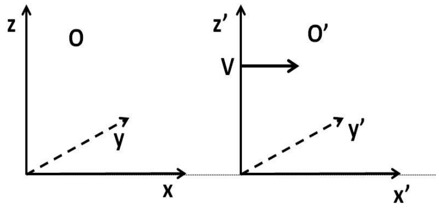
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διδάσκοντες: Κ. Φουντάς, Σ. Κοέν

“ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι”

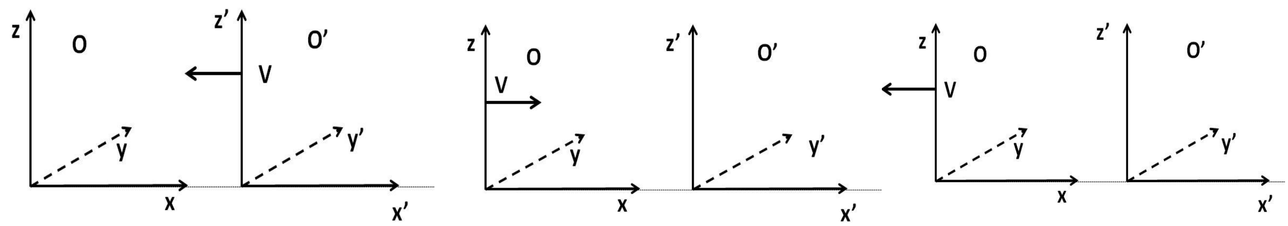
12 – 9 – 2012

<u>Θέμα 1ο</u>: Όταν ένα αδρανειακό σύστημα **O'** κινείται με ταχύτητα **V** σε σχέση με αδρανειακό σύστημα **O** και η ταχύτητα **V** είναι στη διεύθυνση των αξόνων **x-x',** τότε ο μετασχηματισμός Lorentz που μετασχηματίζει τις μεταβλητές χρόνου και χώρου από το **O** στο **O'** δίνεται από:



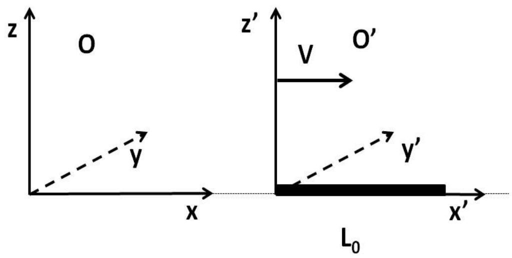
$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$
$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

όπου $\beta = V/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ και **c** είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό, υπό την προϋπόθεση ότι την χρονική στιγμή $t = t'$ τα δύο αδρανειακά συστήματα ταυτίζονται. Διατυπώστε τούς μετασχηματισμούς Lorentz που μετασχηματίζουν τις μεταβλητές χρόνου και χώρου <u>από το **O** στο **O'**</u> για τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις και αιτιολογήστε την απάντηση σας:



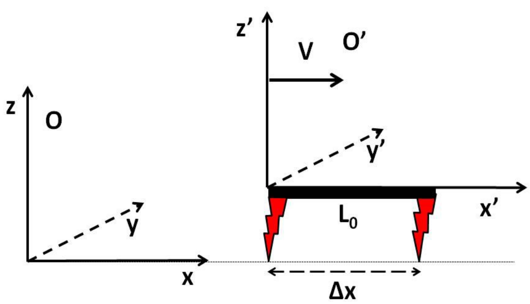
(α) (β) (γ) [6 μονάδες]

(δ) Ράβδος μήκους L_0 κινείται με ταχύτητα V στην διεύθυνση το θετικού άξονα x αδρανειακού συστήματος **O** όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. (1) Δώστε το ορισμό της μέτρησης μήκους και (2) Χρησιμοποιώντας τούς μετασχηματισμούς Lorentz αποδείξτε την σχέση της συστολής του μήκους της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.



