Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–11, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Επιλεγμένες εφαρμογές της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας

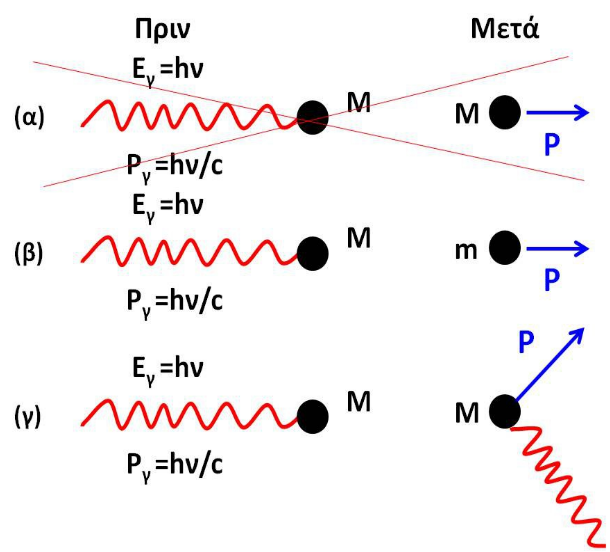
08/11/12

Σκοπός της ενδέκατης διάλεξης:

- Η παρουσίαση εφαρμογών της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας σε φαινόμενα τα οποία παρατηρούνται στο εργαστήριο.

Απορρόφηση Φωτονίων από άτομα:

Ας υποθέσουμε ότι ένα φωτόνιο με ενέργεια $E_\gamma = h\nu$ και ορμή $P_\gamma = h\nu/c$ συγκρούεται με ακίνητο άτομο αρχικής μάζας ηρεμίας **M**. Στο Σχήμα 1 εξετάζονται τρία πιθανά σενάρια για το τι μπορεί να συμβεί. Στην περίπτωση (α) το άτομο απορροφά το φωτόνιο του οποίου η ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του ατόμου ενώ η μάζα ηρεμίας του ατόμου παραμένει ίση με **M** και μετά από την απορρόφηση του φωτονίου. Θα αποδείξουμε ότι η περίπτωση αυτή απαγορεύεται από την θεωρία της σχετικότητας και έτσι δεν παρατηρείται στο εργαστήριο.



Σχήμα 1: Σύγκρουση φωτονίου με άτομο μάζας Μ.

Αν η περίπτωση (α) συνέβαινε τότε θα είχαμε από διατήρηση ενέργειας και ορμής ότι

$$h\nu + Mc^2 = M\gamma c^2 \qquad (1)$$

$$\frac{h\nu}{c} = M\gamma\beta c \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι

$$\gamma\beta + 1 = \gamma \Rightarrow 2\beta\gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

Αν όμως το $\beta = 0$ τότε η (1) συνεπάγεται ότι $h\nu = 0$ το οποίο είναι άτοπο καθ' ότι το φωτόνιο έχει ενέργεια.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–11, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Στην περίπτωση (β) ένα μέρος της ενέργειας του φωτονίου μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια και το υπόλοιπο απορροφάται από το άτομο του οποίου η ενέργεια σύνδεσης αλλάζει. Η ολική μάζα ενός ατόμου δίνεται από το άθροισμα των μαζών των σωματιδίων από τα οποία αποτελείται (πρωτόνια, νετρόνια, ηλεκτρόνια) συν την ποσότητα E_b/c^2 , όπου E_b είναι η ενέργεια σύνδεσης η οποία είναι αρνητική (αλλιώς δε θα υπήρχαν άτομα). Αλλαγή της ενέργειας σύνδεσης σημαίνει αλλαγή της ολικής μάζας του ατόμου. Έτσι ενώ το αρχικό άτομο είχε μάζα **M**, το τελικό έχει μάζα μεγαλύτερη και ίση με **m**.

Θα υπολογίσουμε τώρα την ταχύτητα του ατόμου μετά την σύγκρουση. Διατήρηση ενέργειας και ορμής δίνουν

$$E_\gamma + Mc^2 = m\gamma c^2 \quad \Rightarrow \quad h\nu + Mc^2 = m\gamma c^2 \qquad (3)$$

$$\frac{h\nu}{c} + 0 = m\gamma\beta c \quad \Rightarrow \quad h\nu = m\gamma\beta c^2 \qquad (4)$$

Διαιρώντας την (4) με την (3) έχουμε ότι

$$\beta = \frac{h\nu}{h\nu + Mc^2} \approx \frac{h\nu}{Mc^2} - \left(\frac{h\nu}{Mc^2}\right)^2 + ... = \frac{h\nu}{Mc^2} + O\left(\left(\frac{h\nu}{Mc^2}\right)^2\right) \qquad (A)$$

δηλαδή την ταχύτητα με την οποία κινείται το τελικό άτομο. Στην περίπτωση όπου $h\nu \ll Mc^2$ τότε όροι της τάξης του $\left(h\nu/Mc^2\right)^2$ μπορούν να αγνοηθούν ως αμελητέοι (π. χ. όταν ορατό φως προσπίπτει σε ένα άτομο) και έχουμε ότι

$$\beta \approx \frac{h\nu}{Mc^2} \qquad (B)$$

Θα συνεχίσουμε με τον υπολογισμό της μάζας m του τελικού ατόμου.

$$(h\nu)^2 + (Mc^2)^2 + 2h\nu Mc^2 = m^2\gamma^2c^4 \quad \Rightarrow$$

$$(m\gamma\beta c^2)^2 + (Mc^2)^2 + 2h\nu Mc^2 = m^2\gamma^2c^4 \quad \Rightarrow$$

$$(Mc^2)^2 + 2h\nu Mc^2 = m^2\gamma^2c^4(1-\beta^2) \quad \Rightarrow$$

$$m^2 = M^2 + 2h\nu\frac{M}{c^2} \quad \Rightarrow$$

$$m = M\sqrt{1 + \frac{2h\nu}{Mc^2}} \qquad (5)$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–11, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Ας δούμε τι ακριβώς μας λέει η (5) στην περίπτωση όπου $h\nu \ll Mc^2$. Από την (5) χρησιμοποιώντας την γνωστή διωνυμική σχέση

$$(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2$$

έχουμε ότι

$$m = M + \frac{h\nu}{c^2} - \frac{1}{2}M\left(\frac{h\nu}{Mc^2}\right)^2$$

Χρησιμοποιώντας την (Β) έχουμε ότι

$$m = M + \frac{h\nu}{c^2} - \frac{1}{2}M\beta^2 \Rightarrow$$

$$mc^2 = Mc^2 + h\nu - \frac{1}{2}M\beta^2c^2$$

Δηλαδή **η μάζα ηρεμίας του ατόμου αυξάνει κατά ένα ποσό ίσο με την μάζα του φωτονίου μείον ένα ποσό το οποίο καταναλώνεται σαν κινητική ενέργεια του τελικού ατόμου**.

