Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Κβάντωση της Ενέργειας - Μέλαν Σώμα

06/02/13

Σκοπός της ενδέκατης διάλεξης:

- Να εισάγει τις πρώτες ιδέες για την κβάντωση της ενέργειας όπως παρουσιάστηκαν αρχικά από τον Max Planck.
- Να παρουσιάσει τους βασικούς υπολογισμούς της θεωρίας αυτής με του οποίους οφείλουν να εξοικειωθούν οι φοιτητές.
- Να δώσει παραδείγματα της χρήσης της θεωρίας του μέλανος σώματος για την επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής.

Κβαντικές θεωρίες – Σύντομη ιστορική ανασκόπηση:

Η κλασσική φυσική (μηχανική, ηλεκτρομαγνητισμός και η σχετικότητα) περιγράφουν σωστά τα φαινόμενα του μακρόκοσμου τα οποία εκτείνονται από φαινόμενα της καθημερινής μας ζωής μέχρι και φαινόμενα αστροφυσικής. Όμως στις αρχές του 20^{ου} αιώνα μία σειρά από πειραματικά αποτελέσματα έθεσαν σε αμφισβήτηση την κλασσική περιγραφή φαινομένων του μικρόκοσμου δηλαδή των φαινομένων τα οποία έχουν χαρακτηριστικό μήκος το οποίο είναι της ιδίας τάξης με το μέγεθος ενός ατόμου ή μικρότερο. Μερικά από τα πιο γνωστά από τα φαινόμενα αυτά ήταν η ακτινοβολία του μέλανος σώματος, το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και το φαινόμενο Compton καθώς και τα γραμμικά φάσματα εκπομπής και απορρόφησης των ατόμων. Η μελέτη των φαινομένων αυτών καθώς και η θεωρίες οι οποίες τα περιγράφουν και τα εξηγούν αποτελεί το κύριο θέμα του δεύτερου μισού του μαθήματος Σύγχρονη Φυσική Ι.

Όπως ήταν επόμενο οι φυσικοί της εποχής δημιούργησαν μοντέλα και θεωρίες που εξηγούσαν αυτά τα φαινόμενα. Έτσι γεννήθηκαν οι πρώτες **κβαντικές θεωρίες** από τούς Max Plank, Albert Einstein, de Broglie, και Niels Bohr. Η θεωρίες αυτές κατάφεραν να εξηγήσουν μερικά από τα πιο τρανταχτά πειραματικά δεδομένα και αποτελέσματα όπως το φάσμα του μέλανος σώματος, το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και το φαινόμενο Compton. Η πρώτη Κβαντική θεωρία για το άτομο του υδρογόνου του Niels Bohr μπόρεσε να εξηγήσει σε γενικές γραμμές το γραμμικό φάσμα που παρατηρείτο χωρίς όμως να μπορεί να περιγράψει σωστά όλες τις φασματικές γραμμές.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Πλήρης κατανόηση του ατομικού φάσματος του υδρογόνου ήρθε αργότερα όταν οι Erwin Schrödinger και Werner Heisenberg θεμελίωσαν τη σημερινή μη-σχετικιστική **Κβαντική Μηχανική** η οποία (με επί πλέον σχετικιστικές διορθώσεις και εισαγωγή του σπίν) περιγράφει όλα τα ατομικά φαινόμενα.

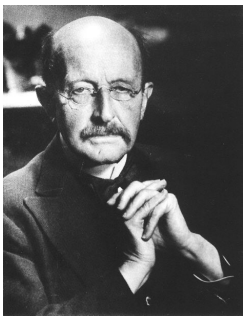
Η **Σχετικιστική Κβαντική Μηχανική**, δηλαδή η θεωρία η οποία ενοποίησε την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας του Albert Einstein με την Κβαντική Μηχανική θεμελιώθηκε από τον Paul Dirac το 1928 και έκανε μία πολύ σημαντική πρόβλεψη, την ύπαρξη των αντι-σωματιδίων. Προέβλεψε δηλαδή ότι για κάθε σωματίδιο υπάρχει το αντίστοιχο αντι-σωματίδιο το οποίο έχει την ίδια μάζα αλλά αντίθετο φορτίο. Η θεωρία αυτή προβλέπει επίσης ότι τα ηλεκτρόνια εκτός από την τροχιακή στροφορμή έχουν και ένα καινούριο είδος 'εσωτερικής' στροφορμής, το σπίν, το οποίο στην θεωρία των Erwin Schrödinger και Werner Heisenberg εισάγεται εμπειρικά (με το χέρι όπως λέμε) για να εξηγήσει τα ατομικά φάσματα ενώ στην Σχετικιστική Κβαντική Μηχανική αποτελεί πρόβλεψη και αναπόσπαστο κομμάτι της θεωρίας.

Παρ' όλες τις επιτυχίες της, η Σχετικιστική Κβαντική Μηχανική αναφερόταν πάντα στις ιδιότητες ενός σωματιδίου και δεν προέβλεπε φαινόμενα που είχαν αρχίσει να παρατηρούνται στο εργαστήριο κατά τα οποία καταστρέφονται ή δημιουργούνται ένα ή περισσότερα σωματίδια. Κλασσικό παράδειγμα είναι αυτό της δημιουργίας ύλης και αντι-ύλης από ακτινοβολία όπως το φαινόμενο της δίδυμου γέννεσης ηλεκτρονίου-ποσιτρονίου από φωτόνιο. Αντίστοιχα η Σχετικιστική Κβαντική Μηχανική δεν μπορούσε να ερμηνεύσει την αλλοιλοεξαφάνιση ζεύγους ηλεκτρονίου-ποσιτρονίου με παραγωγή δύο φωτονίων. Η ανάγκη για να εξηγηθούν τα φαινόμενα αυτά γέννησε την **Κβαντική Θεωρία Πεδίου** η οποία θεμελιώθηκε από μία σειρά φυσικούς αρχίζοντας από τους Wolfgang Pauli και Werner Heisenberg. Η Κβαντική Θεωρία Πεδίου αποτελεί την πραγματική ενοποίηση της Κβαντικής Φυσικής με την Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας.

