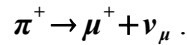


Θέμα Β

Θετικά φορτισμένο πιόνιο, π^+ με κινητική ενέργεια **100 MeV** στο σύστημα του εργαστηρίου, διασπάται σε ένα θετικά φορτισμένο μιονίο και ένα μιον-νεutrino μέσω της αντίδρασης



(α) Υπολογίστε την ορμή και ενέργεια του νεutrino και του μιονίου στο αδρανειακό σύστημα του πιονίου.

(β) Υπολογίστε την ολική ενέργεια του π^+ καθώς και τα β, γ του π^+ στο σύστημα του εργαστηρίου.

(γ) Υπολογίστε την μέγιστη ενέργεια και ορμή του μιονίου στο σύστημα του εργαστηρίου.

Τυπολόγιο

Οι μάζες του πιονίου και μιονίου δίνονται από $m_{\pi^+}c^2 = 140 \text{ MeV}$ και $m_{\mu^+}c^2 = 106 \text{ MeV}$. Η μάζα του νεutrino είναι πολλές τάξεις μεγέθους μικρότερη από αυτές του μιονίου και πιονίου και μπορεί να θεωρηθεί ίση με μηδέν σ' αυτή την περίπτωση.

Οι μετασχηματισμοί του Lorentz για ενέργεια και ορμή από το σύστημα **O** στο **O'** δίνονται από:

$$E' = \gamma(E - \beta cp_x)$$

$$cp'_x = \gamma(cp_x - \beta E)$$

$$cp'_y = cp_y$$

$$cp'_z = cp_z$$

όπου E, p_x, p_y, p_z είναι η ενέργεια και οι τρεις συντεταγμένες της ορμής στο αδρανειακό σύστημα **O** και E', p'_x, p'_y, p'_z οι ίδιες ποσότητες στο αδρανειακό σύστημα **O'**. Οι μεταβλητές β, γ δίδονται από τις σχέσεις:

$$\beta = V/c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

όπου V είναι η ταχύτητα του αδρανειακού συστήματος **O'** σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα **O** και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Λύση:

(α) Στο σύστημα του πιονίου (δηλαδή το κέντρο μάζας) ισχύουν τα εξής:

(Α) Η ενέργεια διατηρείται. Έτσι έχουμε:

$$m_{\pi^+} c^2 = E_{\nu_\mu} + E_\mu \quad (1)$$

(Β) Οι ενέργειες του νετρίνου και μιονίου δίνονται από:

$$E_{\nu_\mu} = \sqrt{(q_{\nu_\mu} c)^2 + m_{\nu_\mu}^2 c^4} = q_{\nu_\mu} c \quad (2)$$

$$E_\mu = \sqrt{(p_\mu c)^2 + m_\mu^2 c^4} \quad (3)$$

(Γ) Η ορμή διατηρείται επίσης έτσι έχουμε ότι:

$$\vec{P}_{\pi^+} = \mathbf{0} = \vec{q}_{\nu_\mu} + \vec{p}_\mu \Rightarrow |\vec{q}_{\nu_\mu}| = |\vec{p}_\mu| = q \quad (4)$$

Από (1), (2) και (3) έχουμε:

$$\begin{aligned} m_{\pi^+} c^2 &= q_{\nu_\mu} c + \sqrt{(p_\mu c)^2 + m_\mu^2 c^4} \Rightarrow m_{\pi^+} c^2 - q c = \sqrt{(q c)^2 + m_\mu^2 c^4} \Rightarrow \\ (m_{\pi^+} c^2 - q c)^2 &= (q c)^2 + m_\mu^2 c^4 \Rightarrow \\ m_{\pi^+}^2 c^4 + q^2 c^2 - 2 m_{\pi^+} c^2 q c &= (q c)^2 + m_\mu^2 c^4 \Rightarrow \\ m_{\pi^+}^2 c^4 - 2 m_{\pi^+} c^2 q c &= m_\mu^2 c^4 \Rightarrow \\ m_{\pi^+}^2 c^4 - m_\mu^2 c^4 &= 2 m_{\pi^+} c^2 q c \Rightarrow \\ q c &= \frac{m_{\pi^+}^2 c^4 - m_\mu^2 c^4}{2 m_{\pi^+} c^2} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις μάζες έχουμε:

$$q c = \frac{(140 \text{ MeV})^2 - (106 \text{ MeV})^2}{2 \times (140 \text{ MeV})} = 30 \text{ MeV} \Rightarrow q = 30 \text{ MeV}/c$$

Αυτή είναι η ορμή του μιονίου καθώς επίσης και του νετρίνου στο κέντρο μάζας.

Από την (2) έχουμε ότι:

$$E_{\nu_\mu} = 30 \text{ MeV}$$

και από την (3) ή από (1) έχουμε ότι:

$$E_\mu = 110 \text{ MeV}$$

(β) Εδώ προφανώς χρειαζόμαστε τους μετασχηματισμούς Lorentz. Έτσι πριν οτιδήποτε άλλο υπολογίζουμε το σχετικιστικό γ που θα μας χρειαστεί έτσι και αλλιώς.

$$\gamma = \frac{E_{\pi^+}}{m_{\pi^+} c^2} \quad (5)$$

$$E_{\pi^+} = KE_{\pi^+} + m_{\pi^+} c^2 = 100 \text{ MeV} + 140 \text{ MeV} = 240 \text{ MeV} \quad (6)$$

και από (5) και (6) έχουμε:

$$\gamma = \frac{240 \text{ MeV}}{140 \text{ MeV}} = 1.71$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \beta^2 = 1-\frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \Rightarrow$$

$$\beta = 0.812$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τους μετασχηματισμούς Lorentz συμπεραίνουμε ότι το μόνιο έχει την μέγιστη ενέργεια του όταν εκπέμπεται στη κατεύθυνση του πιονίου. Έτσι έχουμε:

$$E_{\mu}^{LAB} = \gamma(E_{\mu} + \beta p_{\mu} c) = 1.71 \times (110 + 0.812 \times 30) \text{ MeV} \approx 230 \text{ MeV}$$

και

$$(p_{\mu} c) = \sqrt{(E_{\mu}^{LAB})^2 - m_{\mu}^2 c^4} = \sqrt{(230 \text{ MeV})^2 - (106 \text{ MeV})^2} \approx 204 \text{ MeV} \Rightarrow p_{\mu} \approx 204 \text{ MeV}/c$$

Σ' αυτή την περίπτωση το νεutrino εκπέμπεται στην κατεύθυνση που είναι αντίθετη με αυτή του πιονίου/μιονίου και έχει ενέργεια/ορμή στο σύστημα του εργαστηρίου ίση με:

$$E_{\nu}^{LAB} = \gamma(E_{\nu} - \beta p_{\nu} c) = 1.71 \times (30 - 0.812 \times 30) \text{ MeV} \approx 10 \text{ MeV}$$