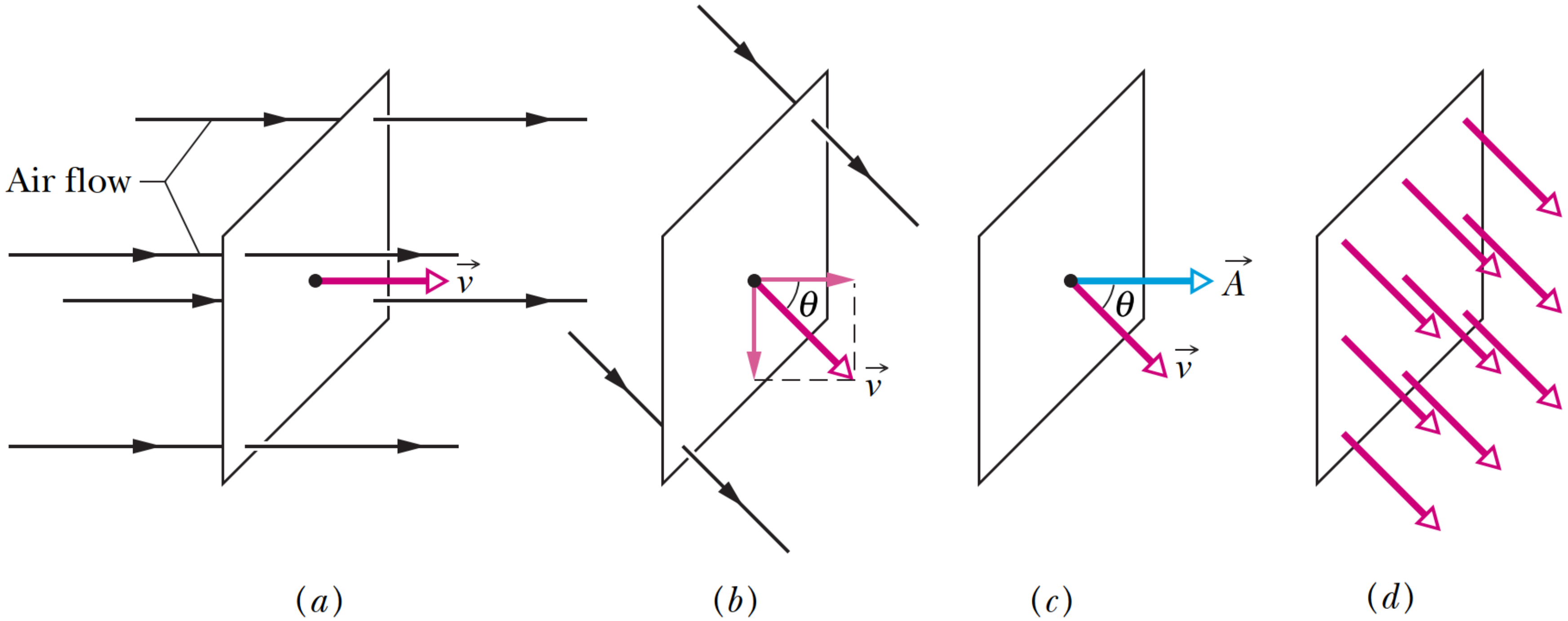
Νόμος Gauss – Κεφάλαιο 23

Ροή:



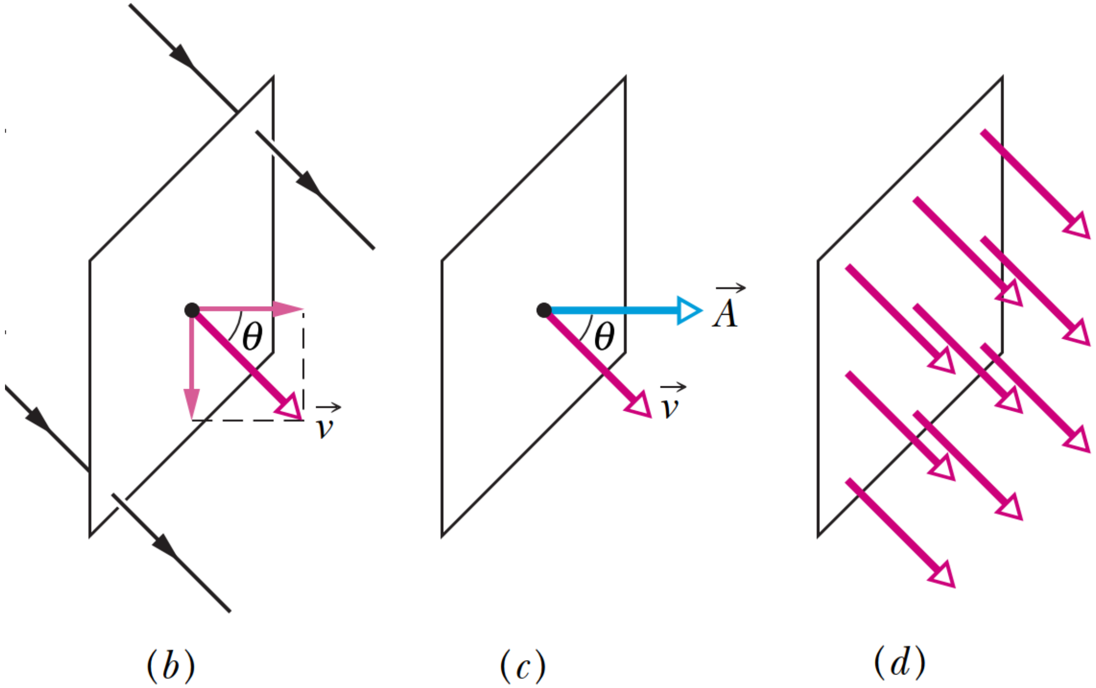
- Ας υποθέσουμε οτι έχουμε επιφάνεια εμβαδού **A κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας αερίου** το οποίο κινείται προς τα δεξιά όπως φαίνεται στο σχήμα (a) και (b)
- Ροή = Φ = dV/dt (1)
- dV = v A dt (2)

Συνεπώς από (1) και (2) ➔ Φ = v A

- **Αρα η ροή είναι απλά το γινόμενο ταχύτητα × επιφάνεια**
- **Τι κάνουμε όμως όταν η επιφανεια δεν είναι κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας όπως φαίνεται στο (b), (c) και(d) ;**

Νόμος Gauss – Κεφάλαιο 23

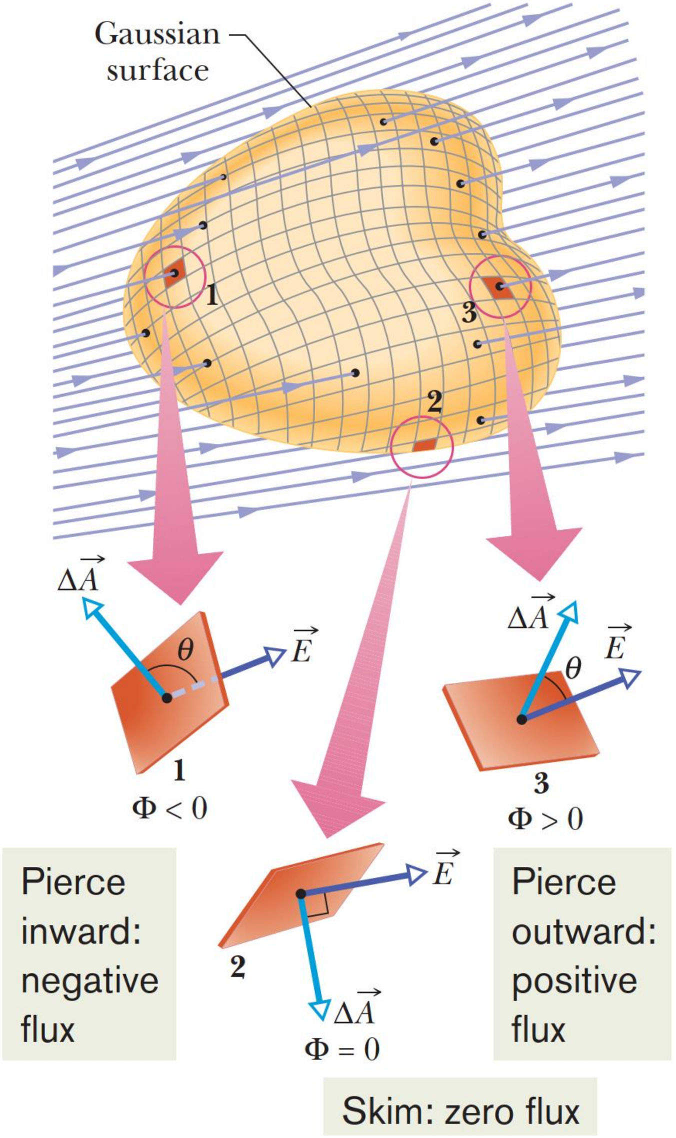
Ροή με γωνία :