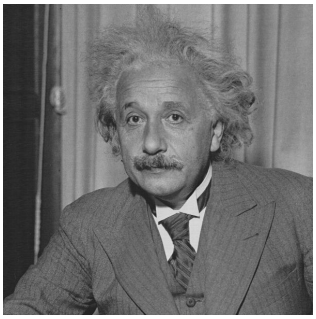
Το **Καθιερωμένο Πρότυπο** της σωματιδιακής φυσικής το οποίο μέχρι σήμερα βρίσκεται σε απόλυτη συμφωνία με όλα τα πειραματικά δεδομένα είναι η πιο επιτυχής Κβαντική Θεωρία Πεδίου που έχει δημιουργηθεί μέχρι σήμερα.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Φυσικοί του 20ου αιώνα που θεμελίωσαν την Κβαντική Θεωρία

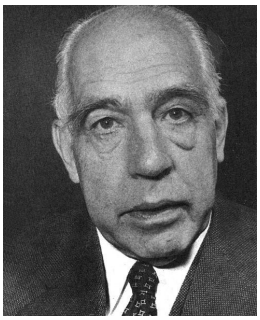


Max Plank
(1858-1947)



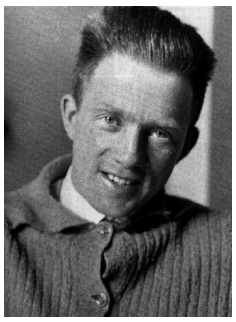
Albert Einstein
(1879-1955)

de Broglie
(1892-1987)

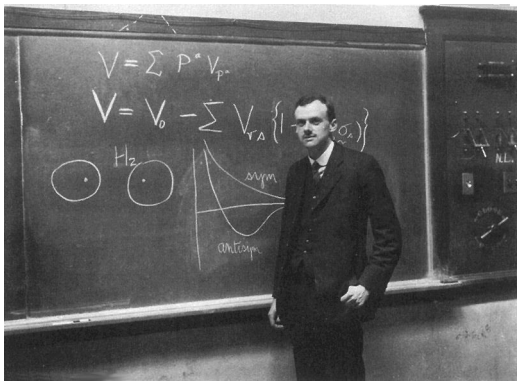


Niels Bohr
(1885-1962)

Erwin Schrödinger
(1887-1961)



Werner
Heisenberg
(1901-1976)



Paul Dirac (1902-1984)

Wolfgang Pauli
(1900-1958)

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Η Ακτινοβολία του Μέλανος Σώματος (Black Body Radiation)

Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα οι φυσικοί προσπάθησαν να κατανοήσουν την φωτεινή ακτινοβολία και τον μηχανισμό εκπομπής και απορρόφησης της ακτινοβολίας αυτής από την ύλη χρησιμοποιώντας την κλασσική θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού που είχε θεμελιωθεί από τον James Clerk Maxwell περίπου 40 χρόνια πιο πριν. Στην προσπάθεια τους αυτή ανακάλυψαν ότι **η φωτεινή ακτινοβολία είναι ηλεκτρομαγνητικής φύσης**. Δηλαδή είναι ηλεκτρομαγνητικά κύματα τα οποία έχουν πολύ μεγαλύτερη συχνότητα από τα κύματα της τηλεόρασης ή του ραδιοφώνου και διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός. Ο μηχανισμός εκπομπής και απορρόφησης σύμφωνα με την κλασσική φυσική είναι ο εξής:

Σύμφωνα με τη θεωρία του Maxwell φορτισμένα σωματίδια εκπέμπουν ακτινοβολία όταν επιταχύνονται ή επιβραδύνονται η οποία κινείται με την ταχύτητα του φωτός. Η εκπομπή αυτή είχε αποδειχτεί πειραματικά από τον Hertz. Ποιοτικά λοιπόν, επειδή το ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι ένα κύμα ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, το οποίο όταν έρχεται σε επαφή με την ύλη θέτει σε ταλάντωση τα φορτισμένα σωματίδια τα οποία βρίσκονται μέσα στην ύλη. Έτσι έχουμε μεταφορά ενέργειας από το κύμα στην ύλη και έτσι εξηγείται κλασσικά η απορρόφηση της ακτινοβολίας. Τα ταλαντωνόμενα σωματίδια με τη σειρά τους, επειδή επιταχύνονται και επιβραδύνονται κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης, εκπέμπουν ακτινοβολία.

Ένα παράδειγμα φάσματος εκπομπής φαίνεται στο Σχήμα 1 για διαφορετικές θερμοκρασίες του εκπέμποντος υλικού. Ο άξονας-y του Σχήματος 1 δίνεται σε μονάδες **ενεργειακής πυκνότητας**

$$u(f) = \frac{\Delta E}{\Delta V\, \Delta f} \sim \frac{Joule}{m^3\, Hz}$$

Δηλαδή ενέργεια ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα συχνότητας. Ο άξονας-x του Σχήματος 1 δίνεται σε μονάδες ενέργειας διότι όπως είδαμε στο κεφάλαιο της σχετικότητας το φως , όπως και κάθε είδος ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, αποτελείται από σωματίδια, τα φωτόνια, των οποίων η ενέργεια είναι ανάλογη της συχνότητας. Ο λόγος για αυτό δεν συζητήθηκε στο κεφάλαιο της σχετικότητας και αποτελεί το κεντρικό θέμα του παρόντος κεφαλαίου. **Γιατί δηλαδή το φως διαδίδεται σε διακριτά κβάντα ενέργειας το κάθε ένα από τα οποία έχει ενέργεια**

$$E = hf$$

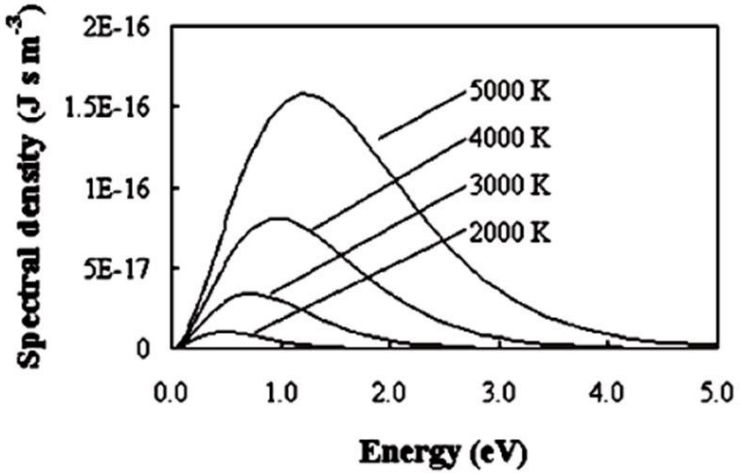
όπου h η σταθερά του Planck και f η συχνότητα.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Οι πρώτες μετρήσεις του φάσματος της ακτινοβολίας εκπομπής από διάφορα υλικά έδειξαν ότι

1. **Το φάσμα εκπομπής ήταν ανεξάρτητο του υλικού εκπομπής.**
2. **Αντιθέτως το φάσμα εκπομπής παρουσιάζει σημαντική εξάρτηση από τη θερμοκρασία.**
3. **Η κατανομή του φάσματος παρουσιάζει μέγιστο για κάποια συχνότητα f_{max} ή μήκος κύματος λ_{max}. Όσο αυξάνεται η θερμοκρασία τόσο αυξάνεται η f_{max} και κατά συνέπεια ελαττώνεται το λ_{max}.** Αυτό φαίνεται καθαρά στο Σχήμα 1.

