Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Ορμή και Ενέργεια στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας

10/11/12

Σκοπός της δέκατης διάλεξης:

- Η κατανόηση των εννοιών της ολικής ενέργειας, της κινητικής ενέργειας και της ορμής στην ειδική θεωρία της σχετικότητας.
- Να εισάγει τις σχέσεις της διατήρησης της ορμής και της ενέργειας στην περίπτωση που τα σωματίδια είναι σχετικιστικά.
- Μεθοδολογία και επίλυση προβλημάτων με χρήση της διατήρησης της ορμής και της ενέργειας.

Διατήρηση της Ορμής στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας:

Ας θεωρήσουμε δύο σωματίδια με μάζες ίσες με **m** τα οποία κινούνται με ταχύτητες οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 1. Τα δύο σωματίδια κινούνται και συγκρούονται στο σημείο **P**. Μετά την σύγκρουση κινούνται σε τροχιές που φαίνονται με διακεκομμένες γραμμές. Ας υποθέσουμε ότι τα σωματίδια κινούνται με ταχύτητες πολύ μικρότερες αυτής του φωτός και συνεπώς ισχύουν οι σχέσεις της κλασσικής φυσικής. Όπως ξέρουμε η ορμή διατηρείται (είναι η ίδια πριν και μετά την σύγκρουση). **Ας συγκεντρωθούμε από εδώ και πέρα στην μελέτη της διατήρησης της ορμής μόνο στον άξονα των y**.

Έτσι σύμφωνα με την κλασσική μηχανική έχουμε η διαφορά ορμής του πρώτου σωματιδίου στον άξονα των **y** είναι:

$$\Delta P_y(1) = 2mv_y$$

και για το δεύτερο σωματίδιο είναι:

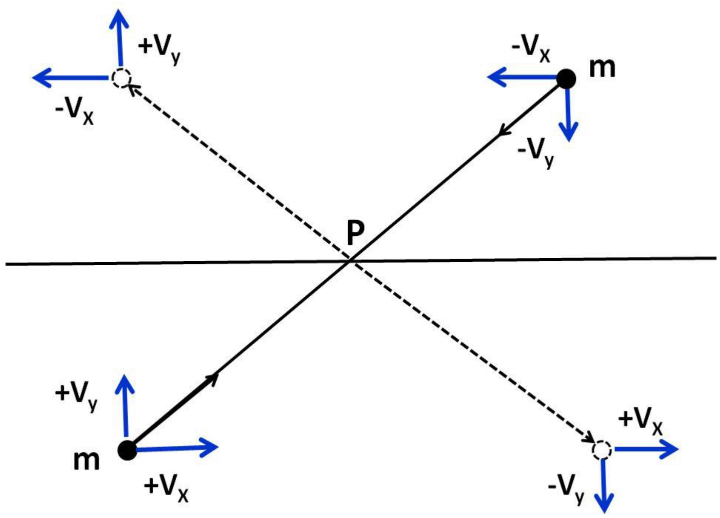
$$\Delta P_y(2) = -2mv_y$$

Έτσι η συνολική αλλαγή της ορμής είναι:

$$\Delta P_y = \Delta P_y(1) + \Delta P_y(2) = 0$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Δεν βλέπουμε τίποτα το παράξενο μέχρι τώρα: **Η ορμή απλά διατηρείται και συνεπώς η ολική αλλαγή της ορμής είναι μηδέν.**



Σχήμα 1: Σύγκρουση δυο σωματιδίων με ίσες μάζες και ταχύτητες όπως φαίνονται στο σχήμα.

Στο επόμενο βήμα θεωρούμε ότι τα σωματίδια είναι σχετικιστικά και συνεπώς κινούνται με ταχύτητα η οποία είναι κοντά στην ταχύτητα του φωτός. Η ορμή ως προς τον άξονα των **y**, όπως ορίζεται από την κλασσική σχέση, προφανώς διατηρείται και πάλι στο σύστημα του εργαστηρίου όπως είδαμε και πριν (Σχήμα 1).

Επιλέγουμε όμως αυτή τη φορά να μελετήσουμε την το πρόβλημα αυτό από αδρανειακό σύστημα το οποίο κινείται με ταχύτητα $V = (v_x, 0, 0)$ ως προς το εργαστήριο. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις για μετασχηματισμό ταχυτήτων στον άξονα των **y** έχουμε ότι:

$$P_y(\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}) = \frac{-m v_y}{(1+\frac{v_x^2}{c^2})} + \frac{m v_y}{(1-\frac{v_x^2}{c^2})} \qquad \text{(A)}$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

$$P_y(\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}) = \frac{m v_y}{(1+\frac{v_x^2}{c^2})} + \frac{-m v_y}{(1-\frac{v_x^2}{c^2})} \qquad \text{(B)}$$

Συγκρίνοντας την (Α) με την (Β) βλέπουμε ότι

$$P_y(\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}) \neq P_y(\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta})$$

Δηλαδή καταλήγουμε σε ανοησίες όπου η ορμή διατηρείται στο ένα αδρανειακό και δεν διατηρείται σε ένα άλλο. Προφανώς αυτό που δημιουργεί το πρόβλημα είναι η **x** συνιστώσα της ταχύτητας στον παρονομαστή που προέρχεται από τον μετασχηματισμό του χρόνου.