$$\Phi = vA\cos\theta = \vec{v}\cdot\vec{A}$$

- Στην περίπτωση αυτή πρέπει να πάρουμε **το εσωτερικό γινόμενο** του διανύσματος της ταχύτητας με το διάνυσμα που <u>είναι κάθετο στην επιφάνεια και έχει μέτρο την επιφάνεια</u>.

Νόμος Gauss – Κεφάλαιο 23



- Στην γενική περίπτωση όπου η επιφάνεια δέν είναι επίπεδη και έχει ένα αυθαίρετο σχήμα τότε πρέπει
  - Να χωρίσουμε την επιφάνεια σε μικρά τμήματα τα οποία είναι επίπεδα (γιατί είναι πολύ μικρά)
  - Να αθροίσουμε τις συνεισφορές από όλες τις μικρές επιφάνειες. Δηλαδή

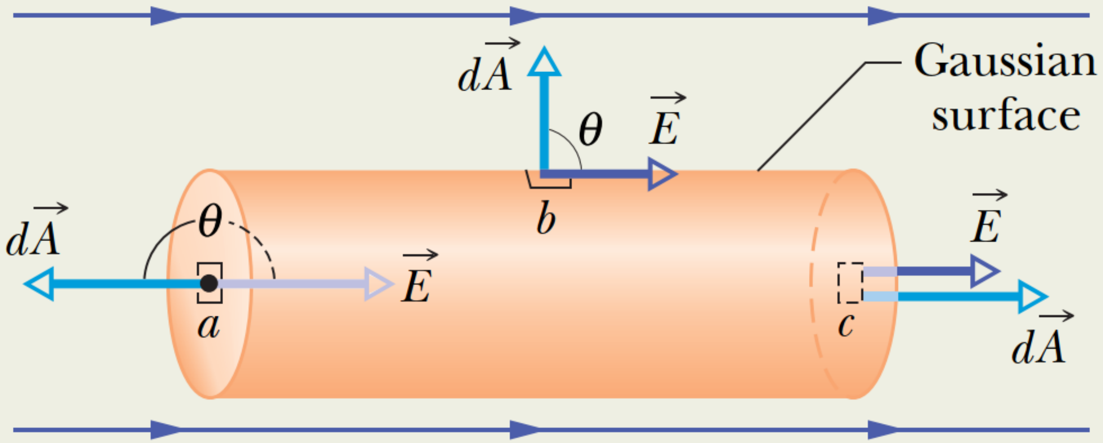
$$\Phi = \sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}$$

- Αυτό στά μαθηματικά γίνεται με το **επιφανειακό ολοκλήρωμα**

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

- **Συνεπώς η ροή κάποιου διανύσματος διαμέσου μίας επιφάνειας ισούται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανύσμαοτος πάνω στην επιφάνεια**

Νόμος Gauss – Κεφάλαιο 23



$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$= \int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_c \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

$$\int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos 180°)\, dA = -E \int dA = -EA,$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos 0)\, dA = EA$$

$$\Phi = -EA + 0 + EA = 0.$$

$$\int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos 90°)\, dA = 0.$$

- Η ροή στην αριστερή πλευρά είναι ίση και αντίθετη με την δεξιά πλευρά.
- Η ροή στην επιφάνεια του κυλίνδρου είναι μηδέν.
- Η συνολική ροή είναι μηδέν.