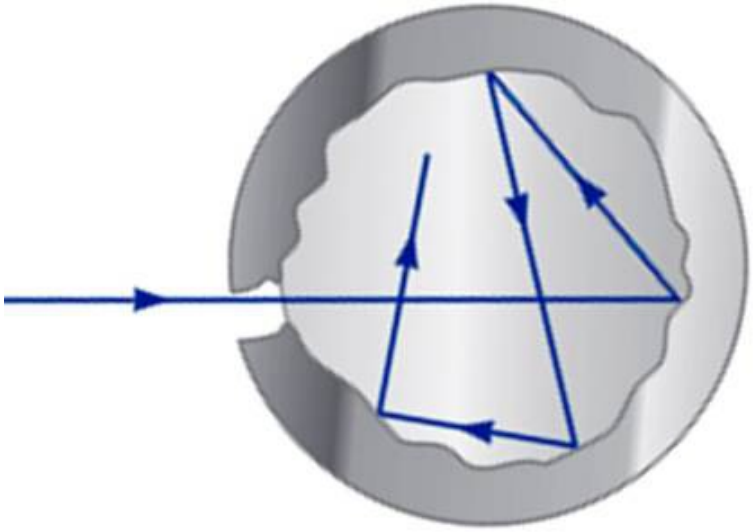
Η Φυσική που περιγράφει το φάσμα εκπομπής πρέπει να είναι η ίδια με αυτή που περιγράφει το φάσμα απορρόφησης διότι **το φάσμα εκπομπής ενός σώματος είναι ακριβώς το ίδιο με το φάσμα απορρόφησης**. Αν δεν συνέβαινε αυτό τότε σώματα που εκπέμπουν περισσότερο από ότι απορροφούν θα έχαναν θερμότητα επ'άπειρον και αντιστρόφως για σώματα που απορροφούν περισσότερο από ότι εκπέμπουν θα παρατηρείτο επ'άπειρον αύξηση της θερμοκρασίας.



Σχήμα 1: Η ενεργειακή πυκνότητα της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος σε μονάδες Joule m^{-3} sec σαν συνάρτηση της ενέργειας του φωτονίου που αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη συχνότητα για διάφορες τιμές της θερμοκρασίας.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Για τους υπολογισμούς του φάσματος εκπομπής της ακτινοβολίας χρησιμοποιήθηκε ένα ιδανικό μοντέλο σώματος, το λεγόμενο **μέλαν σώμα**, το οποίο μπορεί να απορροφήσει όλα τα μήκη κύματος και κατά συνέπεια να εκπέμψει όλα τα μήκη κύματος. Πειραματικά η διάταξη του Σχήματος 2 είναι μία καλή προσέγγιση μέλανος σώματος. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2 έχουμε μία κοιλότητα με εσωτερική επιφάνεια η οποία απορροφά και εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία σε όλα τα μήκη κύματος. Από την οπή (αριστερά) ακτινοβολία μπορεί να εισέλθει και να εξέλθει από την κοιλότητα.



Σχήμα 2: Μοντέλο για Μέλαν Σώμα: Μία κοιλότητα που απορροφά και εκπέμπει ηλεκτρο-μαγνητική ακτινοβολία για οποιοδήποτε μήκος κύματος.

Με μία διάταξη παρόμοια με αυτή του Σχήματος 2 έγιναν οι πρώτες μετρήσεις το φάσματος που φαίνεται στο σχήμα 1. Μια από τις πρώτες παρατηρήσεις που έκαναν ήταν ότι **όσο πιο μεγάλη ήταν η θερμοκρασία της κοιλότητας τόσο πιο λαμπερή φαινόταν η οπή στα αριστερά.** Αυτό φαίνεται καθαρά στο Σχήμα 1 όπου όταν αυξάνει η θερμοκρασία αυξάνει και η ενεργειακή πυκνότητα του φάσματος εκπομπής.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Μετά τις πρώτες μετρήσεις της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος έγιναν γνωστοί οι πρώτοι εμπειρικοί νόμοι που διέπουν το φάσμα της ακτινοβολίας αυτής. Οί νόμοι αυτοί ήταν:

Νόμος του Wien:

Ο νόμος του Wien περιγράφει την εξάρτηση του φάσματος από τη θερμοκρασία και δίνεται από την σχέση

$$f_{max} = A \cdot T$$

η οποία μας λέει ότι **η συχνότητα μεγίστης ακτινοβολίας είναι ανάλογή της θερμοκρασίας σε Kelvin**. Αυτό φαίνεται καθαρά στο Σχήμα 1 όπου η ενέργεια μεγίστης εκπομπής αυξάνεται με την θερμοκρασία. Ο ίδιος νόμος μπορεί να εκφραστεί και σαν συνάρτηση του μήκους κύματος

$$\lambda_{max} \cdot T = C_0$$

Έχει ενδιαφέρον να γράψουμε την πιο πάνω σχέση σαν

$$\Rightarrow \frac{\lambda_{max}}{c} \cdot kT = \frac{C_0 k}{c} \qquad (1)$$

όπου είναι η σταθερά του Boltzmann $k = 0.86 \times 10^{-4} \frac{eV}{K}$ η οποία δίνεται σε eV ανά Kelvin. **Καμία από τις πιο πάνω σταθερές δεν εξαρτάται από το συγκεκριμένο υλικό**. Η σχέση αυτή δημιούργησε και προβλήματα διότι η σταθερές στο δεξιό μέρος της (1) έχουν μονάδες δράσης (δηλαδή ενέργεια επί χρόνο) και εκείνη την εποχή **καμία σταθερά δεν είχε μονάδες δράσης (ενέργεια επί χρόνο ή ορμή επί μήκος)**. Πράγμα φυσικά που προμηνούσε ότι πίσω από τη σχέση αυτή κρύβεται καινούρια φυσική. Την εξήγηση για αυτό την έδωσε αργότερα ο Max Planck και θα την συζητήσουμε αργότερα στο κεφάλαιο αυτό.

Μία βασική εφαρμογή του νόμου το Wien έγκειται στο ότι μπορεί κανείς να υπολογίσει θερμοκρασίες αντικειμένων αν ξέρει το φάσμα εκπομπής τους.