Με άλλα λόγια ο κλασσικός ορισμός της ορμής ($\vec{p} = m\vec{v}$) δεν οδηγεί σε ποσότητα που διατηρείται σε όλα τα αδρανειακά συστήματα. Συνεπώς κάτι δεν πάει καλά με τον δεύτερο νόμο του Newton ($\vec{F} = d\vec{p}/dt$) από τον όποιο πηγάζει η διατήρηση της ορμής.

Εκτός αυτού υπάρχουν και άλλα παραδείγματα που μας λένε ότι κάτι δε πάει καλά με τον ορισμό της ορμής και το δεύτερο νόμο του Newton. Παραδείγματος χάριν ο νόμος του Newton μας λέει ότι η επιτάχυνση δύνεται από την σχέση

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1}{m}\frac{d\vec{P}}{dt}$$

όπου $\vec{a}, \vec{F}, \vec{P}$ είναι η επιτάχυνση, η δύναμη και η ορμή. Προφανώς σύμφωνα με αυτό το νόμο όταν μια δύναμη ασκείται πάνω σε ένα σωματίδιο, τότε το σωματίδιο πρέπει να επιταχύνεται συνεχώς και φυσικά αργά η γρήγορα η ταχύτητα του θα υπερβεί την ταχύτητα του φωτός. Πράγμα πού απαγορεύεται από την δεύτερη αρχή της ειδικής σχετικότητας του Einstein.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Έτσι επιζητούμε μια σχετικιστική έκφραση/σχέση για την ορμή που θα αντικαθιστά την κλασσική έκφραση και οι οποία θα ξεπερνά τα αδιέξοδα που αναφέραμε. Η σχετικιστική σχέση για την ορμή θα πρέπει να ικανοποιεί όμως δύο βασικές προϋποθέσεις:

1. **Για ταχύτητες οι οποίες είναι πολύ μικρότερες της ταχύτητας του φωτός πρέπει να μας δίνει τον κλασσικό ορισμό της ορμής, δηλαδή $\vec{p} = m\vec{v}$.**
2. **Όταν δεν εξασκούνται εξωτερικές δυνάμεις πάνω σε ένα σύστημα σωματιδίων τότε η ολική ορμή του συστήματος πρέπει να διατηρείται σε όλα τα αδρανειακά συστήματα.**

Δεν θα δώσουμε εδώ ακριβή απόδειξη της σχετικιστικής σχέσης για την ορμή. Θα δώσουμε όμως μερικά επιχειρήματα για το πως καταλήγουμε σ' αυτή τη σχέση:

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα του Σχήματος 1 ας δούμε τα αίτια του γιατί ο κλασσικός ορισμός της ορμής σε συνδυασμό με τους σχετικιστικούς μετασχηματισμούς ταχύτητας δεν οδήγησαν σε διατήρηση της ορμής στον άξονα των **y**. Ας αρχίσουμε λοιπόν από τον ορισμό της ταχύτητας στον άξονα των **y**:

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Το Δy δεν αλλάζει από αδρανειακό σύστημα σε αδρανειακό σύστημα καθ' ότι είναι κάθετο προς την κίνηση. Αυτό το έχουμε δει σε προηγούμενες διαλέξεις στους μετασχηματισμούς Lorentz για τις συντεταγμένες και θα περίμενε κανείς να συμβαίνει το ίδιο και με την ορμή που είναι κάθετη προς την κίνηση. Αυτό που αλλάζει εδώ είναι το Δt και αυτός είναι ο λόγος που έκανε την ορμή να μην διατηρείται στον άξονα των **y**. Η φυσική όμως απαιτεί από την ορμή που είναι κάθετη στην κίνηση να μην αλλάζει από σύστημα σε σύστημα. Συνεπώς πρέπει να αλλάξουμε τον ορισμό της ορμής έτσι ώστε η **y**-συντεταγμένη της να παραμένει αναλλοίωτη στα διάφορα αδρανειακά συστήματα. Αν αντί του Δt χρησιμοποιήσουμε το $\Delta \tau$ δηλαδή τον ιδιοχρόνο τότε η ποσότητα

$$v_I = \frac{\Delta y}{\Delta \tau}$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

δεν αλλάζει από σύστημα σε σύστημα γιατί ο ιδιοχρόνος είναι κάτι που δεν αλλάζει από σύστημα σε σύστημα. Όλοι οι παρατηρητές με γνώσεις σχετικότητας συμφωνούν π.χ. ότι το μιόνιο έχει χρόνο ζωής $\Delta\tau_\mu = 2.2\times10^{-6}\ s$. Έτσι τώρα το γινόμενο

$$mv_I = m\frac{\Delta y}{\Delta\tau} = m\frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = m\frac{\Delta y}{\Delta t}\gamma_y = m\gamma v = m\gamma_y\beta_y c \quad (\Gamma)$$

δεν αλλάζει από σύστημα σε σύστημα. Έτσι αν διατηρείται σε ένα σύστημα τότε διατηρείται σε όλα τα άλλα. Αυτά που αναφέραμε μέχρι τώρα ισχύουν για το άξονα των **y**. Έτσι λύσαμε το πρόβλημα της διατήρησης της ορμής για κατεύθυνση η οποία είναι κάθετη προς την κίνησης του συστήματος αναφοράς. Στην κατεύθυνση της κίνησης του συστήματος αναφοράς η ορμή προφανώς αλλάζει και θα δούμε πώς αργότερα όταν μιλήσουμε για μετασχηματισμούς Lorentz για ορμή.

