$ , τότε θα έχουμε επιτύχει τον σκοπό μας. Αν όχι, τότε η αρχή της σχετικότητας πρέπει να απορριφτεί.

Παρ' όλα αυτά, εκτός από την αρχή της σχετικότητας, υπάρχει και μια ακόμη αρχική υπόθεση που έχουμε κάνει, όταν γράψαμε την (1). Έχουμε υποθέσει ότι ο χωροχρόνος είναι ομοιογενής, δηλαδή ότι μία μικρή αλλαγή στο  $t$  ή το  $x$  έχει το ίδιο αποτέλεσμα στο  $t'$  ή το  $x'$  οπουδήποτε στο χωροχρόνο. Αυτό εκφράζεται μαθηματικά με τις σχέσεις:

$$dx' = f_x dx + f_t dt$$

$$dt' = g_x dx + g_t dt$$

όταν τα  $f_x, f_t$  και  $g_x, g_t$  είναι σταθερές ανεξάρτητες του  $t$  ή του  $x$ . Δηλαδή η ομοιογένεια του χωροχρόνου απαιτεί ο απειροστός αυτός μετασχηματισμός να είναι **γραμμικός** (όχι  $f_x, f_t, g_x, g_t$  που είναι συναρτήσεις του χωροχρόνου και όχι δυνάμεις των  $t$  ή  $x$  μεγαλύτερες της μονάδας). Χωρίς την απαίτηση της γραμμικότητας, οι τροχιές σωματίων που κινούνται με σταθερή ταχύτητα σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αποκτούν (μέσω του μη γραμμικού μετασχηματισμού) επιτάχυνση σε άλλα συστήματα αναφοράς και συνεπώς δεν συζητάμε πια για αδρανειακά συστήματα αναφοράς και φυσικά δεν ισχύει η αρχή της σχετικότητας.

Ας δούμε λοιπόν πώς μπορεί κανείς να λογαριάσει τις σταθερές  $\alpha, \delta, \epsilon, \eta$ :

Επειδή ο μετασχηματισμός (1) είναι ένας γενικός μετασχηματισμός συντεταγμένων από το  $O$  στο  $O'$ , θα πρέπει να ισχύει για κάθε σημείο του χωροχρόνου και όχι μόνο για το συγκεκριμένο κύμα φωτός. Για παράδειγμα, το κέντρο του  $O'$  που έχει

$$x' = 0$$

κινείται με ταχύτητα  $V$  σε σχέση με το  $O$ . Άρα από την (1) έχουμε ότι:

$$\frac{x}{t} = -\frac{\epsilon}{\alpha} = V \quad (3)$$





## Σύγχρονη Φυσική-1, Διάλεξη-4, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Για τον ίδιο λόγο το κέντρο του  $\mathbf{O}$  με συντεταγμένη

$$x=0$$

κινείται με ταχύτητα  $-V$  σε σχέση με το  $\mathbf{O}'$  και πάλι από την (1) έχουμε ότι:

$$\frac{x'}{t'} = \frac{\epsilon}{\eta} = -V \quad (4)$$

Συνεπώς από (3) και (4) έχουμε:

$$\alpha = \eta \quad (5)$$

Έτσι η (1) λόγω της (5) γράφεται:

$$x' = \alpha x + \epsilon t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \delta x + \alpha t \quad (\Gamma)$$

Γυρίζοντας πάλι στην εξίσωση του σφαιρικού κύματος και αντικαθιστώντας το μετασχηματισμό (Γ) στη (B) έχουμε:

$$(\alpha x + \epsilon t)^2 + y^2 + z^2 = c^2(\delta x + \alpha t)^2 \quad (6)$$

Αν όντως ο μετασχηματισμός (Γ) αφήνει την εξίσωση του σφαιρικού κύματος αναλλοίωτη τότε η εξίσωση (6) θα πρέπει να είναι ίδια με την

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$

Άρα

$$\alpha^2 - \delta^2 c^2 = 1 \quad (6)$$

$$2\alpha\epsilon = 2\delta\alpha c^2 \Rightarrow \epsilon = \delta c^2 \quad (7)$$

$$-\epsilon^2 + \alpha^2 c^2 = c^2 \quad (8)$$

Όμως από την (3) και την (8) μπορούμε να υπολογίσουμε το  $\alpha$

$$-(\alpha^2 V^2) + \alpha^2 c^2 = c^2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (9)$$



## Σύγχρονη Φυσική-1, Διάλεξη-4, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

και από την (3) και (9) υπολογίζουμε το  $\epsilon$

$$\epsilon = \frac{-V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (10)$$

Τέλος το  $\delta$  υπολογίζεται από την (7) και τη (10)

$$\delta = \frac{-V}{c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Συνοψίζοντας, βρήκαμε το μετασχηματισμό που μετασχηματίζει τις συντεταγμένες του συστήματος  $\mathbf{O}$  στο  $\mathbf{O}'$  και ταυτόχρονα είναι συμβατός με την αρχή του Einstein, που λέει ότι το φως έχει την ίδια ταχύτητα  $c$  σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς ανεξάρτητα από τη σχετική ταχύτητα με την οποία κινούνται το ένα σε σχέση με το άλλο. Ο μετασχηματισμός αυτός είναι ο μετασχηματισμός του Lorentz και δίνεται από τις

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left( t - \frac{V}{c^2} x \right)$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} (x - Vt)$$

θεωρώντας ότι τα  $\mathbf{O}$  και  $\mathbf{O}'$  συμπίπτουν για  $t = t' = 0$ .