Όπως θα μάθουμε αργότερα, σύμφωνα με την κβαντική θεωρία απορρόφηση ενέργειας από ένα άτομο λαμβάνει χώρα μόνο για διακριτές τιμές της απορροφούμενης ενέργειας. Κάθε άτομο ή πυρήνας έχει ένα φάσμα διακριτών τιμών ΔE_i και η κάθε μία από αυτές έχει ένα εύρος Γ_i (width). Σε γενικές γραμμές, αν η προσπίπτουσα ενέργεια είναι ίση με $\Delta E_i \pm \Gamma_i/2$ τότε απορροφάται. Στο αδρανειακό σύστημα του ατόμου το οποίο απορροφά το φωτόνιο η τιμή αυτή είναι $\Delta E = mc^2 - Mc^2$. Προφανώς στο σύστημα του εργαστηρίου το φωτόνιο πρέπει να έχει λίγο μεγαλύτερη ενέργεια έτσι ώστε να αποδώσει ενέργεια $\Delta E + \frac{1}{2}M\beta^2c^2$ στο άτομο η οποία είναι το άθροισμα της ενέργειας που απαιτείται για την απορρόφηση συν ένα ακόμα ποσό που μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του τελικού ατόμου.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–11, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Έτσι η πιο πάνω σχέση γράφεται

$$m c^2 = M c^2 + h\nu - \frac{1}{2} M c^2 \left(\frac{h\nu}{M c^2}\right)^2 \Rightarrow \Delta E = h\nu - \frac{1}{2} M c^2 \left(\frac{h\nu}{M c^2}\right)^2 \qquad (6)$$

Αν λύσουμε αυτή την δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς $\frac{h\nu}{M c^2}$ θα δούμε ότι στην προσέγγιση όπου ενδιαφερόμαστε μόνο για ακρίβεια της τάξης του $\left(\frac{h\nu}{M c^2}\right)^2$ τότε $\Delta E \approx h\nu$. Αντικαθιστώντας λοιπόν στην (6) έχουμε ότι

$$\Delta E = h\nu - \frac{(\Delta E)^2}{2 M c^2} \Rightarrow$$

$$h\nu = \Delta E \left(1 + \frac{\Delta E}{2 M c^2}\right)$$

Δηλαδή για να απορροφηθεί το φωτόνιο θα πρέπει να έχει ενέργεια η οποία είναι περίπου $\frac{\Delta E}{2 M c^2}$ μεγαλύτερη της διαφοράς της μάζας του ατόμου.

Η περίπτωση (γ) του Σχήματος 1 είναι επιτρεπτή και είναι το φαινόμενο Compton το οποίο θα εξετάσουμε αργότερα.

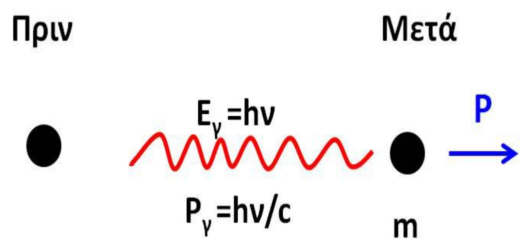
Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–11, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Εκπομπή Φωτονίων από άτομα

Θα μελετήσουμε εδώ την εκπομπή φωτονίου από άτομο μάζας **M.** Θα υποθέσουμε ότι το άτομο βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία και **θα υπολογίσουμε την ενέργεια του φωτονίου**. Σύμφωνα με την προηγούμενη συζήτηση, η εκπομπή του φωτονίου αλλάζει την ενέργεια σύνδεσης του ατόμου και αυτό έχει σαν συνέπεια την αλλαγή της μάζας του. Έτσι η τελική μάζα του ατόμου είναι **m**. O αναγνώστης μπορεί εύκολα να αποδείξει χρησιμοποιώντας διατήρηση σχετικιστικής ορμής και ενέργειας ότι είναι αδύνατο αν άτομο να εκπέμψει φωτόνιο χωρίς να αλλάξει η μάζα ηρεμίας του. Επίσης για να διατηρηθεί η ορμή είναι αναγκαίο το άτομο να υποστεί ανάκρουση (recoil) μετά την εκπομπή του φωτονίου. Η διαδικασία εκπομπής φαίνεται στο Σχήμα 2. Έτσι από διατήρηση ενέργειας και ορμής έχουμε ότι

$$Mc^2 = E + E_\gamma \qquad (1)$$

$$0 = P - \frac{E_\gamma}{c} \qquad (2)$$



Σχήμα 2: Εκπομπή φωτονίου από άτομο μάζας M.