Αν τώρα γενικεύσουμε την (Γ) έχουμε ότι η σχετικιστική ορμή σε 3 διαστάσεις δίνεται από την σχέση:

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} = m\gamma c\vec{\beta} \qquad (\Delta)$$

Η (Δ) πληρεί και τις δυο προϋποθέσεις που θέσαμε πριν. Δηλαδή εν τι απουσία εξωτερικών δυνάμεων διατηρείται καθώς επίσης για χαμηλές ταχύτητες μας δίνει τον κλασσικό ορισμό.

Άρα από εδώ και στο εξής για προβλήματα που απαιτούν διατήρηση της ορμής στην λύση τους, η μεθοδολογία είναι η ίδια όπως στην κλασσική μηχανική (η ολική ορμή πριν την σύγκρουση ίση με την ολική ορμή μετά την σύγκρουση) με την την διαφορά ότι αντί της μη-σχετικιστής σχέσης για την ορμή θα χρησιμοποιούμε την (Δ).

Δηλαδή η διατήρηση της σχετικιστικής ορμής δίνεται από:

$$(\sum_1^N \vec{p}_i)_{\Pi P I N} = (\sum_1^N \vec{p}_i)_{META} \Rightarrow (\sum_1^N m_i\gamma_i\vec{v}_i)_{\Pi P I N} = (\sum_1^N m_i\gamma_i\vec{v}_i)_{META}$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Ολική και Κινητική Ενέργεια στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας:

Έχοντας βρει σχέση για την σχετικιστική ορμή θα προχωρήσουμε και θα υπολογίσουμε σχέσεις για σχετικιστική ολική και κινητική ενέργεια.

Αρχίζοντας από την γνωστή σχέση ότι η κινητική ενέργεια σωματιδίου είναι ίση με το έργο που παράγει μια δύναμη πάνω στο σωματίδιο και χρησιμοποιώντας τον δεύτερο νόμο του Newton με σχετικιστική ορμή έχουμε ότι:

$$KE = \int_0^v \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^v \frac{d}{dt}(m\gamma\beta c)\,ds = mc\int_0^v \frac{d}{dt}(\gamma\beta)\,ds \qquad (1)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται από μηδενική ταχύτητα μέχρι ταχύτητα ίση με v. Όμως

$$\frac{d}{dt}(\beta\gamma) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{d\beta}{dt}\gamma^3 \qquad (2)$$

Έτσι από (1) και (2) έχουμε:

$$KE = mc\int_0^v \frac{d\beta}{dt}\gamma^3\,ds \qquad (3)$$

όμως

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \beta\frac{d\beta}{dt}\gamma^3 \Rightarrow \frac{1}{\beta}\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\beta}{dt}\gamma^3 \qquad (4)$$

και από (3) και (4) έχουμε

$$KE = mc\int_0^v \frac{1}{\beta}\frac{d\gamma}{dt}\,ds = mc\int_0^v \frac{1}{\beta}\frac{d\gamma}{dt}\beta c\,dt = m\gamma(v)c^2 - m\gamma(0)c^2 \Rightarrow$$

$$KE = m\gamma(v)c^2 - mc^2$$

Εδώ έχουμε γράψει $\gamma = \gamma(v)$ για να τονίσουμε ότι το σχετικιστικό γ είναι συνάρτηση της ταχύτητας v. Από εδώ και στο εξής θα γράφουμε απλά το σχετικιστικό γ που φυσικά θυμόμαστε ότι είναι συνάρτηση της ταχύτητας. Έτσι η κινητική ενέργεια στην ειδική σχετικότητα δίνεται από την σχέση:

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

$$KE = m\gamma c^2 - mc^2 \qquad (5)$$

Παρατηρούμε ότι στην κινητική ενέργεια συνεισφέρουν δύο όροι. Ο πρώτος όρος:

$$E = m\gamma c^2 \qquad (6)$$

εξαρτάται από την μάζα και την ταχύτητα, ενώ ο δεύτερος όρος:

$$E_0 = mc^2 \qquad (7)$$

εξαρτάται μόνο από την μάζα και δεν εξαρτάται από το αν το σωματίδιο κινείται. Συνεπώς ισοδυναμεί με την ενέργεια που έχει ένα σωματίδιο έτσι και αλλιώς ακόμα και αν βρίσκεται σε ηρεμία. Η σχέση (5) λοιπόν μας λέει ότι η κινητική ενέργεια ενός σωματιδίου είναι η ενέργεια που απομένει αν αφαιρέσουμε από τον όρο (6) την ενέργεια που έχει ένα σωματίδιο σε ηρεμία λόγω της μάζας του που δίνεται από την (7). Άρα η (6) δεν μπορεί παρά να είναι η ολική ενέργεια του σωματιδίου. Αυτό φαίνεται και από το γεγονός ότι όταν η ταχύτητα του σωματιδίου μηδενιστεί τότε η (6) και η (7) γίνονται ίδιες και η κινητική ενέργεια μηδενίζεται.

Από την (5) έχουμε ότι η ολική ενέργεια ενός σωματιδίου δίνεται επίσης από την:

$$E = KE + mc^2$$

η οποία είναι απολύτως ισοδύναμη της σχέσης (6).