Παράδειγμα: Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε ότι υλικό (π.χ. ένα κομμάτι από σίδηρο) όταν θερμανθεί σε $T_1 = 600C^0$ εκπέμπει ορατή ακτινοβολία με μήκος κύματος $\lambda_1 = 600nm$ (κοκκινίζει) . Με δεδομένο αυτό μπορεί κανείς να υπολογίσει π. χ. την θερμοκρασία μακρινού αστέρα ο οποίος εκπέμπει ακτινοβολία με μήκος κύματος $\lambda_2 = 400nm$.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Λύση:

Η ακτινοβολία του σιδήρου και του αστέρα έχουν κατά προσέγγιση το φάσμα μέλανος σώματος και συνεπώς ισχύει ο νόμος το Wien. Έτσι έχουμε ότι

$$\lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2 \Rightarrow T_2 = \frac{\lambda_1 T_1}{\lambda_2} = \frac{600\,nm \times (600 + 273\,K)}{400\,nm} \approx 1310\,K$$

Νόμος Stefan-Boltzmann

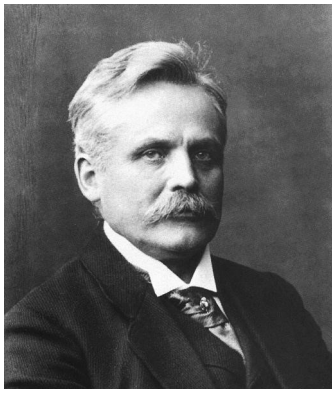
Ο νόμος των Stefan-Boltzmann μας λέει ότι **η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου την οποία εκπέμπει το μέλαν σώμα είναι ανάλογη της θερμοκρασίας (σε Kelvin) στην τετάρτη δύναμη**. Αυτός είναι ο λόγος που στο Σχ. 1 το εμβαδόν κάτω από τις καμπύλες, δηλαδή η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου, αυξάνεται δραματικά με την θερμοκρασία. Για να υπολογίσει κανείς την ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου αρκεί να ολοκληρώσει το φάσμα του μέλανος σώματος για δεδομένη θερμοκρασία ως προς τη συχνότητα (ή την ενέργεια $E = hf$) δηλαδή να ολοκληρώσει ένα από τα φάσματα του Σχ. 1. Ο νόμος των Stefan-Boltzmann μας λέει λοιπόν ότι η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου είναι

$$U = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \int \frac{\Delta E}{\Delta V\, \Delta f} df = \alpha T^4$$

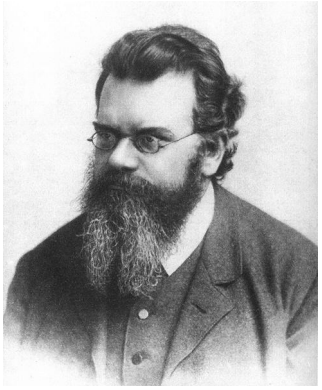
όπου α μία σταθερά.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ανεξάρτητο του υλικού, μεγέθους και σχήματος της κοιλότητας.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων



Wilhelm Wien
(1864-1928)



Ludwig Boltzmann
(1844-1906)

Παράδειγμα: Ας υποθέσουμε ότι ένα διαμέρισμα θερμαίνεται με καλοριφέρ μέσα στο οποίο τρέχει νερό σε θερμοκρασία $60\,C^0$. Ο νόμος των Stefan-Boltzmann μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε πόσο τις εκατό περισσότερη ενέργεια πρέπει να καταναλώσει κανείς αν επιθυμεί να ανεβάσει τη θερμοκρασία του νερού στους $80\,C^0$ και κατ' επέκταση τη θερμοκρασία του διαμερίσματος.

Λύση:

$$\frac{U\left(80\,C^0\right)}{U\left(60\,C^0\right)} = \frac{\alpha\left(80+273\right)^4}{\alpha\left(60+273\right)^4} = 1.26$$

Συνεπώς θα χρειαστεί να καταναλώσει 26% περισσότερη ενέργεια (πετρέλαιο θέρμανσης).

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Κλασσική αντιμετώπιση του φάσματος της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος

Οι Rayleigh Jeans επιχείρησαν να υπολογίσουν το φάσμα του μέλανος σώματος χρησιμοποιώντας την κλασσική θεωρία των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Θεώρησαν λοιπόν ότι τα άτομα στην επιφάνεια της κοιλότητας συμπεριφέρονται σαν κλασσικοί αρμονικοί ταλαντωτές οι οποίοι απορροφούν και εκπέμπουν ακτινοβολία. Επί πλέον έκαναν την υπόθεση ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μέσα στην κοιλότητα και τα άτομα της κοιλότητας (οι αρμονικοί ταλαντωτές) βρίσκονται σε **θερμοδυναμική ισορροπία**. **Αυτό σημαίνει ότι η κοιλότητα εκπέμπει και απορροφά τον ίδιο αριθμό κυμάτων και τις ίδιες συχνότητες**. Άρα αν θέλει κανείς να υπολογίσει το φάσμα της ακτινοβολίας μέσα στην κοιλότητα αρκεί να υπολογίσει το φάσμα των αρμονικών ταλαντωτών που αναπαριστάνουν τα άτομα στην εσωτερική επιφάνεια της κοιλότητας.

John Strutt, 3rd Baron Rayleigh (1842-1919)

Sir James Jeans (1877-1946)

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μέσα στην κοιλότητα είναι στάσιμα κύματα και η κατανομή τους δίνεται από την σχέση

$$N(f)df = \frac{8\pi f^2}{c^3}df \qquad (1)$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

όπου το $N(f)$ είναι ο αριθμός των στάσιμων κυμάτων ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα συχνότητας και f η συχνότητα. Η σχέση αυτή θα αποδειχτεί στην επόμενη παράγραφο. Έτσι το φάσμα της ακτινοβολίας δίνεται από

$$u(f)df = N(f) <E> df \qquad (2)$$

όπου $u(f)$ είναι η πυκνότητα ενέργειας ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα συχνότητας, και $<E>$ η μέση ενέργεια του κάθε στάσιμου κύματος.

Υπολογισμός της μέσης ενέργειας ενός κύματος.