Από (1) και (2) έχουμε ότι

$$(Mc^2 - E_\gamma)^2 = E^2 \Rightarrow M^2c^4 + E_\gamma{}^2 - 2E_\gamma Mc^2 = (Pc)^2 + m^2c^4 \Rightarrow$$

$$M^2c^4 - 2E_\gamma Mc^2 = m^2c^4 \Rightarrow E_\gamma = \frac{M^2c^2 - m^2c^2}{2\mathrm{M}} = \frac{(Mc - mc)(Mc + mc)c^2}{2\mathrm{Mc}^2} \Rightarrow$$

$$E_\gamma = \frac{(Mc^2 - mc^2)(Mc^2 + mc^2)}{2\mathrm{Mc}^2} \qquad (3)$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–11, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Έστω η αλλαγή ενέργειας το ατόμου $\Delta E = Mc^2 - mc^2$. Θα περίμενε κανένας η διαφορά αυτή να είναι ίση με την ενέργεια του φωτονίου. **Όπως θα δούμε η ενέργεια του φωτονίου είναι λίγο μικρότερη επειδή μέρος της ενέργειας ΔE καταναλώνεται σαν κινητική ενέργεια του τελικού ατόμου το οποίο υπόκειται ανάκρουση.** Έτσι από την (3) έχουμε

$$E_\gamma = \frac{\Delta E(Mc^2+mc^2)}{2\mathrm{Mc}^2} = \frac{\Delta E(Mc^2+Mc^2-\Delta E)}{2\mathrm{Mc}^2} = \frac{\Delta E(2Mc^2-\Delta E)}{2\mathrm{Mc}^2} \Rightarrow$$

$$E_\gamma = \Delta E\left(1-\frac{\Delta E}{2\mathrm{Mc}^2}\right)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το εκπεμπόμενο φωτόνιο έχει ενέργεια η οποία είναι μικρότερη από τη διαφορά ενέργειας του ατόμου και σύμφωνα με την κβαντική θεωρία, όπως θα συζητήσουμε αργότερα, δεν μπορεί να απορροφηθεί από άτομα του ιδίου υλικού. Προφανώς το φαινόμενο αυτό γίνεται σημαντικό όταν η διαφορά ενέργειας ΔE είναι μεγάλη σχετικά με την μάζα του ατόμου. Στην περίπτωση όπου μελετάμε φαινόμενα της ατομικής φυσικής η ΔE και η ενέργεια των φωτονίων είναι της τάξης των μερικών **eV** ενώ η μάζα του ατόμου είναι της τάξης **1-100 GeV** και συνεπώς το φαινόμενο είναι αμελητέο διότι η ενέργεια που χάνει το φωτόνιο $\Delta E/2\mathrm{Mc}^2$ είναι πολύ μικρότερη του εύρους μιας φασματικής γραμμής. Έτσι το φωτόνιο μπορεί να απορροφηθεί. Το ίδιο δεν συμβαίνει εάν κανείς χρησιμοποιήσει ακτίνες-γ οι οποίες έχουν ενέργεια της τάξης των **1-10 MeV** και τότε τα εκπεμπόμενα φωτόνια δεν απορροφούνται από τους πυρήνες[1].

Επίσης στην περίπτωση εκπομπής και απορρόφησης, το εκπεμπόμενο φωτόνιο χάνει $\Delta E/2\mathrm{Mc}^2$ της ενέργειας του λόγο της ανάκρουσης του αρχικού ατόμου καθώς και ένα ποσοστό $\Delta E/2\mathrm{Mc}^2$ της ενέργειας του απορροφούμενου φωτονίου ξοδεύεται ως κινητική ενέργεια του ατόμου που το απορροφά. Δηλαδή η συνολική επί πλέον ενέργεια που χρειάζεται είναι ίση με $\Delta E/Mc^2$.

1 Η απορρόφηση γίνεται δυνατή μόνο υπό συνθήκες που περιγράφονται από το φαινόμενο Mößbauer.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–11, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Ένας τόπος να γίνει λοιπόν η απορρόφηση είναι όταν το αρχικό άτομο κινείται και έτσι το φωτόνιο κερδίζει την ενέργεια αυτή μέσω του φαινομένου Doppler. Στην περίπτωση αυτή όπου λαμβάνει χώρα εκπομπή και απορρόφηση στο ίδιο μέσον έχουμε το φαινόμενο της απορρόφησης συντονισμού (Resonant absorption).

Ας υπολογίσουμε τώρα την ταχύτητα ανάκρουσης του ατόμου. Η αρχικές σχέσεις διατήρησης ορμής και ενέργειας μπορούν να γραφτούν

$$Mc^2 = m\gamma c^2 + E_\gamma \qquad (4)$$

$$0 = m\gamma\beta c - \frac{E_\gamma}{c} \qquad (5)$$

Από (4) και (5) έχουμε ότι

$$M = m\gamma + m\gamma\beta = m\gamma(1+\beta) \Rightarrow \frac{M^2}{m^2} = \frac{1+\beta}{1-\beta} \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{M^2-m^2}{M^2+m^2} \;, \quad \gamma = \frac{M^2+m^2}{2Mm} \quad \text{και} \quad \beta\gamma = \frac{M^2-m^2}{2Mm}$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–11, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Το Σύστημα του Κέντρου Μάζας

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύστημα από **N** σωματίδια με ορμές $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \ldots, \vec{p}_N$ και ενέργειες $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_N$ στο αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου. **Τότε υπάρχει ένα αδρανειακό σύστημα στο οποίο το άθροισμα των ορμών των σωματιδίων είναι μηδέν.** Το σύστημα αυτό κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς στο σύστημα του εργαστηρίου και στο σύστημα αυτό τα **N** σωματίδια έχουν ορμές $\vec{p}_1^{\,*}, \vec{p}_2^{\,*}, \vec{p}_3^{\,*}, \ldots, \vec{p}_N^{\,*}$ και ενέργειες $E_1^*, E_2^*, E_3^*, \ldots, E_N^*$ έτσι ώστε

$$\vec{p}_1^{\,*} + \vec{p}_2^{\,*} + \vec{p}_3^{\,*} + \ldots + \vec{p}_N^{\,*} = 0$$

Το σύστημα στο οποίο η συνολική ορμή των σωματιδίων είναι μηδέν ονομάζεται σύστημα του κέντρου μάζας (CMS).