Προσοχή, το γεγονός ότι η ολική ενέργεια στην (6) είναι ανάλογη της μάζας δεν σημαίνει σε καμία περίπτωση ότι σωματίδια με μηδενική μάζα έχουν και μηδενική ενέργεια. Όπως θα αποδείξουμε σε μία άσκηση, όταν η μάζα ενός σωματιδίου τείνει στο μηδέν τότε η ταχύτητα του τείνει στην ταχύτητα του φωτός και έτσι το γ τείνει στο άπειρο. Άρα δεν μπορεί κανείς απλά να αντικαταστήσει την μάζα με μηδέν στην (6) γιατί σ' αυτή την περίπτωση το γ πρέπει να είναι άπειρο.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Ένας καλύτερος τρόπος να δούμε τι ακριβώς συμβαίνει με τα **σωματίδια μηδενικής μάζας** είναι ο εξής: Έστω σωματίδιο με μη μηδενική μάζα. Η ορμή και η ενέργεια του σωματιδίου δίνονται φυσικά από τις σχέσεις:

$$p = m\gamma\beta c \quad \text{και} \quad E = m\gamma c^2$$

Υψώνοντας και τις δύο σχέσεις στο τετράγωνο έχουμε:

$$E^2 = m^2\gamma^2 c^4$$
$$(pc)^2 = m^2\gamma^2\beta^2 c^4$$

Έτσι

$$E^2-(pc)^2 = m^2\gamma^2 c^4(1-\beta^2) = m^2 c^4 \Rightarrow$$
$$E^2 = (pc)^2+m^2 c^4 \Rightarrow$$

$$E = \sqrt{(pc)^2+m^2c^4} \qquad (8)$$

Η σχέση (8) μας λέει ότι ακόμα και αν η μάζα μηδενιστεί το σωματίδιο μπορεί να έχει ενέργεια αν έχει ορμή. **Κλασσικό παράδειγμα είναι τα φωτόνια τα οποία αν και έχουν μηδενική μάζα έχουν και ενέργεια και ορμή:**

$E_\gamma = hf$ (Ενέργεια φωτονίου = Σταθερά Plank x συχνότητα)

$\vec{p}_\gamma = \hbar\vec{k}$ (Ορμή φωτονίου = ([Σταθερά Plank/ 2π] x κυματικός αριθμός)

όπου $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{k}$ είναι ο κυματικός αριθμός και $\hat{k}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση διάδοσης του φωτός.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Είναι πολύ εύκολο να δείξει κανείς από τις δύο αυτές σχέσεις και την (8) ότι η μάζα των φωτονίων είναι μηδέν: Από την (8) έχουμε ότι

$$m_\gamma^2 c^4 \;=\; E_\gamma^2 - (p_\gamma c)^2 \;=\; h^2 f^2 - \left(\frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda}c\right)^2 \;=\; h^2 f^2 - h^2 f^2 \;=\; 0$$

Μερικά χρήσιμα νούμερα για το φωτόνιο είναι:

$$h \;=\; 4.136\times 10^{-15}\, eV\;\; s \qquad \hbar c \;=\; 197.3\, MeV\;\; fm \qquad 1\mathrm{fm} \;=\; 10^{-15}\, m$$

Οι μονάδες ενέργειας στην σχετικότητα είναι:

$$1\;\; KeV = 10^3\;\; eV \qquad 1\;\; MeV = 10^6\, eV \qquad 1\;\; GeV = 10^9\, eV \qquad 1\;\; TeV = 10^{12}\, eV$$

Παραδείγμα 1: Σωματίδιο με μάζα m και ολική ενέργεια $E_T \;=\; 2mc^2$ συγκρούεται με σωματίδιο μάζας επίσης m το οποίο βρίσκεται σε ηρεμία. Τα σωματίδια κολλάνε μεταξύ τους μετά την σύγκρουση και δημιουργούν ένα σωματίδιο μάζας M . Δείξτε ότι η ταχύτητα του τελικού σωματιδίου είναι ίση με $\frac{c}{\sqrt{3}}$ και υπολογίστε την μάζα M τελικού σωματιδίου.

Λύση:

Από διατήρηση της ενέργειας και ορμής έχουμε:

$$E_T + mc^2 \;=\; M\gamma c^2 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{c}\sqrt{E_T^2 - m^2c^4} \;=\; M\gamma\beta c \qquad (2)$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Διαιρώντας την (2) με την (1) παίρνουμε:

$$\frac{\frac{1}{c}\sqrt{E_T^2 - m^2 c^4}}{E_T + mc^2} = \frac{M\gamma\beta c}{M\gamma c^2} = \frac{\beta}{c} \Rightarrow \frac{\sqrt{E_T^2 - m^2 c^4}}{E_T + mc^2} = \beta \Rightarrow \sqrt{\frac{E_T - m c^2}{E_T + mc^2}} = \beta$$

όμως

$$E_T = 2mc^2$$

άρα

$$\beta = \sqrt{\frac{2\mathrm{mc}^2 - m c^2}{2\mathrm{mc}^2 + mc^2}} = \sqrt{\frac{mc^2}{3mc^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

και

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$3mc^2 = M\gamma c^2 = M\sqrt{\frac{3}{2}}c^2 \Rightarrow M = 3\sqrt{\frac{2}{3}}m = \sqrt{6}m$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Παράδειγμα 2: Χρησιμοποιώντας την διωνυμική προσέγγιση:

$$(1+x)^N \;\approx\; 1+Nx+\frac{N(N-1)}{2}x^2$$

και την σχετικιστική έκφραση για την ολική ενέργεια σωματιδίου

$$E \;=\; m\gamma c^2$$

υπολογίστε την ολική ενέργεια σωματιδίου όταν η ταχύτητα του είναι πολύ μικρότερη αυτής του φωτός. Συμπεριλάβετε στο αποτέλεσμα μέχρι όρους της τάξης του $\sim\beta^4$.