Στην κλασσική φυσική η ενεργειακή κατανομή των αρμονικών ταλαντωτών της κοιλότητας είναι συνεχής. Έτσι η μέση ενέργεια τους δίνεται από

$$<E> = \int E\, P(E) dE \qquad (3)$$

Η θερμοδυναμική μας δίνει ότι η κατανομή ενεργειών έχει την μορφή

$$P(E) \sim e^{-E/kT}$$

Έτσι η κανονικοποιημένη κατανομή πιθανότητας δίνεται από

$$P(E) = \frac{e^{-E/KT} dE}{\int_0^\infty e^{-E/KT} dE} \qquad (4)$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Ο παράγοντας κανονικοποίησης υπολογίζεται εύκολα ως εξής

$$\int_0^\infty e^{-E/kT}\,dE = -KT\int_0^\infty e^{-E/kT}\,d\left(\frac{-E}{kT}\right) = -kT\,e^{-E/kT}\Big|_0^\infty = -kT\,(0-1) = kT \qquad (5)$$

Έτσι από (4) και (5) η κατανομή πιθανότητας δίνεται από

$$P(E) \;=\; \frac{1}{kT}e^{-E/kT}\,dE \qquad (6)$$

Χρησιμοποιώντας την (3) και (6) έχουμε ότι

$$<E> \;=\; \int_0^\infty E\,P(E)\,dE \;=\; \frac{1}{kT}\int_0^\infty E\,e^{\frac{-E}{kT}}\,dE \qquad (7)$$

Το ολοκλήρωμα στην (7) μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$I \;=\; \int_0^\infty E\,e^{-\lambda E} \;=\; (-1)\frac{d}{d\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda E}\,dE \;=\; \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda E}\,d(-E\lambda)\right] \;\Rightarrow$$

$$I \;=\; \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda E}\Big|_0^\infty\right] \;=\; \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{\lambda}(0-1)\right] \;=\; \frac{1}{\lambda^2} \qquad (8)$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

και από (7) και (8) έχουμε ότι

$$<E> \; = \; \frac{1}{kT}(kT)^2 \; = \; kT \qquad (9)$$

Τελικά από (1), (2) και (9) υπολογίζουμε κλασσικά το φάσμα της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος

$$u(f)df \; = \; \frac{8\pi f^2}{c^3} kT\, df$$

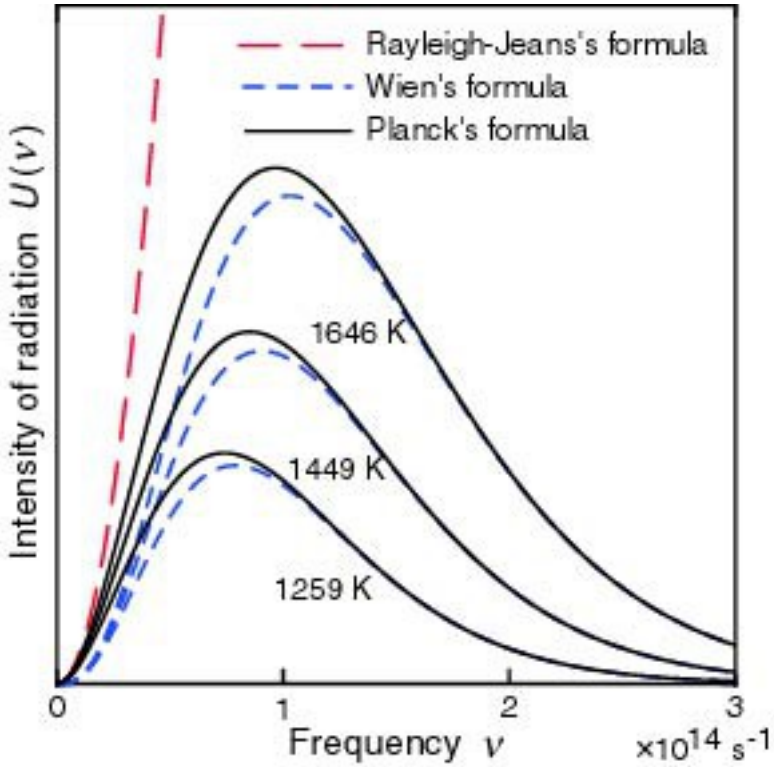
Το φάσμα αυτό είναι ο γνωστός νόμος των Rayleigh και Jeans.

Ο Wien έχει επίσης ένα εμπειρικό νόμο για το φάσμα του μέλανος σώματος ο οποίον δίνεται από την σχέση

$$u(f)df \; \sim \; f^3 e^{a_W f/T} \qquad a_w \; < \; 0$$

Δυστυχώς κανένα από τα δύο φάσματα δεν περιγράφει τα πειραματικά δεδομένα. Όπως φαίνεται στο Σχ. 3 η φασματική κατανομή των Rayleigh και Jeans, αν και συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα για πολύ μικρές συχνότητες, απειρίζεται για μεγάλες συχνότητες (καταστροφή του υπεριώδους, infrared catastrophe). Η φασματική κατανομή του Wien αποκλίνει από τα δεδομένα για μικρές συχνότητες αλλά συμφωνεί με τα δεδομένα για μεγάλες συχνότητες.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων



Σχήμα 3: Το φάσμα της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος σαν συνάρτηση της συχνότητας. Η καμπύλες σε μαύρο δείχνουν το σωστό φάσμα όπως μετράται από το πείραμα και όπως το υπολόγισε αργότερα ο M. Planck. Με κόκκινες διακεκομμένες γραμμές φαίνεται ο νόμος των Rayleigh και Jeans και με μπλε διακεκομμένες γραμμές ο νόμος του Wien.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Αριθμός Στάσιμων Κυμάτων σε Κοιλότητα

Στην κλασσική περιγραφή της κατανομής της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος χρησιμοποιήθηκε χωρίς απόδειξη η κατανομή συχνοτήτων στάσιμων κυμάτων μέσα σε μία κοιλότητα η οποία δίνεται από την σχέση 1. Η απόδειξη της σχέσης 1 είναι πολύ σημαντική και έχει ευρέα χρήση στη φυσική. Για αυτό το λόγο θα παρουσιάσουμε την απόδειξη της με όλες τις λεπτομέρειες.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε μία κοιλότητα με σχήμα κύβου ακμής L .Τα στάσιμα κύματα μέσα σε μία κοιλότητα ικανοποιούν την γνωστή εξίσωση του κύματος

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{E}(\vec{x},t) = 0 \qquad (10)$$

όπου $\vec{E}(\vec{x},t)$ το ηλεκτρικό πεδίο, η οποία δέχεται σαν γενική λύση την

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0(\vec{x})e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \qquad (11)$$

Αντικαθιστώντας την (11) στην (10) έχουμε ότι

$$\left(\nabla^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{E}_0(\vec{x}) = 0 \Rightarrow \left(\nabla^2+k^2\right)\vec{E}_0(\vec{x}) = 0 \qquad (12)$$

Η εξίσωση αυτή λύνεται με την μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$E_x = X(x)Y(y)Z(z)$$

και αντικαθιστώντας στην (12) έχουμε ότι

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} + k^2 = 0 \qquad (13)$$

Σε τρεις διαστάσεις ο κυματικός αριθμός μπορεί να γραφτεί σαν

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Έτσι η (13) γίνεται

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + k_x^2 = 0 \qquad (14)$$

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + k_y^2 = 0 \qquad (15)$$

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} + k_z^2 = 0 \qquad (16)$$

Ενδεικτικά θα λύσουμε την (14) υποθέτοντας ότι έχει λύση της μορφής

$$X(x) = A\cos(k_x x) + B\sin(k_x x) \qquad (17)$$

Το πλάτος του κύματος μηδενίζεται στην επιφάνεια της κοιλότητας και έτσι έχουμε ότι

$$X(0) = X(L) = 0 \qquad (18)$$

Από (17) και (18) έχουμε ότι

$$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow k_x L = n\pi \Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1,\ 2,\ 3,..$$