[6 μονάδες]

(ε) Ας υποθέσουμε ότι η ράβδος του (δ) είναι εφοδιασμένη με ηλεκτρονικό σύστημα το οποίο εκπέμπει σπινθήρες ταυτόχρονα από τα άκρα της ράβδου. Οι σπινθήρες κινούνται στην κατεύθυνση του αρνητικού άξονα **z** όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και αφήνουν ίχνη πάνω σε χάρακα απείρου μήκους πάνω στον άξονα **x** του **O** τα οποία απέχουν μεταξύ τους κατά Δx . Η απόσταση μεταξύ των αξόνων x και x' θεωρείται αμελητέα όπως και στο (δ). (1) Χρησιμοποιώντας τούς μετασχηματισμούς Lorentz υπολογίστε την απόσταση Δx . (2) Γιατί το αποτέλεσμα σας είναι διαφορετικό από αυτό που υπολογίσατε στο (δ) ;



[4 μονάδες]

(ζ) Ένας κύβος έχει όγκο $10\,cm^3$, όπως μετράται από παρατηρητή που βρίσκεται σε ηρεμία σε σχέση με τον κύβο. Δεύτερος παρατηρητής (ευρισκόμενος σε ηρεμία στο σύστημα **O'** κινείται με ταχύτητα $0.9c$ σε σχέση με τον πρώτο κατά τη διεύθυνση μιας από τις ακμές του κύβου. Υπολογίστε τον όγκο που βλέπει ο δεύτερος παρατηρητής.

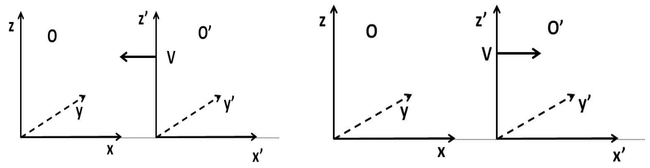
[4 μονάδες]

Λύση:

(α) Η περίπτωση του διπλανού σχήματος είναι η ίδια με αυτή της εκφώνησης με τη διαφορά ότι η ταχύτητα έχει αρνητικό πρόσημο.

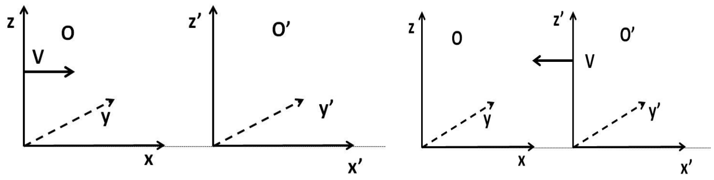
Συνεπώς

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct + \beta x) \\ x' &= \gamma(x + \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$



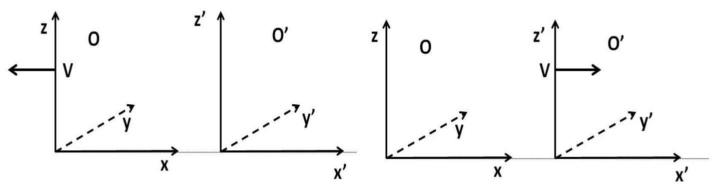
(β) Σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας η περίπτωση (β) είναι ίδια με την (α). Άρα

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct + \beta x) \\ x' &= \gamma(x + \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$



(γ) Σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας η περίπτωση (γ) είναι ίδια με αυτή της εκφώνησης. Άρα

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$



(δ) Το μήκος μιας ράβδου σε ένα αδρανειακό σύστημα **O** είναι ίσο με την διαφορά των θέσεων των άκρων της ράβδου <u>όταν αυτές μετρούνται ταυτόχρονα στο σύστημα **O**</u>. Επειδή θέλουμε να υπολογίσουμε το μήκος της ράβδου στο **O** έχουμε ότι

$$\Delta t = 0, \quad \Delta x = L, \quad \Delta x' = L_0$$

Συνεπώς

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) \Rightarrow \Delta x' = \gamma \Delta x \Rightarrow L_0 = \gamma L \Rightarrow L = L_0/\gamma$$

(ε) Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\Delta t' = 0, \quad \Delta x, \quad \Delta x' = L_0$$

Συνεπώς

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + \beta c \Delta t') \Rightarrow \Delta x = \gamma \Delta x' = \gamma L_0$$