Ας υπολογίσουμε τώρα την ταχύτητα του συστήματος κέντρου μάζας ως προς το σύστημα του εργαστηρίου. Οι μετασχηματισμοί Lorentz που μετατρέπουν την ενέργεια και ορμή από το σύστημα του εργαστηρίου στο σύστημα κέντρου μάζας δίνονται από τις γνωστές σχέσεις:

$$E^* = \gamma(E - \beta cp)$$

$$cp^* = \gamma(cp - \beta E)$$

Η ορμές στην πιο πάνω σχέση είναι η συνιστώσες των ορμών των σωματιδίων στην διεύθυνση της ταχύτητας του συστήματος του κέντρου μάζας στο σύστημα του εργαστηρίου. Εφαρμόζοντας τις σχέσεις αυτές για το σύστημα των σωματιδίων έχουμε για την ενέργεια

$$\sum_i^n E_i^* = \gamma_{CMS}\left(\sum_i^n E_i - \beta_{CMS}\, c \sum_i^n p_i\right)$$

όπου p_i είναι συνιστώσα της ορμής στην διεύθυνση του $\vec{\beta}$.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–11, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Για την συνιστώσα της ορμής στην διεύθυνση του $\vec{\beta}$ έχουμε

$$\sum_i^n cp_i^* = \gamma_{CMS}\left(\sum_i^n cp_i - \beta_{CMS}\sum_i^n E_i\right)$$

Όμως στο σύστημα κέντρου μάζας έχουμε ότι $\sum_i^n cp_i^* = 0$. Συνεπώς

$$\sum_i^n cp_i^* = 0 \Rightarrow \beta_{CMS} = \frac{\sum_i^n cp_i}{\sum_i^n E_i} \Rightarrow \gamma_{CMS} = \sqrt{\frac{(\sum_i^n E_i)^2}{(\sum_i^n E_i)^2 - (\sum_i^n cp_i)^2}}$$

Ας ορίσουμε την ποσότητα

$$M_T^2 c^4 = (\sum_i^n E_i)^2 - (\sum_i^n cp_i)^2$$

το φυσικό νόημα της οποίας θα δούμε πιο κάτω. Έτσι έχουμε ότι

$$\gamma_{CMS} = \sqrt{\frac{(\sum_i^n E_i)^2}{M_T^2 c^4}} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_{CMS} = \frac{\sum_i^n E_i}{M_T c^2}$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–11, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Ας δούμε τώρα πιο είναι το φυσικό νόημα της ποσότητας $M_T c^2$:

Αντικαθιστώντας τα β_{CMS}, γ_{CMS} στο μετασχηματισμό της ενέργειας έχουμε ότι

$$\sum_i^n E_i^* = \gamma_{CMS}\Big(\sum_i^n E_i - \beta_{CMS}\, c \sum_i^n p_i\Big) = \frac{\sum_i^n E_i}{M_T c^2}\Big(\sum_i^n E_i - \frac{(c\sum_i^n p_i)^2}{\sum_i^n E_i}\Big) = M_T c^2$$

Δηλαδή $M_T c^2$ είναι η συνολική ενέργεια στο σύστημα του κέντρου μάζας και ισχύει ότι

$$\Big(\sum_i^n E_i^*\Big)^2 = M_T^2 c^4 = \Big(\sum_i^n E_i\Big)^2 - \Big(\sum_i^n c p_i\Big)^2$$

Παραγωγή σωματιδίων

Μία από τις πιο πρωτοποριακές ερευνητικές προσπάθειες στην φυσική σήμερα, η σωματιδιακή φυσική, σκοπεύει στην αναζήτηση και παραγωγή νέων σωματιδίων με σκοπό την διερεύνηση των νόμων της δημιουργίας του σύμπαντος. Η θεωρίας της ειδικής σχετικότητας έπαιξε σημαντικό ρόλο στον τομέα αυτό και μία από τις πολλές συνεισφορές της έγκειται στο ότι οδήγησε στην κατανόηση της διαδικασίας παραγωγής σωματιδίων μέσω των νόμων της διατήρησης της σχετικιστικής ενέργειας και ορμής.

Τα σωματίδια παράγονται στο εργαστήριο από συγκρούσεις άλλων σωματιδίων. Θα περίμενε λοιπόν κανείς ότι η μικρότερη απαιτούμενη ενέργεια για την παραγωγή ενός σωματιδίου είναι ίσης με την μάζα ηρεμίας του σωματιδίου δηλαδή $m c^2$. Με άλλα λόγια όση ενέργεια χρειάζεται για να παραχθεί το σωματίδιο αλλά με μηδενική κινητική ενέργεια.

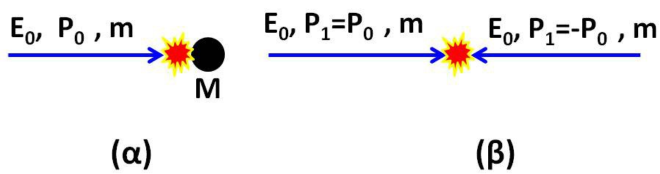
Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–11, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Αυτό δεν ισχύει για δύο λόγους.

- Πρώτον η ολική ορμή των αρχικών σωματιδίων τις περισσότερες φορές δεν είναι μηδέν, πράγμα που σημαίνει ότι αναγκαστικά και τα τελικά σωματίδια θα έχουν μη μηδενική ολική ορμή και συνεπώς το σύστημα των σωματιδίων έχει μη μηδενική κινητική ενέργεια. Άρα ένα σημαντικό ποσό της αρχικής ενέργειας ξοδεύεται όχι για την παραγωγή σωματιδίων αλλά σαν κινητική ενέργεια του συστήματος των τελικών σωματιδίων.

- Η σωματιδιακή φυσική διέπεται από κανόνες διατήρησης ορισμένων ποσοτήτων οι οποίες ονομάζονται κβαντικοί αριθμοί. Ένας γνωστός κβαντικός αριθμός είναι το φορτίο το οποίο διατηρείται. Η διατήρηση των κβαντικών αριθμών απαιτεί την ταυτόχρονη δημιουργία και άλλων σωματιδίων εκτός από αυτό που θα ήθελε κανείς να παράγει. Παραδείγματος χάριν από ένα φωτόνιο δεν μπορεί κανείς να παράγει μόνο ένα ηλεκτρόνιο ακόμα και αν το φωτόνιο έχει ενέργεια πολύ μεγαλύτερη από την μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου. Ο λόγος φυσικά είναι ότι το φορτίο πρέπει να διατηρείται. Έτσι πρέπει πάντα μαζί με το ηλεκτρόνιο να παραχθεί και το αντι-σωματίδιο του ηλεκτρονίου δηλαδή το ποσιτρόνιο το οποίο είναι θετικά φορτισμένο και έτσι διατηρείται το φορτίο (τα φωτόνια είναι ουδέτερα). Συνεπώς η μικρότερη ενέργεια φωτονίου η οποία απαιτείται για την δημιουργία ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-ποσιτρονίου είναι $2m_e c^2 = 2\times 0.511\, MeV = 1.022\, MeV$. Όπως θα δούμε αργότερα οι νόμοι της διατήρησης της ενέργειας και ορμής απαιτούν επίσης την ύπαρξη ενός πυρήνα στο αρχικό στάδιο της αντίδρασης.