Λύση:

Επειδή το β είναι πολύ μικρότερο της μονάδας μπορούμε να εφαρμόσουμε την πιο πάνω διωνυμική σχέση ως έχει. Άρα:

$$E \;=\; m\gamma c^2 \;=\; m(1-\beta^2)^{-1/2}c^2 \;=\; mc^2(1+\frac{\beta^2}{2}+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\beta^4 \;+\ldots+\;) \;\Rightarrow$$

$$E \;=\; mc^2(1+\frac{\beta^2}{2}+\frac{3}{8}\beta^4 \;+\ldots+\;) \;\approx\; mc^2(1+\frac{\beta^2}{2}+\frac{3}{8}\beta^4) \;\Rightarrow$$

$$E \;\approx\; mc^2+mc^2\frac{\beta^2}{2}+mc^2\frac{3}{8}\beta^4 \;=\; mc^2+\frac{1}{2}mV^2+\frac{3}{8}\frac{mV^4}{c^2}$$

Έτσι βλέπουμε ότι για ταχύτητες οι οποίες είναι πολύ μικρότερες της ταχύτητας του φωτός η ολική ενέργεια είναι το άθροισμα τις ενέργειας λόγω μάζας ηρεμίας, συν την κλασσική κινητική ενέργεια. Ακολουθούν δε σχετικιστικές διορθώσεις η μεγαλύτερη των οποίων είναι η

$$\Delta E \;=\; \frac{3}{8}m\frac{V^4}{c^2}$$

και είναι της τάξης του $\sim\beta^4$.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Παράδειγμα 3: Αποδείξτε ότι σωματίδια που έχουν μη μηδενική μάζα δεν μπορούν ποτέ να κινούνται με την ταχύτητα του φωτός και αντιθέτως σωματίδια με μηδενική μάζα πρέπει να κινούνται με την ταχύτητα του φωτός.

Λύση:

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις της σχετικιστικής ορμής και ενέργειας

$$p = m\gamma\beta c \qquad (1)$$

$$E = m\gamma c^2 \qquad (2)$$

$$E = \sqrt{(pc)^2 + m^2c^4} \qquad (3)$$

έχουμε:

$$\beta = \frac{pc}{E} = \frac{1}{E}\sqrt{E^2 - m^2c^4} = \sqrt{1 - \frac{m^2c^4}{E^2}}$$

Έτσι σωματίδια με μη μηδενική μάζα έχουν αναγκαστικά $\beta < 1$ και σωματίδια με μηδενική μάζα έχουν $\beta = 1$.

Μετασχηματισμοί Lorentz για Ενέργεια και Ορμή

Όπως είδαμε οι 3 συνιστώσες της σχετικιστικής ορμής και η ενέργεια δίνονται από:

$$p_x = m\frac{dx}{d\tau} = m\frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = m\gamma\beta_x c$$

$$p_y = m\frac{dy}{d\tau} = m\frac{dy}{dt}\frac{dt}{d\tau} = m\gamma\beta_y c$$

$$p_z = m\frac{dz}{d\tau} = m\frac{dz}{dt}\frac{dt}{d\tau} = m\gamma\beta_z c$$

$$E = m\gamma c^2 = mc^2\frac{dt}{d\tau}$$

Συνεπώς η ορμή $\vec{p}$ πρέπει να μετασχηματίζεται όπως το διάνυσμα $\vec{x}$ και η ενέργεια όπως ο χρόνος t .

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Έτσι οι μετασχηματισμοί Lorentz για ενέργεια και ορμή δίνονται από της σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
E' &= \gamma(E-\beta c p_x) \\
cp'_x &= \gamma(cp_x-\beta E) \qquad (\Lambda 1) \\
cp'_y &= cp_y \\
cp'_z &= cp_z
\end{aligned}
$$

όπου E' , $\vec{p}\,'$ είναι η ενέργεια και η ορμή στο σύστημα **O'** και E , $\vec{p}$ είναι η ενέργεια στο σύστημα **O.** Όπως και πριν το **O'** κινείται με ταχύτητα **V,** στην διεύθυνση του άξονα των **x** , σε σχέση με το **O** και τα β και γ δίνονται όπως και πριν σαν συνάρτηση του **V**.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός (από το **O'** στο **O**) δίνεται από:

$$
\begin{aligned}
E &= \gamma(E'+\beta c p'_x) \\
cp_x &= \gamma(cp'_x+\beta E') \\
cp_y &= cp'_y \\
cp_z &= cp'_z
\end{aligned}
$$

Ας δοκιμάσουμε τους πιο πάνω μετασχηματισμούς στην περίπτωση των φωτονίων. Έστω φωτόνιο που εκπέμπεται στο σύστημα **O** στην κατεύθυνση του άξονα των **x** και έχει ενέργεια $E_\gamma = hf$. Ας δούμε τι ενέργεια έχει το φωτόνιο στο σύστημα **O'** που κινείται με ταχύτητα **V** ως προς το **O** στην κατεύθυνση του άξονα των **x.** Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς (Λ1) έχουμε ότι η ενέργεια του φωτονίου στο **O'** είναι:

$$E' = \gamma(E-\beta c p_\gamma) \qquad (1)$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Επειδή το φωτόνιο έχει μηδενική μάζα έχουμε ότι:

$$E_\gamma = cp_\gamma = h f \qquad (2)$$

Επίσης στο σύστημα **O'** έχουμε ότι:

$$E'_\gamma = cp'_\gamma = h f' \qquad (3)$$

Έτσι από (1), (2) και (3) έχουμε ότι

$$E'_\gamma = \gamma(E_\gamma - \beta c p_\gamma) = \gamma(E_\gamma - \beta E_\gamma) = \gamma(1-\beta) E_\gamma = \sqrt{\frac{1-\beta}{(1+\beta)}} E_\gamma \Rightarrow$$