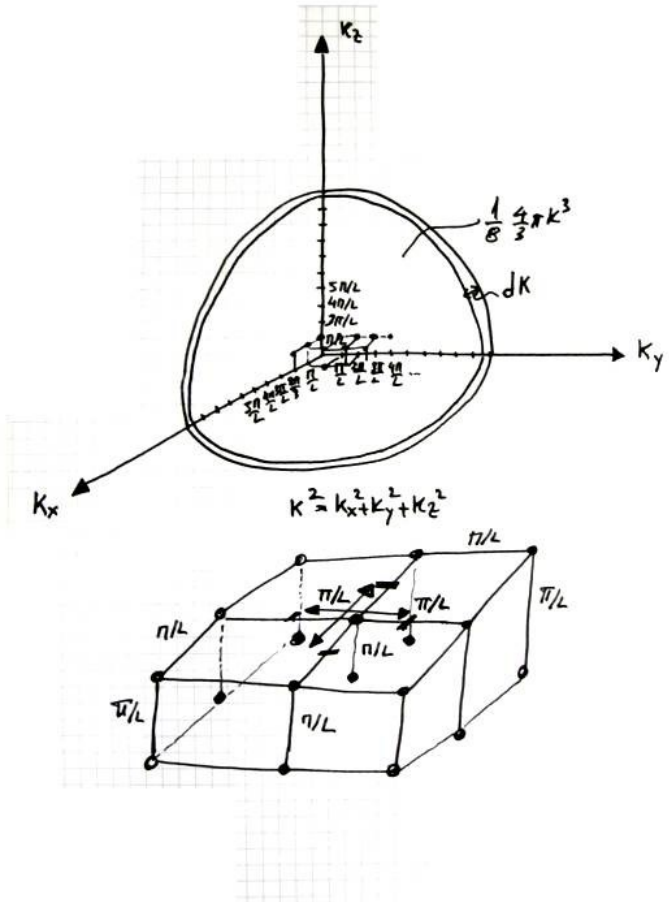
Το ίδιο συμβαίνει και με τις $Y(y),\ Z(z)$ και έτσι έχουμε ότι

$$k^2 = \frac{\pi^2}{L^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \qquad n_x,\ n_y, n_z = 1,\ 2,\ 3,...$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι **ο κυματικός αριθμός παίρνει διακριτές τιμές**. Δηλαδή μόνο οι πιο πάνω τιμές για τον κυματικό αριθμό, και κατά συνέπεια και το μήκος κύματος και τη συχνότητα, είναι επιτρεπτές.

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Το ερώτημα λοιπόν είναι **πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τον ολικό αριθμό των στάσιμων κυμάτων μέσα στην κοιλότητα τα οποία έχουν κυματικό αριθμό μικρότερο από k .** Στους άξονες k_x, k_y, k_z του Σχήματος 4 φαίνονται οι διακριτές τιμές των 3 κυματικών αριθμών. Κάθε σημείο στον τρισδιάστατο χώρο k_x, k_y, k_z συμβολίζει ένα κύμα με κυματικό αριθμό ίσο με $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. Έτσι έχουμε ένα τετραγωνικό πλέγμα με ακμή ίση με π / L .



Σχήμα 4: Ο χώρος των διανυσμάτων $\vec{k}$. Κάθε σημείο αναπαριστάνει ένα στάσιμο κύμα με κυματικό αριθμό $\vec{k}$. Ο όγκος πού καταλαμβάνει το κάθε σημείο στο χώρο $\vec{k}$ είναι $\Delta V = (\pi / L)^3$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Συνεπώς ο ολικός αριθμός των στάσιμων κυμάτων μέσα στην κοιλότητα τα οποία έχουν κυματικό αριθμό μικρότερο από κάποιο k είναι ίσος με τον αριθμό των σημείων στον χώρο $k_x,\ k_y,\ k_z$ που περικλείεται σε ένα όγδοο σφαίρας με ακτίνα ίση με $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. Ο αριθμός αυτός είναι ίσος με τον όγκο του 1/8 της σφαίρας διαιρεμένο με τον όγκο που καταλαμβάνει το κάθε σημείο. Ο όγκος του 1/8 της σφαίρας μπορεί να υπολογιστεί αν ολοκληρώσουμε ως προς dk του 1/8 του φλοιού της σφαίρας ο οποίος δίνεται από $\frac{1}{8}4\pi k^2 dk$. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4, ο όγκος που καταλαμβάνει το κάθε σημείο είναι $(\pi/L)^3$.

Συνεπώς ο ολικός αριθμός κυμάτων μεταξύ k και $k+dk$ είναι

$$N(k)dk = \frac{\frac{1}{8}4\pi k^2 dk}{(\pi/L)^3} = \frac{1}{2}\frac{k^2 L^3 dk}{\pi^2} = \frac{V k^2 dk}{2\pi^2} \qquad (19)$$

Είναι γνωστό ότι μη πολωμένη ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία αποτελείται από ίσα ποσά κυμάτων τα οποία είναι πολωμένα στις διευθύνσεις x και y (κάθετες στο διάνυσμα $\vec{k}$), ή αλλιώς ίσα ποσά από δεξιόστροφα και αριστερόστροφα κύματα. Ο λόγος για όλα αυτά είναι πέρα από τους σκοπούς το παρόντος κεφαλαίου αλλά έχει να κάνει με το γεγονός ότι οι φορείς της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, τα φωτόνια, έχουν μάζα μηδέν και το γεγονός ότι η θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού είναι αναλλοίωτη ως προς μία συμμετρία η οποία λέγεται ομοτιμία (parity). Το αποτέλεσμα είναι ότι για κάθε $\vec{k}$ έχουμε δύο κύματα και όχι ένα και συνεπώς η σχέση (19) πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί δύο.