Πειράματα για τη διερεύνηση ύπαρξης καινούριων σωματιδίων γίνονται χρησιμοποιώντας δέσμες σωματιδίων. Οι δέσμες σωματιδίων συγκρούονται ή με σταθερούς στόχους και τότε έχουμε να κάνουμε με πείραμα σταθερού στόχου (Fixed Target Experiment) ή με άλλες δέσμες σωματιδίων και τότε μιλάμε για πείραμα συγκρουόμενων δεσμών (Collider Experiment). Θα μελετήσουμε τώρα της διαφορές των δύο αυτών πειραματικών διατάξεων.



Σχήμα 3: (α) Fixed Target Experiment (β) Collider Experiment.

Fixed Target Experiments

Η περίπτωση που μία δέσμη σωματιδίων συγκρούεται με ακίνητο στόχο φαίνεται στο Σχήμα 3(α). Η συνολική ενέργεια στο κέντρο μάζας μπορεί να υπολογιστεί ως εξής

$$\left(\sum_{i=1}^{2} E_i^*\right)^2 = M_T^2 c^4 = \left(\sum_{i=1}^{2} E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{2} cp_i\right)^2 = \left(E_0 + M c^2\right)^2 - \left(cp_0\right)^2 \Rightarrow$$

$$M_T^2 c^4 = \left(E_0\right)^2 + \left(M c^2\right)^2 + 2 E_0 M c^2 - \left(cp_0\right)^2 \Rightarrow$$

$$M_T^2 c^4 = \left(m c^2\right)^2 + \left(M c^2\right)^2 + 2 E_0 M c^2 \Rightarrow$$

Όταν η ενέργεια της δέσμης είναι πολύ μεγαλύτερη από τις ενέργειες ηρεμίας των σωματιδίων της δέσμης και του στόχου ($E_0 \gg Mc^2, mc^2$) τότε μπορούμε να αγνοήσουμε δύο πρώτους όρους και έτσι έχουμε ότι

$$M_T^2 c^4 \approx 2 E_0 M c^2 \Rightarrow \qquad M_T c^2 \approx \sqrt{2 E_0 M c^2}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η συνολική ενέργεια στο κέντρο μάζας $\left(\sum_{i=1}^{2} E_i^*\right) = M_T c^2$ **αυξάνεται με την τετραγωνική ρίζα της ενέργειας της δέσμης.**

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–11, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Collider Experiments

Για την περίπτωση πειράματος με συγκρουόμενες δέσμες (Σχήμα 3(β)) έχουμε

$$(\sum_{i=1}^{2} E_i^*)^2 = M_T^2 c^4 = (\sum_{i=1}^{2} E_i)^2 - (\sum_{i=1}^{2} c\, p_i)^2 = (E_0 + E_0)^2 - c^2 (p_1 - p_2)^2 \Rightarrow$$

$$M_T^2 c^4 = E_0^2 + E_0^2 + 2 E_0 E_0 - (c\, p_1)^2 - (c\, p_1)^2 + 2 c^2 p_1 p_2 \Rightarrow$$

$$M_T^2 c^4 = 2 m^2 c^4 + 2 E_0 E_0 + 2 c^2 p_0 p_0$$

όταν οι ενέργεια της δέσμης είναι πολύ μεγαλύτερη από την ενέργεια ηρεμίας των σωματιδίων δηλαδή $E_0 \gg m c^2$ τότε μπορούμε να αγνοήσουμε τις μάζες και οι ενέργειες είναι απλά $E \approx pc$. Έτσι έχουμε ότι

$$M_T^2 c^4 \approx 2 E_0 E_0 + 2 E_0 E_0 \Rightarrow$$

$$M_T^2 c^4 \approx 4 E_0^2 \Rightarrow M_T c^2 \approx 2 E_0$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η συνολική ενέργεια στο κέντρο μάζας είναι ανάλογη $(\sum_{i=1}^{2} E_i^*) = M_T c^2$ **της ενέργειας της δέσμης**.

<u>Συμπέρασμα:</u> Η παραγωγή ενός νέου σωματιδίου με ενέργεια ηρεμίας $M_T c^2$ απαιτεί σημαντικά μικρότερη ενέργεια δέσμης σε πείραμα συγκρουόμενων δεσμών (Collider Experiment) από αυτή που απαιτείται για να παραχθεί το ίδιο σωματίδιο σε πείραμα σταθερού στόχου (Fixed Target Experiment).

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–11, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Ενέργεια Κατωφλίου (Threshold Energy)

Η ενέργεια κατωφλίου για παραγωγή ενός σωματιδίου είναι η μικρότερη κινητική ενέργεια στο σύστημα του εργαστηρίου η οποία απαιτείται για την παραγωγή του συγκεκριμένου σωματιδίου συμπεριλαμβανομένων και των άλλων σωματιδίων τα οποία αναγκαστικά παράγονται στο τελικό στάδιο της συγκεκριμένης αντίδρασης λόγω κανόνων διατήρησης.

Στο σύστημα του κέντρου μάζας τα σωματίδια έχουν μηδενική ολική κινητική ενέργεια έτσι το σύστημα αυτό είναι ιδανικό για την μελέτη και υπολογισμό της ενέργειας κατωφλίου. Ο λόγος για αυτό είναι ότι όλη η ενέργεια στο κέντρο μάζας διοχετεύεται για την παραγωγή και κίνηση των σωματιδίων (αν η ενέργεια είναι μεγαλύτερη της ενέργειας κατωφλίου) και κανένα μέρος της ενέργειας δεν ξοδεύεται για την κίνηση του συστήματος των σωματιδίων το οποίο εξ' ορισμού παραμένει ακίνητο.