Το αποτέλεσμα είναι διαφορετικό από το (δ) διότι οι σπινθήρες δεν φτάνουν ταυτόχρονα στο **O** (αφού εκπέμπονται ταυτόχρονα στο O') αλλά με διαφορά χρόνου που μπορεί να υπολογιστεί από τους μετασχηματισμούς Lorentz.

$$c\Delta t = \gamma(c\Delta t' + \beta \Delta x') = \gamma \beta \Delta x' = \gamma \beta L_0 \Rightarrow \Delta t = \gamma \beta L_0 / c$$

Συνεπώς το Δx είναι όντως η απόσταση των ιχνών των σπινθήρων στο **O** αλλά δεν είναι το μήκος της ράβδου στο **O** και γι' αυτό είναι διαφορετικό από αποτέλεσμα στο (δ).

(ζ) Ο όγκος του κύβου τον οποίο μετρά ο παρατηρητής πάνω στον κύβο είναι $V = a^3$ όπου a η ακμή του κύβου. Ο κινούμενος παρατηρητής μετρά μόνο την ακμή στην διεύθυνση της κίνησης να συστέλλεται στο σύστημα του. Άρα μετρά όγκο ίσο με $V' = a^3/\gamma$ όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 1/\sqrt{1-0.9^2} \approx 2.3$.

Έτσι $V' = a^3/\gamma = 10/2.3 = 4.4 \ cm^3$

Θέμα 2ο: Μία δέσμη θετικά φορτισμένων καονίων K^+ με ορμή ίση με $p = \sqrt{3} m_{K^+} c$, διαπερνά δύο μετρητές φορτισμένων σωματιδίων (counters) οι οποίοι βρίσκονται σε απόσταση $D = 9\mathrm{m}$. Όπου m_{K^+} είναι η μάζα του K^+ και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Η δέσμη δεν χάνει ταχύτητα όταν διαπερνά τους μετρητές. Ο πρώτος μετρητής μετρά 1000 σωματίδια και ο δεύτερος 250 σωματίδια. Η διαφορά αποδίδεται στις διασπάσεις των καονίων στην πορεία τους από τον ένα μετρητή στον άλλο.

(1) Υπολογίστε το γινόμενο $\beta\gamma$. [4 μονάδες]

(2) Δείξτε ότι $\beta^2\gamma^2 + 1 = \gamma^2$. [8 μονάδες]

(3) Υπολογίστε το μέσο χρόνο ζωής του K^+ . [8 μονάδες]

Ο νόμος των ραδιενεργών διασπάσεων δίνεται από την σχέση $N(t) = N(0)\exp(-t/\tau)$ όπου τ είναι ο μέσος χρόνος ζωής του σωματιδίου <u>στο αδρανειακό σύστημα του σωματιδίου</u>. Η σχετικι-στική ορμή είναι $p = m\beta\gamma c$.

<u>Λύση:</u>

$$p = \sqrt{3} m_{K^+} c \;,\; D = 9\mathrm{m} \;,\; N(t) = 250, \quad N(0) = 1000$$

(1) $$p = m_{K^+}\beta\gamma c = \sqrt{3} m_{K^+} c \Rightarrow \beta\gamma = \sqrt{3}$$

(2) $$\beta^2\gamma^2 + 1 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + 1 = \frac{\beta^2+1-\beta^2}{1-\beta^2} = \gamma^2$$

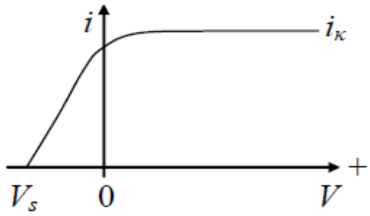
(3) Στο σύστημα του εργαστηρίου έχουμε ότι $N(t) = N(0)\exp(-t/\gamma\tau)$ διότι ο χρόνος ζωής του καονίου υπόκειται σε διαστολή χρόνου. Έτσι

$$N(t) = N(0)\exp(-t/\gamma\tau) \Rightarrow \ln\left(\frac{N(t)}{N(0)}\right) = -\frac{t}{\gamma\tau} = -\frac{D}{\beta c\gamma\tau} \Rightarrow$$

$$\tau = -\frac{D}{c\,\beta\gamma\ln\left(\frac{N(t)}{N(0)}\right)} = -\frac{D}{c\sqrt{3}\ln\left(\frac{N(t)}{N(0)}\right)} = -\frac{9\,m}{3\times10^8\,m\,s^{-1}\sqrt{3}\ln\left(\frac{250}{1000}\right)} = 12.5\,nsec$$

Αυτός είναι ο πιο σύντομος τρόπος λύσης. Φυσικά κάποιος θα μπορούσε από (2) και (3) να βγάλει ότι το $\gamma = 2$ και $\beta = \sqrt{3}/2$ και με αυτά να υπολογίσει το χρόνο και να αντικαταστήσει στην (3).