$$E'_\gamma = \sqrt{\frac{1-\beta}{(1+\beta)}} E_\gamma$$

και η ίδια σχέση εκφρασμένη σε συχνότητες:

$$f' = \sqrt{\frac{1-\beta}{(1+\beta)}} f$$

Δηλαδή καταλήγουμε πάλι στην σχέση του φαινόμενου Doppler.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Παράδειγμα 4: Έστω σωματίδιο με μάζα m, ενέργεια E και ορμή p στο αδρανειακό σύστημα **O** το οποίο κινείται πάνω στον άξονα των **x**. Δείξτε ότι η ποσότητα $E^2-(cp)^2 = m^2c^4$ είναι αναλλοίωτη σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Θεωρήστε αδρανειακό σύστημα **O'** το οποίο κινείται με ταχύτητα **V** ($\beta=V/c, \gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}$) στη διεύθυνση του άξονα των **x** σε σχέση με το **O** και δείξετε ότι η ανάλογη σχέση $E'^2-(cp')^2 = m^2c^4$ ισχύει στο **O'** .

Λύση:

Έστω η σχέση

$$E^2-(cp)^2 = m^2c^4$$

η οποία ισχύει στο αδρανειακό σύστημα **O**.

Οι μετασχηματισμοί του Lorentz για ενέργεια και ορμή στον άξονα των **x** είναι:

$$E' = \gamma(E-\beta cp) \quad \text{(A)}$$

$$cp' = \gamma(cp-\beta E) \quad \text{(B)}$$

Αρχίζουμε από την ποσότητα $E'^2-(cp')^2$ και χρησιμοποιώντας τις (Α) και (Β) την μετασχηματίζουμε σε ποσότητες του συστήματος **O** στο οποίο ξέρουμε ότι ισχύει η σχέση $E^2-(cp)^2 = m^2c^4$.

$$E'^2-(cp')^2 = \gamma^2(E-\beta pc)^2-\gamma^2(cp-\beta E)^2 = \gamma^2(E^2-(pc)^2)+\gamma^2(\beta^2c^2p^2-\beta^2E^2) \Rightarrow$$

$$E'^2-(cp')^2 = \gamma^2m^2c^4+\gamma^2\beta^2(c^2p^2-E^2) \quad (1)$$

Από την (1) χρησιμοποιώντας την $E^2-(cp)^2 = m^2c^4$ έχουμε:

$$E'^2-(cp')^2 = \gamma^2m^2c^4+\gamma^2\beta^2(-m^2c^4) = m^2c^4\gamma^2(1-\beta^2) \Rightarrow$$

$$E'^2-(cp')^2 = m^2c^4$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Παράδειγμα 5: Ουδέτερο πιόνιο, π^0 , διασπάται σε δύο φωτόνια, $\pi^0 \to \gamma\gamma$. Τα φωτόνια έχουν μηδενική μάζα και η μάζα του π^0 είναι $m_{\pi^0}c^2 = 135\,MeV$. (α) Υπολογίστε την ορμή και την ενέργεια των φωτονίων στο αδρανειακό σύστημα του π^0 . (β) Ας υποθέσουμε ότι η ολική ενέργεια του π^0 στο αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου είναι $E_{\pi^0} = 10\,GeV$ και συνεπώς το π^0 κινείται προς κάποια κατεύθυνση την οποία ονομάζουμε x . Έστω επίσης ότι τα φωτόνια εκπέμπονται σε γωνία $\theta = 90^0$ στο σύστημα του πιονίου. Υπολογίστε την ορμή, την ενέργεια και την γωνία των φωτονίων στο σύστημα του εργαστηρίου. (γ) Τι θα άλλαζε στην απάντηση σας όσον αφορά την γωνία αν αντί για π^0 είχαμε ένα σωματίδιο που ονομάζεται η , επίσης με ενέργεια $E_\eta = 10\,GeV$ το οποίο διασπάται και αυτό σε δυο φωτόνια αλλά έχει μάζα $m_\eta c^2 = 548\,MeV$;

Λύση:

(α) Επειδή το φωτόνιο έχει μηδενική μάζα, η ενέργεια του δίνεται από την σχέση:

$$E_\gamma = |\vec{q}_\gamma| c \qquad \text{(A)}$$

όπου $\vec{q}_\gamma$ είναι η ορμή του φωτονίου.

Συνεπώς η διατήρηση της ενέργειας μας δίνει:

$$m_{\pi^0}c^2 = |\vec{q}_{\gamma 1}|c + |\vec{q}_{\gamma 2}|c \qquad (1)$$

όπου $\vec{q}_{\gamma 1}, \vec{q}_{\gamma 2}$ είναι η ορμές των δύο φωτονίων.

Η διατήρηση της ορμής στο σύστημα του π^0 (δηλαδή στο κέντρο μάζας) μας δίνει ότι:

$$0 = \vec{q}_{\gamma 1} + \vec{q}_{\gamma 2} \Rightarrow |\vec{q}_{\gamma 1}| = |\vec{q}_{\gamma 2}| = q_\gamma \qquad (2)$$

Δηλαδή τα δύο φωτόνια εκπέμπονται ακριβώς σε αντίθετες (back-to-back) κατευθύνσεις στο σύστημα του π^0 επειδή η αρχική ορμή στο σύστημα αυτό είναι μηδέν.