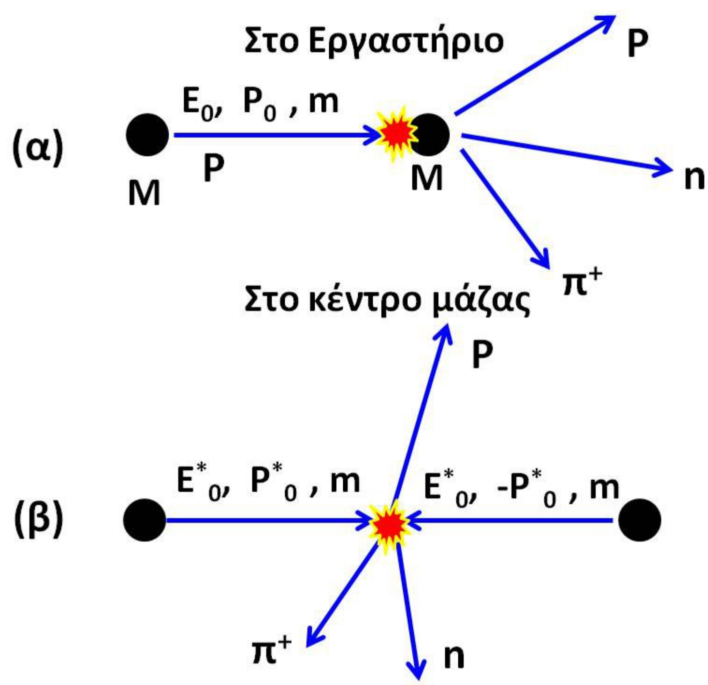
Η ενέργεια κατωφλίου είναι η κινητική ενέργεια της δέσμης η οποία μόλις αρκεί για την παραγωγή των σωματιδίων με μηδενική κινητική ενέργεια στο κέντρο μάζας. Δηλαδή όταν η κινητική ενέργεια της δέσμης είναι ίση ακριβώς με την ενέργεια κατωφλίου τα σωματίδια παράγονται απλά χωρίς να κινούνται στο σύστημα του κέντρου μάζας.

Παράδειγμα 1: Παραγωγή πιονίων από σύγκρουση πρωτονίων

Δέσμη πρωτονίων με ολική ενέργεια E_0 και ορμή P_0 προσπίπτει σε στόχο υδρογόνου με σκοπό την παραγωγή θετικά φορτισμένων πιονίων όπως φαίνεται στο Σχήμα 4. Θετικά φορτισμένα πιόνια παράγονται μέσω της αντίδρασης

$$pp \rightarrow pn\pi$$

Στο τελικό στάδιο της αντίδρασης παράγονται, εκτός του πιονίου, ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο. **Υπολογίστε την κινητική ενέργεια της δέσμης πρωτονίων η οποία αντιστοιχεί στο κατώφλι παραγωγής θετικά φορτισμένων πιονίων.** Οι πυρήνες του υδρογόνου (πρωτόνια) θεωρούνται ότι βρίσκονται σε ηρεμία και οι μάζες του πρωτονίου και νετρονίου είναι περίπου ίσες $m_p c^2 \approx m_n c^2 \; 938\, MeV$. Η μάζα του θετικά φορτισμένου πιονίου είναι $m_p c^2 \approx 140\, MeV$.



Σχήμα 4 Η αντίδραση $pp \rightarrow pn\pi$ *(α) στο σύστημα του εργαστηρίου (β) στο σύστημα του κέντρου μάζας.*

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–11, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Λύση:

Για τον υπολογισμό της ενέργειας κατωφλίου εργαζόμαστε στο σύστημα του κέντρου μάζας γιατί εκεί η συνολική ορμή είναι μηδέν και συνεπώς η ολική κινητική ενέργεια είναι μηδέν. Έτσι όλη η ενέργεια του κέντρου μάζας ξοδεύεται μόνο για την παραγωγή των τριών σωματιδίων. Το τετράγωνο της ολικής ενέργειας στο κέντρο μάζας σαν συνάρτηση της ενέργειας και ορμής των αρχικών σωματιδίων στο σύστημα του εργαστηρίου δίνεται από

$$\left(\sum_i^n E_i^*\right)^2 = M_T^2 c^4 = \left(\sum_i^n E_i\right)^2 - \left(\sum_i^n cp_i\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left(\sum_1^2 E_i^*\right)^2 = (E_0 + m_p c^2)^2 - (c\,p_0)^2 = E_0^2 - c^2 p_0^2 + m_p^2 c^4 + 2E_0 m_p c^2 = 2m_p^2 c^4 + 2E_0 m_p c^2 \qquad (1)$$

Η ενέργεια κατωφλίου είναι η ενέργεια η οποία αρκεί μόνο για να παραχθούν τα τρία σωματίδια στο κέντρο μάζας χωρίς να κινούνται. Δηλαδή όταν η ενέργεια της δέσμης φτάσει μία συγκεκριμένη τιμή τότε η ενέργεια στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι μόλις αρκετή για να έχουμε στο τελικό στάδιο της αντίδρασης τρία ακίνητα σωματίδια (πρωτόνιο, νετρόνιο και πιόνιο) . Συνεπώς στο κέντρο μάζας έχουμε

$$\left(\sum_1^3 E_i^*\right)^2 = (m_p c^2 + m_n c^2 + m_\pi c^2)^2 = (2m_p c^2 + m_\pi c^2)^2 = 4m_p^2 c^4 + m_\pi^2 c^4 + 4m_p c^2 m_\pi c^2 \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι

$$\left(\sum_1^3 E_i^*\right)^2 = 4m_p^2 c^4 + m_\pi^2 c^4 + 4m_p c^2 m_\pi c^2 = 2m_p^2 c^4 + 2E_0 m_p c^2 \Rightarrow$$

$$2m_p^2 c^4 + m_\pi^2 c^4 + 4m_p c^2 m_\pi c^2 = 2E_0 m_p c^2 \Rightarrow E_0 = \frac{2m_p^2 c^4 + m_\pi^2 c^4 + 4m_p c^2 m_\pi c^2}{2m_p c^2} \Rightarrow$$