<u>Θέμα 3ο</u>: Σε πείραμα μελέτης του φωτοηλεκτρικού φαινομένου, επιφάνεια του μετάλλου Li φωτίζεται με ορατή ακτινοβολία μήκους κύματος $\boldsymbol{\lambda = 500.5\, nm}$.



(α) Δείξτε ότι $\boldsymbol{1 \;\; eV = 1.6 \times 10^{-19} J}$. [5 μονάδες]

(β) Εάν η τάση αποκοπής είναι $\boldsymbol{|V_s| = 0.18 \;\; Volt}$, ποιο είναι το έργο εξαγωγής **Φ** του Li. [10 μονάδες]

(γ) Η επιφάνεια του μετάλλου είναι $\boldsymbol{S = 2 \;\; cm^2}$ και η ένταση της φωτεινής πηγής είναι $\boldsymbol{I = 5 \;\; mW/cm^2}$. Εκφράστε την ισχύ της προσπίπτουσας ακτινοβολίας πάνω στο μέταλλο ως αριθμό φωτονίων ανά μονάδα χρόνου. [10 μονάδες]

(δ) Έστω ότι το κάθε προσπίπτον φωτόνιο εξάγει πάντα ένα ηλεκτρόνιο. Υπολογίστε το ρεύμα κόρου $\boldsymbol{i_\kappa}$ εκφρασμένο σε Amperes. [5 μονάδες]

Δίδονται ότι $e = 1.6 \times 10^{-19} Cb$, $h = 6.62 \times 10^{-34} J \cdot s$, $\hbar c = 197.3\, MeV\; fm$ και $c = 3 \times 10^8 m/s$.

<u>Λύση:</u>

(α)

$$W = qV = 1.6 \times 10^{-19} \;\; Cb \times 1 \;\; Volt = 1.6 \times 10^{-19} J \Rightarrow 1eV = 1.6 \times 10^{-19} J$$

(β)

$$h\nu = eV_s + \Phi \Rightarrow \Phi = h\nu - eV_s = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} - eV_s \Rightarrow$$

$$\Phi = \frac{(6.28 \times 197.3 \times MeV \times fm)}{500.5\, nm} - 0.18\, eV = 2.48\, eV - 0.18\, eV = 2.3\, eV$$

(γ)

$$P = \frac{5\, mW}{cm^2} \times 2 \;\; cm^2 = 10 \;\; mW = 10^{-2} \;\; \frac{Joule}{sec} \qquad (1)$$

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι

$$h\nu = 2.48 \;\; eV \qquad (2)$$

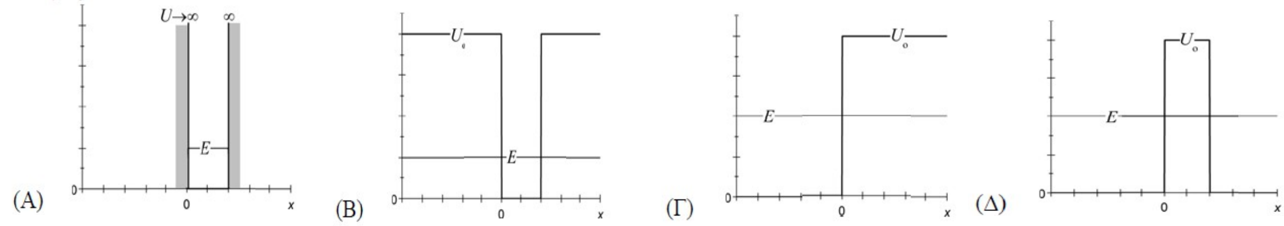
Συνεπώς

$$\frac{\#\;\; \varphi\omega\tau\acute{o}\nu\iota\alpha}{sec} = \frac{10^{-2} \;\; Joule}{2.48 \times eV \times sec} = \frac{10^{-2} \;\; Joule}{2.48 \times 1.6 \times 10^{-19} Joule \times sec} = 0.25 \times 10^{17} \;\; \frac{\varphi\omega\tau\acute{o}\nu\iota\alpha}{sec}$$