Από (1) και (2) έχουμε:

$$m_{\pi^0}c^2 = 2|\vec{q}_\gamma|c \Rightarrow |\vec{q}_\gamma|c = \frac{m_{\pi^0}c^2}{2} \Rightarrow$$

και μέσω της (Α)

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

$$E_\gamma = q_\gamma c = \frac{m_{\pi^0} c^2}{2} = \frac{135\, MeV}{2} = 67.5\, MeV$$ (ενέργεια του κάθε φωτονίου)

Προφανώς η ορμή του κάθε φωτονίου είναι

$$q_\gamma = 67.5\, MeV/c$$

(β) Για να μετατρέψουμε ποσότητες από σύστημα κέντρου μάζας στο σύστημα του εργαστηρίου χρειαζόμαστε τους μετασχηματισμούς Lorentz για ορμή και ενέργεια. Έτσι λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τα φωτόνια εκπέμπονται με γωνία 90 μοιρών στο σύστημα του πιονίου και συνεπώς η ορμή τους είναι πάνω στον άξονα των **y** έχουμε:

$$E^{LAB} = \gamma(E_\gamma^* + \beta c p_x^*) = \gamma E_\gamma^* \qquad (3)$$

$$c p_x^{LAB} = \gamma(c p_x^* + \beta E_\gamma^*) = \gamma\beta E_\gamma^* \qquad (4)$$

$$c p_y^{LAB} = c p_y^* = E_\gamma^* = 67.5\, MeV \qquad (5)$$

$$c p_z^{LAB} = c p_z^* = 0 \qquad (6)$$

$$\tan\theta^{LAB} = \frac{c p_y^{LAB}}{c p_x^{LAB}} = \frac{1}{\beta\gamma} \qquad (7)$$

(μεταβλητές με * αναφέρονται σε ποσότητες στο σύστημα του κέντρου μάζης, δηλαδή του πιονίου)

Όπως φαίνεται χρειαζόμαστε τα γ και $\beta\gamma$ τα οποία υπολογίζονται από την ολική ενέργεια και τη μάζα του πιονίου.

$$E_{\pi^0} = m_{\pi^0}\gamma c^2 \Rightarrow \gamma = \frac{E_{\pi^0}}{m_{\pi^0} c^2} \approx 74.1 \qquad (8)$$

$$\beta^2\gamma^2 + 1 = \gamma^2 \Rightarrow \beta\gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1} \approx 74.1 \qquad (9)$$

Έτσι από την (3) έχουμε $E_\gamma^{LAB} = \gamma E_\gamma^* = 74.1 \times 67.5\ MeV \approx 5\ GeV$ και λόγω του ότι τα φωτόνια έχουν μηδενική μάζα η ορμή των φωτονίων είναι $p_\gamma^{LAB} \approx 5\ GeV/c$.

Από την (7) και (8) έχουμε ότι

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

$$\tan\theta^{LAB} = \frac{1}{\beta\gamma} \approx \frac{1}{74.1} \Rightarrow \tan\theta^{LAB} = 0.0135 \Rightarrow \theta^{LAB} \approx 0.774^0$$

Συνεπώς τα δύο φωτόνια εκπέμπονται σε μία μικρή γωνία από την διεύθυνση του π^0 και έχουν ορμή/ενέργεια ίση με το μισό της ενέργειας του π^0 στο εργαστήριο όπως θα περίμενε κανείς.

(γ) Η μάζα του η είναι 4 φορές μεγαλύτερη της μάζας του π^0 και επειδή το η έχει την ίδια ολική ενέργεια με το π^0 τότε το σχετικιστικό $\gamma = \frac{E_\eta}{m_\eta c^2} \approx 18.248$ και συνεπώς το $\beta\gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1} \approx 18.221$. Άρα έχουμε:

$$\tan\theta^{LAB} = \frac{1}{\beta\gamma} \approx \frac{1}{18.221} \Rightarrow \tan\theta^{LAB} = 0.0549 \Rightarrow \theta^{LAB} \approx 3.14^0$$

Συνεπώς, για την ίδια ολική ενέργεια, όσο πιο βαρύ είναι ένα σωματίδιο τόσο μεγαλύτερη είναι η γωνία.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Πρόβλημα 6: Θετικά φορτισμένο πιόνιο, π^+ με κινητική ενέργεια 100 MeV στο σύστημα του εργαστηρίου, διασπάται σε ένα θετικά φορτισμένο μιόνιο και ένα μιον-νετρίνο μέσω της αντίδρασης $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$.

(α) Υπολογίστε την ορμή και ενέργεια του νετρίνου και του μιονίου στο αδρανειακό σύστημα του πιονίου.

(β) Υπολογίστε την μέγιστη ενέργεια και ορμή του μιονίου στο σύστημα του εργαστηρίου.

(γ) Υπολογίστε την μέγιστη γωνία του μιονίου στο σύστημα του εργαστηρίου.

Οι μάζες του πιονίου και μιονίου δίνονται από $m_{\pi^+} c^2 = 140 \ MeV$ και $m_{\mu^+} c^2 = 106 \ MeV$. Η μάζα του νετρίνου είναι πολλές τάξεις μεγέθους μικρότερη από αυτές του μιονίου και πιονίου και μπορεί να θεωρηθεί ίση με μηδέν σ' αυτή την περίπτωση.