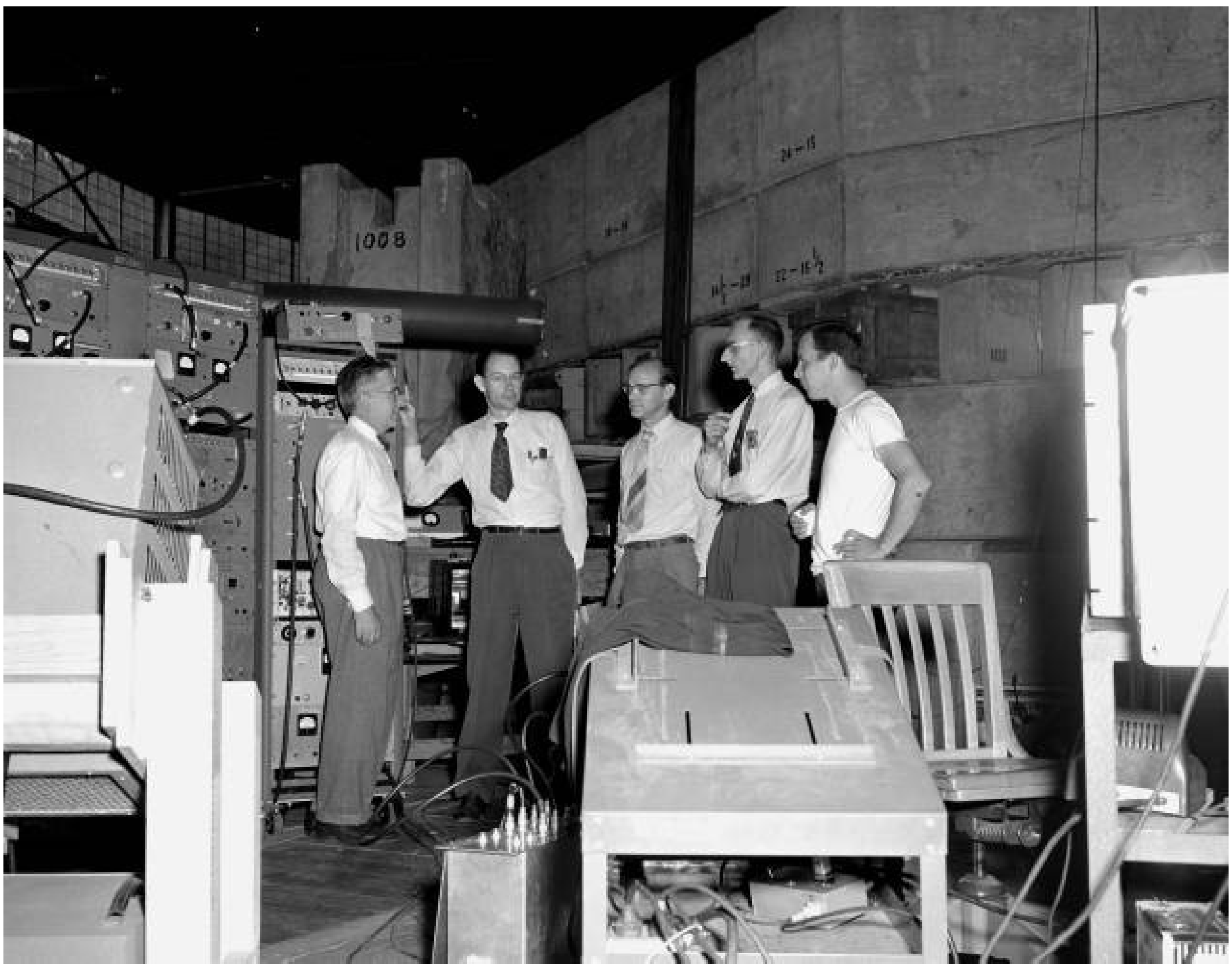
$$E_0 = \frac{2m_p^2 c^4 + m_\pi^2 c^4 + 4m_p c^2 m_\pi c^2}{2m_p c^2} = m_p c^2 + \frac{1}{2}\frac{m_\pi^2 c^4}{m_p c^2} + 2m_\pi c^2 \Rightarrow$$

$$E_0 = 938\,MeV + 0.5\frac{(140)^2}{938}\,MeV + 2\times 140\,MeV = 1228\,MeV$$

Συνεπώς η κινητική ενέργεια της δέσμης είναι $KE_0 = 1228\,MeV - 938\,MeV = 290\,MeV$ δηλαδή περίπου διπλάσια από τη μάζα ηρεμίας του πιονίου.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–11, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

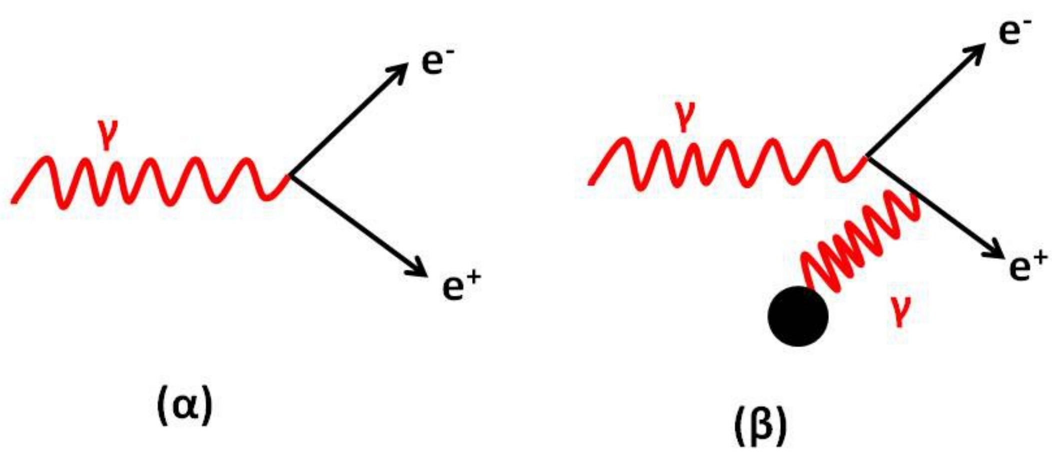
Με τον ίδιο τρόπο μπορεί κανείς να υπολογίσει την κινητική ενέργεια στο κατώφλι παραγωγής αντι-πρωτονίων μέσω της αντίδρασης $pp \rightarrow p\,p\,p\,\bar{p}$. Η απάντηση εδώ είναι ότι απαιτείται μία δέσμη πρωτονίων με κινητική ενέργεια η οποία είναι 6 φορές μεγαλύτερη από την μάζα ηρεμίας του πρωτονίου/αντι-πρωτονίου. Η αντίδραση αυτή χρησιμοποιήθηκε από τους O. Chamberlain, E. Segre, C. Wiegand, T. Ypsilantis (Phys. Rev. 100, 947 (1955)) σε πείραμα που οδήγησε στην ανακάλυψη του αντι-πρωτονίου και σε βραβείο Nobel για τους δύο πρώτους.