Έτσι το τελικό αποτέλεσμα δίνεται αφού πολλαπλασιαστεί η (19) επί δύο και είναι

$$N(k)dk = \frac{V k^2 dk}{\pi^2} \qquad (20)$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Η σχέση (20) μπορεί να εκφραστεί σαν συνάρτηση της συχνότητας ως εξής:

$$k = \frac{2\pi f}{c} \Rightarrow dk = \frac{2\pi}{c} df$$

$$N(f)df = \frac{V\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2}{\pi^2} \frac{2\pi}{c} df \Rightarrow$$

$$N(f)df = \frac{8\pi f^2}{c^3} V\, df \qquad (21)$$

και σαν συνάρτηση του μήκους κύματος

$$N(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi\left(\frac{c}{\lambda}\right)^2}{c^3} V\, d\left(\frac{c}{\lambda}\right) = \frac{8\pi c^3}{\lambda^2 c^3} V(-1)\frac{d\lambda}{\lambda^2} = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda \Rightarrow$$

(το μείον μπορεί να αγνοηθεί αν κανείς είναι προσεκτικός με τα όρια της ολοκλήρωσης)

$$N(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda \qquad (22)$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Η Θεωρία του Max Planck για την ακτινοβολία του Μέλανος Σώματος

Όπως είδαμε οι θεωρίες των Rayleigh και Jeans καθώς και του Wien η οποίες βασίζονται στην κλασσική φυσική δεν κατάφεραν να εξηγήσουν κατανομή της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος. Έμπαινε λοιπόν επιτακτικά η ανάγκη για νέα φυσική. Αυτό φαινόταν και από το νόμο του Wien για την αλλαγή του μήκους κύματος μεγίστης ακτινοβολίας σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας που απαιτούσε μία σταθερά με μονάδες δράσης η οποία δεν υπάρχει στην κλασική φυσική. Ήταν πια εμφανές ότι χρειάζονταν καινούριες και επαναστατικές ιδέες για να προχωρήσει η γνώση.

Το 1901 εμφανίστηκε μία δημοσίευση στο επιστημονικό περιοδικό **Annalen der Physik** με τίτλο '***Ueber der Gesetz der Energieverteilung im Normal Spectrum'***[1], το οποίο μεταφράζεται 'Περί του νόμου της ενεργειακής κατανομής του κανονικού φάσματος΄. Ο συγγραφέας της ήταν ο Καθ. Max Planck από το πανεπιστήμιο Humboldt Universität zu Berlin. Η δημοσίευση αυτή συμβολίζει την αρχή της κβαντικής επανάστασης στην φυσική.

Ο Max Planck υπέθεσε ότι

1. Τα τοιχώματα της κοιλότητας του μέλανος σώματος και η ακτινοβολία μέσα στην κοιλότητα βρίσκονται σε θερμοδυναμική ισορροπία.

2. Η κατανομή της ακτινοβολίας της κοιλότητας αντιστοιχεί στην κατανομή της ενέργειας των ατόμων της κοιλότητας.

3. Τα άτομα στην επιφάνεια της κοιλότητας συμπεριφέρονται σαν αρμονικοί ταλαντωτές οι οποίοι **απορροφούν και εκπέμπουν ενέργεια κατά τρόπο ασυνεχή δηλαδή σε διακριτά ποσά, τα οποία ονομάζονται κβάντα ενέργειας** και είναι ίσα με

$$\varepsilon = hf \quad \text{όπου} \quad h = 6.626\,10^{-34}\,Joule\,sec$$

Η σταθερά h έχει μονάδες δράσης και ονομάζεται **σταθερά του Planck**.

4. Έτσι ο κάθε κβαντισμένος αρμονικός ταλαντωτής στη επιφάνεια της κοιλότητας εκπέμπει και απορροφά ενέργεια σύμφωνα με τη σχέση

$$E = n\varepsilon = nhf \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

1 Max Planck, Annalen der Physik **4,** 553 (1901).

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Θα επαναλάβουμε τώρα τον υπολογισμό του φάσματος του μέλανος σώματος λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι οι ενέργειες των ταλαντωτών είναι διακριτές ή κβαντισμένες όπως θα λέμε από εδώ και στο εξής. Η πρακτική διαφορά είναι ότι τα ολοκληρώματα της κλασσικής φυσικής γίνονται αθροίσματα στην κβαντική φυσική.

Έτσι η πιθανότητα να έχει ένας ταλαντωτής ενέργεια $\varepsilon = nhf$ είναι

$$P(E=nhf) = \frac{e^{\frac{-nhf}{kT}}}{\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{\frac{-nhf}{kT}}} \qquad (23)$$

όπου ο παρονομαστής δεν είναι παρά ένας παράγοντας κανονικοποίησης που εξασφαλίζει ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων για όλες τις ενέργειες είναι ίσο με τη μονάδα (δηλαδή 100%). Ο παράγοντας κανονικοποίησης είναι εύκολο να υπολογιστεί διότι είναι άθροισμα γεωμετρικής προόδου. Έτσι έχουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{\frac{-nhf}{kT}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[e^{\frac{-hf}{kT}} \right]^n = [1-e^{-hf/kT}]^{-1} \qquad (24)$$

από (23) και (24) έχουμε ότι

$$P(E=nhf) = e^{\frac{-nhf}{kT}} \left[1 - e^{\frac{-nhf}{kT}} \right]$$

Έχοντας την κατανομή πιθανοτήτων μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση ενέργεια του κάθε ταλαντωτή

$$<E> = \sum_{n=0}^{n=\infty} E_n P(E_n) = \sum_{n=0}^{n=\infty} nhf e^{\frac{-nhf}{kT}} \left[1 - e^{\frac{-nhf}{kT}} \right] \quad \Rightarrow$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

$$<E> \;=\; h\,f\left[1 \;-\; e^{\frac{-nhf}{kT}}\right] \;\sum_{n=0}^{n=\infty} n\,e^{\frac{-nhf}{kT}} \qquad (25)$$

Έστω ότι το $\lambda \;=\; \frac{hf}{kT}$ τότε έχουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n\,e^{\frac{-nhf}{kT}} \;=\; \sum_{n=0}^{n=\infty} n\,e^{-n\lambda} \;=\; -\frac{\partial}{\partial\lambda}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[e^{-\lambda}\right]^n \;=\; -\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{1-e^{-\lambda}}\right] \;\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n\,e^{\frac{-nhf}{kT}} \;=\; -(-1)\frac{1}{\left[1-e^{-\lambda}\right]^2}(-1)(-1)e^{-\lambda} \;=\; \frac{e^{-\lambda}}{\left[1-e^{-\lambda}\right]^2} \qquad (26)$$

Άρα από (25) και (26) έχουμε ότι

$$<E> \;=\; h\,f\left[1 \;-\; e^{\frac{-nhf}{kT}}\right] \;\frac{e^{\frac{-hf}{kT}}}{\left[1-e^{-hf/kT}\right]^2} \;=\; h\,f\,\frac{e^{\frac{-hf}{kT}}}{1-e^{-hf/kT}} \;=\; \frac{h\,f}{e^{hf/kT}-1} \;\Rightarrow$$

$$<E> \;=\; \frac{h\,f}{e^{hf/kT}-1}$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Πολλαπλασιάζοντας την μέση ενέργεια του κάθε ταλαντωτή (και κατά συνέπεια του κάθε κύματος) με τον αριθμό στάσιμων κυμάτων που δίνεται από την (21) έχουμε ότι

$$u(f,T)df = \frac{8\pi f^2}{c^3}\frac{hf}{e^{hf/kT}-1}df \Rightarrow \frac{8\pi f^2}{c^3}\frac{hf}{e^{hf/kT}-1}df \Rightarrow$$

$$u(f,T)df = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{f^3}{e^{hf/kT}-1}df \qquad (27)$$

