Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων Σύγχρονη Φυσική–1,

Διάλεξη–2
Η Κυματική Εξίσωση του Φωτός και οι Μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου

18.10.2011

Σκοπός της δεύτερης διάλεξης:

- Να αποδείξει ότι η κυματική εξίσωση τού φωτός, οι οποία προέρχεται από τις εξισώσεις του Maxwell στο κενό, δεν είναι αναλλοίωτη ως προς τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.

Η κυματική εξίσωση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος:

Από τις εξισώσεις του Maxwell στο κενό (μηδενική πυκνότητα φορτίου και έντασης), μπορεί κανείς να δείξει ότι το ηλεκτρικό πεδίο, $\vec{E}(\vec{r},t)$, όπως και το μαγνητικό πεδίο, $\vec{B}(\vec{r},t)$, ικανοποιούν την εξίσωση του κύματος.

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2\vec{E}}{dt^2}-\nabla^2\vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2\vec{B}}{dt^2}-\nabla^2\vec{B} = 0 \quad (2)$$

όπου η ταχύτητα του φωτός συμβολίζεται με c **.** Οι λύσεις των (1) και (2) δίδονται από τις σχέσεις:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0[A\cos(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega\cdot t) + B\sin(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega\cdot t)] \quad (3)$$

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{B}_0[C\cos(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega\cdot t) + D\sin(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega\cdot t)] \quad (4)$$

Η σταθερά $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{k}$ είναι ο κυματικός αριθμός όπου λ είναι το μήκος κύματος, $\hat{k}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την διεύθυνση διάδοσης του κύματος και η σταθερά $\omega = 2\pi f$ είναι η γωνιακή συχνότητα όπου f είναι η συχνότητα. Οι σταθερές **A, B, C, D** μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες ενός συγκεκριμένου προβλήματος.

Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–2

Για λόγους απλότητας και χωρίς να περιορίζουμε την γενικότητα του προβλήματος θα υποθέσουμε ότι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\cdot t) \qquad (5)$$

και θα αποδείξουμε ότι η (5) είναι πράγματι λύση της κυματικής εξίσωσης (1). Το πρώτο βήμα είναι να υπολογίσουμε τις παραγώγους της (1) χρησιμοποιώντας την (5). Έτσι έχομε για την χρονική παράγωγο:

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \omega \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\cdot t) \Rightarrow \frac{d^2\vec{E}}{dt^2} = -\omega^2 \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\cdot t) \quad (6)$$

και για την χωρική παράγωγο ως προς το x :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -k_x \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\cdot t) \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k_x^2 \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\cdot t) \quad (7)$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να λογαριάσουμε τι παραγώγους ως προς το y και z :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} = -k_y^2 \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\cdot t) \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -k_z^2 \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\cdot t) \quad (9)$$

Συνεπώς από (7), (8), (9) έχομε:

$$\nabla^2 \vec{E} = -\vec{k}^2 \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\cdot t) \qquad (10)$$

Τέλος αντικαθιστώντας τις (6) και (10) στην (1) έχομε:

$$-\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\cdot t) + \vec{k}^2 \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\cdot t) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2 = 0 \Rightarrow -\frac{(2\pi f)^2}{c^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = 0 \Rightarrow c = \lambda\cdot f$$

Άρα όντως η (5) παριστάνει κύμα κινούμενο στην διεύθυνση $\hat{k}$ με την ταχύτητα του φωτός c .

Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων Σύγχρονη Φυσική–1,

Διάλεξη–2

Μετασχηματισμός της Κυματικής Εξίσωσης του Ηλεκτρομαγνητικού Κύματος με τούς μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου

Εδώ θα αποδείξουμε ότι η κυματική εξίσωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δεν παραμένει αναλλοίωτη ως προς τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου. Για λόγους απλότητας θα χρησιμοποιήσουμε ένα βαθμωτό πεδίο αντί για διανυσματικό. Έστω λοιπόν η κυματική εξίσωση ενός βαθμού πεδίου $\phi(x, y, z, t)$ το οποίο ορίζεται στο αδρανειακό σύστημα O:

$$\nabla_{\vec{x}}^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Ακολούθως χρησιμοποιούμε τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου για να 'μεταφράσουμε' την (1) σε συντεταγμένες x', y', z', t' ενός αδρανειακού συστήματος O', το οποίο κινείται με ταχύτητα V στη διεύθυνση του άξονα χ. Οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου που σχετίζουν τις συντεταγμένες των δυο συστημάτων αναφοράς είναι:

$$x' = x - Vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Το βαθμωτό πεδίο παραμένει αναλλοίωτο και μόνο οι συντεταγμένες αλλάζουν (διότι αντιπροσωπεύει ένα μέγεθος σε ένα σημείο του χωρόχρονου):

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi(x'+Vt, y', z', t') = \Phi'(x', y', z', t')$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τις χωρικές παραγώγους:

$$\frac{\partial \phi(x,y,z,t)}{\partial x} = \frac{\partial \phi'(x',y',z',t')}{\partial x} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \phi(x,y,z,t)}{\partial x} = \frac{\partial \phi'(x',y',z',t')}{\partial x'} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} .$$

Η δεύτερη παράγωγος υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο:

$$\frac{\partial^2 \phi(x,y,z,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2} \quad (2)$$

και ομοίως

$$\frac{\partial^2 \phi(x,y,z,t)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y'^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x,y,z,t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi'}{\partial z'^2} \quad (4)$$

Από τις (2), (3) , (4) συνεπάγεται ότι:

$$\nabla^2_{\vec{x}} \phi(x,y,z,t) = \nabla^2_{\vec{x}'} \phi' \quad (5)$$

Οι παράγωγοι ως προς το χρόνο (από το άλλο μέρος της (1)) υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο:

$$\frac{\partial \phi(x,y,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial \phi'(x',y',z',t')}{\partial t} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial \phi'}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} =$$

$$= -V \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial x'} + \frac{\partial \phi'}{\partial t'} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x,y,z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi'(x',y',z',t')}{\partial t^2} = V^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2} - V \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x' \partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x' \partial t'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t'^2} =$$

$$= V^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2} - 2\mathrm{V} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x' \partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t'^2} \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας της (5) και (6) στην (1) βρίσκουμε:

$$\nabla^2_{\vec{x}'} \phi'(x',y',z',t') = \frac{1}{c^2} [V^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2} - 2\mathrm{V} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x' \partial t'}] \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t'^2}$$

Η εξίσωση αυτή δεν είναι ίδια με την (1) λόγω του πρώτου όρου στα δεξιά της ισότητας. Άρα η εξίσωση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου. **Συνεπώς δύο πράγματα μπορεί να συμβαίνουν: Ή οι εξισώσεις του** Maxwell **είναι λάθος ή οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου δεν ισχύουν στον ηλεκτρομαγνητισμό.**