Σχήμα 5: Η ομάδα του πειράματος το οποίο ανακάλυψε το αντι-πρωτόνιο στο Berkeley Lawrence Laboratory (USA). Από αριστερά προς τα δεξιά διακρίνονται οι Dr. Emilio Segre, Dr. Clyde Wiegand, Dr. Edward Lofgren, Dr. Owen Chamberlain και ο Tom Ypsilantis (υποψήφιος διδάκτωρ) .

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–11, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Δίδυμος γένεση – Η μετάπτωση φωτονίου σε ζεύγος ηλεκτρονίου/ποσιτρονίου.



Σχήμα 6: (α) Η δίδυμος γέννεση στο απόλυτο κενό απαγορεύεται από διατήρηση σχετικιστικής ενέργειας και ορμής. (β) Δίδυμος γέννεση λαμβάνει χώρα όταν είναι δυνατή η ανταλλαγή φωτονίου με βαρύ πυρήνα.

Τα φωτόνια όταν διέρχονται μέσα από την ύλη χάνουν ενέργεια μέσω διαφορετικών μηχανισμών. Σε υψηλές ενέργειες ο κύριος μηχανισμός απώλειας ενέργειας των φωτονίων είναι το φαινόμενο της δίδυμης γέννεσης. Υπό ορισμένες συνθήκες ένα φωτόνιο μπορεί να διασπαστεί σε ένα ηλεκτρόνιο και ένα αντι-σωματίδιο ηλεκτρονίου δηλαδή ένα ποσιτρόνιο. Ο λόγος της γέννησης ζεύγους και όχι ενός σωματιδίου είναι η διατήρηση του φορτίου. Θα μελετήσουμε εδώ κάτω από ποιες συνθήκες μπορεί να συμβεί η δίδυμος γέννεση. Μια προφανής συνθήκη είναι το φωτόνιο να έχει ενέργεια τουλάχιστον δύο φορές μεγαλύτερη της ενέργειας ηρεμίας του ηλεκτρονίου (σωματίδια και αντι-σωματίδια έχουν την ίδια μάζα). Δηλαδή

$$E_\gamma \geq 2 \times m_e c^2 = 2 \times 0.511\, MeV = 1022\, MeV$$

Αυτό όμως δεν αρκεί και θα δούμε τώρα γιατί. Έστω η δίδυμος γέννεση στο Σχήμα 6(α) και ότι $E_1, E_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ είναι οι ενέργειες και οι ορμές του ηλεκτρονίου και του ποσιτρονίου. Από διατήρηση ενέργειας και ορμής έχουμε

$$E_\gamma = E_1 + E_2 \Rightarrow E_\gamma^{\ 2} = E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2 \qquad (1)$$

$$\vec{p}_\gamma = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow \vec{p}_\gamma^{\ 2} = \vec{p}_1^{\ 2} + \vec{p}_2^{\ 2} + 2\, \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \qquad (2)$$

Τα φωτόνια όμως έχουν μηδενική μάζα και έτσι έχουμε ότι

$$E_\gamma = c\left|\vec{p}_\gamma\right| \qquad (3)$$

Έτσι από (1), (2) και (3) έχουμε

$$E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2 = (c\, \vec{p}_1)^2 + (c\, \vec{p}_2)^2 + 2 c^2\, \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \Rightarrow$$

$$m_e c^2 + m_e c^2 + 2 E_1 E_2 = 2 c^2\, \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \Rightarrow$$

$$m_e c^2 + E_1 E_2 = c^2\, \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \qquad (4)$$

Λόγω συμμετρίας όμως έχουμε ότι

$$E_1 = E_2 = E, \qquad \left|\vec{p}_1\right| = \left|\vec{p}_2\right| = p \qquad (5)$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–11, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Από (4) και (5) έχουμε ότι

$$E^2 \;=\; c^2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|cos\theta - m_e c^2$$

Η σχέση αυτή είναι προφανώς λάθος. Δηλαδή η σχέσεις (1) και (2) που περιγράφουν διατήρηση ενέργειας και ορμής δεν μπορούν να ισχύσουν ταυτόχρονα. **Άρα δίδυμος γένεση σε απόλυτο κενό είναι αδύνατη.**

Στο Σχήμα 6(β) φαίνεται πώς μπορεί να λάβει χώρα η δίδυμος γέννεση υπό την παρουσία ενός βαρέος πυρήνα. Ο πυρήνας απορροφά ένα ποσοστό της αρχικής ορμής του φωτονίου αλλά λόγο της μεγάλης του μάζας αποκτά πολύ μικρή κινητική ενέργεια. Κατ΄ αυτό τον τρόπο εξακολουθεί να ισχύει ότι $E_\gamma = E_1 + E_2$ και η ενέργεια κατωφλίου είναι 1022 MeV, καθώς επίσης διατηρείται και η ορμή.

Συνεπώς η δίδυμος γέννεση ηλεκτρονίου/ποσιτρονίου από ένα φωτόνιο είναι δυνατή υπό την παρουσία βαρέως πυρήνα και έχει ενέργεια κατωφλίου 1022 MeV.