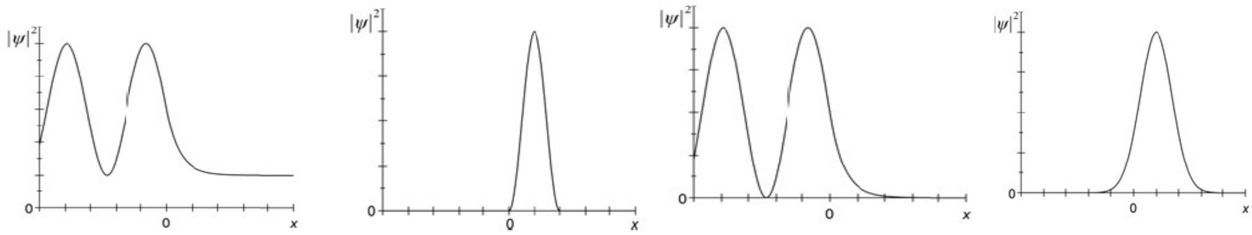
(δ)

$$i_\kappa = 0.25 \times 10^{17} \times 1.6 \times 10^{-19} \;\; \frac{Cb}{sec} = 0.4 \times 10^{-2} \;\; A = 4 \;\; mA$$

<u>Θέμα 4ο:</u> Τα παρακάτω διαγράμματα (Α-Δ) δείχνουν τέσσερις μορφές δυναμικής ενέργειας $U(x)$ ενός σωματιδίου με ολική ενέργεια **Ε**.



Τα διαγράμματα (1-4) που ακολουθούν παριστάνουν τετράγωνα κυματοσυναρτήσεων τα οποία αποτελούν λύσεις της εξίσωσης του Schöndinger για τις δυναμικές ενέργειες (Α-Δ).



(1) (2) (3) (4)

Σε όλα τα διαγράμματα η κλίμακα του άξονα **x** είναι η ίδια. Αντιστοιχίστε **αιτιολογημένα** τα διαγράμματα (Α-Δ) με τα διαγράμματα (1-4). [4 x 7.5 μονάδες]

<u>Λύση:</u>

(Α) Το δυναμικό αυτό είναι φρέαρ άπειρου δυναμικού. Συνεπώς η κυματοσυνάρτηση πρέπει να μηδενίζεται έξω από το φρέαρ. Άρα η λύση είναι το (2)

(Β) Το δυναμικό αυτό είναι φρέαρ πεπερασμένου δυναμικού και η ολική ενέργεια του σωματιδίου είναι μικρότερη από το δυναμικό. Συνεπώς η κυματοσυνάρτηση του δέσμιου σωματιδίου είναι μη μηδενική εντός του φρέατος αλλά επεκτείνεται και εκτός φρέατος με πιθανότητα η οποία φθίνει εκθετικά. Άρα η λύση είναι το (4).

(Γ) Το δυναμικό αυτό είναι κατώφλι πεπερασμένου δυναμικού απείρου εύρους και η ολική ενέργεια του σωματιδίου είναι μικρότερη από το δυναμικό. Το σωματίδιο ανακλάται από το δυναμικό αλλά υπάρχει και μία εκθετικά φθίνουσα πιθανότητα το σωματίδιο να εισέλθει στο χώρο του δυναμικού. Άρα η λύση είναι το (3).

(Δ) Το δυναμικό αυτό είναι κατώφλι πεπερασμένου δυναμικού και πεπερασμένου εύρους. Η ολική ενέργεια τού σωματιδίου είναι μικρότερη από το δυναμικό. Συνεπώς υπάρχει μία μη μηδενική πιθανότητα ένα ποσοστό των σωματιδίων να περάσει το κατώφλι. Άρα η λύση είναι το (1).