Η σχέση (27) είναι το φάσμα του μέλανος σώματος του Planck και συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα. Συνεπώς η υπόθεση της κβάντωσης της ενέργειας των ταλαντωτών είναι σωστή. Η σχέση του μπορεί να εκφραστεί και σαν συνάρτηση του μήκους κύματος. Ο υπολογισμός είναι ίδιος με αυτόν της σχέσης (22) και δίνει

$$u(\lambda,T)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT}-1} \qquad (28)$$

Είναι ενδιαφέρον να μελετήσει κανείς τι συμβαίνει στο όριο των πολύ χαμηλών συχνοτήτων και στο όριο των μεγάλων συχνοτήτων.

Για πολύ μικρές συχνότητες δηλαδή για $hf \ll kT$ έχουμε ότι

$$\frac{hf}{e^{hf/kT}-1} = \frac{hf}{1+(hf/kT)+..-1} \approx kT \Rightarrow$$

$$u(f,T)df \approx \frac{8\pi f^2}{c^3}kT\,df$$

Δηλαδή παίρνουμε το νόμο των Rayleigh-Jeans όπως είναι αναμενόμενο.

Για πολύ μεγάλες συχνότητες δηλαδή $hf \gg kT$ η μονάδα στον παρονομαστή μπορεί να αγνοηθεί. Έτσι παίρνουμε το νόμο του Wien.

$$u(f,T)df = \frac{8\pi h}{c^3}\, f^3\, e^{\frac{-hf}{kT}}\, df$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Μονάδες στην Ατομική, Πυρηνική και Σωματιδιακή Φυσική

Όταν μελετούνται γεγονότα του μικρόκοσμου οι μονάδες ενέργειας είναι σε

$$1\,eV \;=\; 1.6\times10^{-19}\,CbVolt \;=\; 1.6\times10^{19}\,Joules$$

καθώς και $keV \;=\; 10^{3}\,eV \;\;,\;\; MeV \;=\; 10^{6}\,eV \;\;,\;\; GeV \;=\; 10^{9}\,eV \;\;,\;\; TeV \;=\; 10^{12}\,eV$.

Οι μονάδες της ορμής είναι σε $eV/c\,,\; kEV/c\,,\; MeV/c\,,\; GeV\;\; c\,,\; TeV/c$.

Η σταθερά του Planck δίνεται από

$$h \;=\; 6.626\,10^{-34}\,Joule\,sec \;=\; 4.14\times10^{-15}\,eV\,sec$$

αλλά όπως θα δούμε πιο χρήσιμη είναι η σταθερά

$$\hbar \;=\; \frac{h}{2\pi} \;=\; 197.3\;\; MeV\,fm \;=\; 197.3\;\; eV\,nm$$

όπου $1\,fm \;=\; 10^{-15}\,m$

Παραδείγματα: Υπολογίστε την ενέργεια φωτονίων με μήκη κύματος

(α) $\lambda \;=\; 540\,nm$ (πράσινο)

(β) $\lambda \;=\; 700\,nm$ (κόκκινο)

Λύση:

Όπως ξέρουμε η ενέργεια του φωτονίου δίνεται από

(α) $$E \;=\; hf \;=\; 2\pi\frac{\hbar c}{\lambda} \;=\; \frac{3.14\times197.3\,eV\;nm}{540\,nm} \;=\; 2.3\,eV$$

(β) $$E \;=\; hf \;=\; 2\pi\frac{\hbar c}{\lambda} \;=\; \frac{3.14\times197.3\,eV\;nm}{700\,nm} \;=\; 1.77\,eV$$

Σύγχρονη Φυσική–1, Διάλεξη–13, Τμήμα Φυσικής, Παν/μιο Ιωαννίνων

Μία άλλη χρήσιμη σταθερά είναι η σταθερά του Boltzmann η οποία δίνεται από

$$\kappa = 1.380\times10^{-23}\frac{Joule}{K} \approx 0.86\times10^{-4}\frac{eV}{K}$$

και χρησιμεύει για να μετατρέπουμε θερμοκρασία σε ενέργεια. Όπως ξέρουμε από την κινητική θεωρία των ατόμων, η κινητική ενέργεια ενός ατόμου με τρις βαθμούς ελευθερίας είναι ίση με $\frac{3}{2}kT$.

Παραδείγματα: Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το kT για θερμοκρασίες **300, 3000, 9000** Kelvin, ο υπολογισμός γίνεται ως εξής

$$T = 300\,K \quad (27\,C^0) \Rightarrow kT = 300\,K\times0.86\times10^{-4}\frac{eV}{K} = 0.026\,eV$$

$$T = 3000\,K \Rightarrow kT = 3000\,K\times0.86\times10^{-4}\frac{eV}{K} = 0.26\,eV$$

$$T = 9000\,K \Rightarrow kT = 9000\,K\times0.86\times10^{-4}\frac{eV}{K} = 0.774\,eV$$

Αυτά είναι χρήσιμα στην ακτινοβολία του μέλανος σώματος. Ας υποθέσουμε ότι μελετάμε ένα σώμα σε θερμοκρασία $T = 3000\,K$ και μας ενδιαφέρει το φάσμα εκπομπής στην περιοχή του κόκκινου. Για κόκκινο φως, όπως είδαμε, έχουμε $E_\gamma = 1.77\,eV$. Έτσι για

$T = 3000\,K$ έχουμε ότι $\frac{hf}{kT} \approx 6.808 \Rightarrow e^{\frac{hf}{kT}} = 905$

συνεπώς είμαστε στην περιοχή όπου ισχύει ο νόμος του Wien για το φάσμα. Για πράσινο φως έχουμε ότι $E_\gamma = 2.3\,eV$ και $\frac{hf}{kT} \approx 8.85 \Rightarrow e^{\frac{hf}{kT}} = 6948$ και πάλι ισχύει ο νόμος του Wien. Τα ίδια ισχύουν και για $T = 300\,K$. Ο αναγνώστης μπορεί να δείξει ότι γιά $T = 9000\,K$ και κόκκινο φως ο νόμος του Wien έχει μία απόκλιση περίπου 10 % από τα πειραματικά δεδομένα και το νόμο του Planck ενώ για πράσινο φως η απόκλιση είναι περίπου 5%.