Λύση:

(α) Στο σύστημα του πιονίου (δηλαδή το κέντρο μάζας) ισχύουν τα εξής:

(Α) Η ενέργεια διατηρείται. Έτσι έχουμε:

$$m_{\pi^+} c^2 = E_{\nu_\mu} + E_\mu \qquad (1)$$

(Β) Οι ενέργειες του νετρίνου και μιονίου δίνονται από:

$$E_{\nu_\mu} = \sqrt{(q_{\nu_\mu} c)^2 + m_{\nu_\mu}^2 c^4} = q_{\nu_\mu} c \qquad (2)$$

$$E_\mu = \sqrt{(p_\mu c)^2 + m_\mu^2 c^4} \qquad (3)$$

(Γ) Η ορμή διατηρείται επίσης έτσι έχουμε ότι:

$$\vec{P}_{\pi^+} = 0 = \vec{q}_{\nu_\mu} + \vec{p}_\mu \Rightarrow |\vec{q}_{\nu_\mu}| = |\vec{p}_\mu| = q \qquad (4)$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Από (1), (2) και (3) έχουμε:

$$m_{\pi^+}c^2 = q_{\nu_\mu}c+\sqrt{(p_\mu c)^2+m_\mu^2 c^4} \Rightarrow m_{\pi^+}c^2-qc = \sqrt{(qc)^2+m_\mu^2 c^4} \Rightarrow$$

$$(m_{\pi^+}c^2-qc)^2 = (qc)^2+m_\mu^2 c^4 \Rightarrow$$

$$m_{\pi^+}^2 c^4+q^2 c^2-2m_{\pi^+}c^2 q\, c = (qc)^2+m_\mu^2 c^4 \Rightarrow$$

$$m_{\pi^+}^2 c^4-2m_{\pi^+}c^2 q\, c = m_\mu^2 c^4 \Rightarrow$$

$$m_{\pi^+}^2 c^4-m_\mu^2 c^4 = 2m_{\pi^+}c^2 q c \Rightarrow$$

$$q\, c = \frac{m_{\pi^+}^2 c^4-m_\mu^2 c^4}{2m_{\pi^+}c^2}$$

Αντικαθιστώντας τις μάζες έχουμε:

$$q\, c = \frac{(140 \;\; MeV)^2-(106 \;\; MeV)^2}{2\times(140 \;\; MeV)} = 30 \;\; MeV \Rightarrow q = 30\, MeV/c$$

Αυτή είναι η ορμή το μιονίου καθώς επίσης και του νετρίνου στο κέντρο μάζας.

Από την (2) έχουμε ότι:

$$E_{\nu_\mu} = 30\, MeV$$

και από την (3) ή από (1) έχουμε ότι:

$$E_\mu=110 \;\; MeV$$

(β) Εδώ προφανώς χρειαζόμαστε τους μετασχηματισμούς Lorentz. Έτσι πριν οτιδήποτε άλλο υπολογίζουμε το σχετικιστικό γ που θα μας χρειαστεί έτσι και αλλιώς.

$$\gamma = \frac{E_{\pi^+}}{m_{\pi^+}c^2} \qquad (5)$$

$$E_{\pi^+} = KE_{\pi^+}+m_{\pi^+}c^2 = 100 \;\; MeV+140 \;\; MeV = 240 \;\; MeV \qquad (6)$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–10, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

και από (5) και (6) έχουμε:

$$\gamma = \frac{240 \;\; MeV}{140 \;\; MeV} = 1.71$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \beta^2 = 1-\frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \Rightarrow$$

$$\beta = 0.812$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τους μετασχηματισμούς Loretntz συμπεραίνουμε ότι το μιόνιο έχει την μέγιστη ενέργεια του όταν εκπέμπεται στη κατεύθυνση του πιονίου. Έτσι έχουμε:

$$E_\mu^{LAB} = \gamma\left(E_\mu+\beta\, p_\mu c\right) = 1.71\times\left(110+0.812\times30\right)MeV \approx 230\,MeV$$

σ' αυτή την περίπτωση το νετρίνο εκπέμπεται στην κατεύθυνση που είναι αντίθετη με αυτή του πιονίου/μιονίου και έχει ενέργεια/ορμή στο σύστημα του εργαστηρίου ίση με:

$$E_\nu^{LAB} = \gamma\left(E_\nu-\beta\, p_\nu c\right) = 1.71\times\left(30-0.812\times30\right)MeV \approx 10\,MeV$$

(γ) Το μιόνιο εκπέμπεται με την μέγιστη γωνία στο σύστημα του εργαστηρίου όταν εκπέμπεται στο σύστημα του πιονίου σε γωνία 90^0 . Έτσι στο σύστημα του πιονίου έχουμε:

$$(cp_\mu)_x = 0 \quad \text{και} \quad (c\,p_\mu)_y = 30\,MeV$$

Στο σύστημα του εργαστηρίου έχουμε χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Loretntz ότι:

$$(cp_\mu)_x^{LAB} = \gamma\left[(cp_\mu)_x+\beta\,E_\mu\right] = \gamma\,\beta\,E_\mu$$

$$(c\,p_\mu)_y^{LAB} = (c\,p_\mu)_y = 30\,MeV$$

Συνεπώς η μέγιστη γωνία που μπορεί να εκπεμφθεί το μιόνιο στο εργαστήριο δίνεται από:

$$\tan\theta^{LAB} = \frac{(c\,p_\mu)_y^{LAB}}{(cp_\mu)_x^{LAB}} = \frac{(c\,p_\mu)_y}{\gamma\,\beta\,E_\mu} = \frac{30\,MeV}{1.71\times0.812\times110\,MeV} \approx 0.196 \Rightarrow \theta^{LAB} \approx 11.1^0$$