Νόμος Gauss – Κεφάλαιο 23

- Στον Ηλεκτρισμό ορίζουμε **ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΡΟΗ, Φ,** την ροή του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου πάνω σε μία επιφάνεια.

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

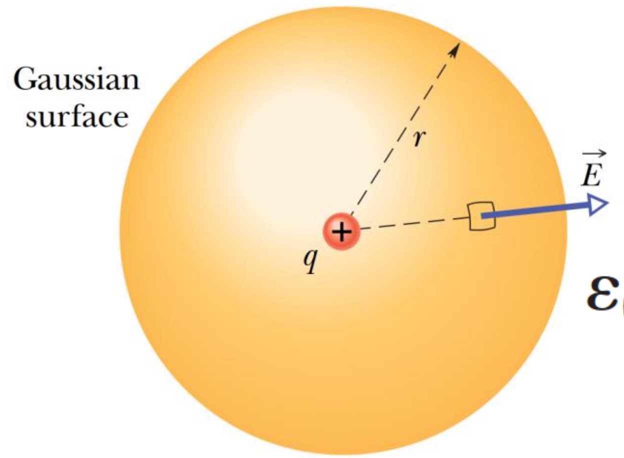
- Ο νόμος του Gauss σχετίζει την ηλεκτρική ροή διαμέσου μιάς κλειστής επιφάνειας με το ηλεκτρικό φορτίο το οποίο υπάρχει μέσα στο χώρο ο οποίος περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια.

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \oint E\, dA = q_{\mathrm{enc}}$$

Νόμος Gauss – Κεφάλαιο 23

- Σκοπός του μαθήματος είναι να μάθετε φυσική και όχι να λογαριάζετε επιφανειακά ολοκληρώματα. Για αυτό το λόγο όλα τα επιφανειακα ολοκληρώματα που θα συναντήσετε στό μάθημα αυτό λογαριάζονται πολύ εύκολα αν
    - **Διαλέξετε την επιφάνεια να έτσι ώστε να είναι πάντα κάθετη στο ηλεκτρικό πεδίο.**
    - **Το ηλεκτρικό πεδίο είναι σταθερό πάνω στην επιφάνεια.**
- Παραδείγματος χάριν για σημειακό φορτίο η σφαιρική επιφάνεια Gauss πληροί τα πιό πάνω κριτήρια

Επειδή το πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια της σφαίρας



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \oint E\, dA = q_{\text{enc}} \rightarrow \varepsilon_0 E \oint dA = q \rightarrow$$

$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = q \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

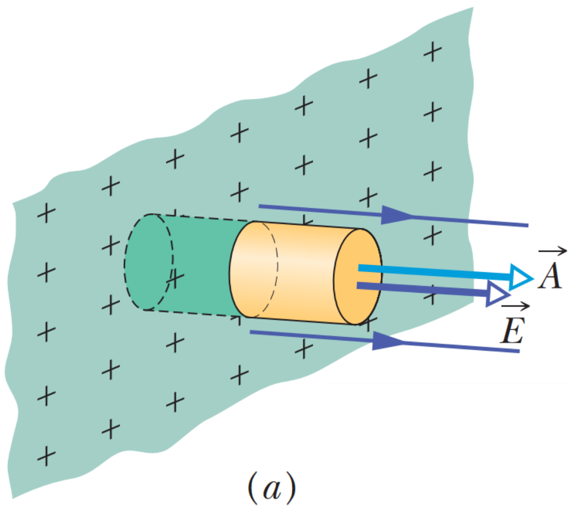
Επειδή το πεδίο είναι σταθερό πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας

Νόμος Gauss – Κεφάλαιο 23

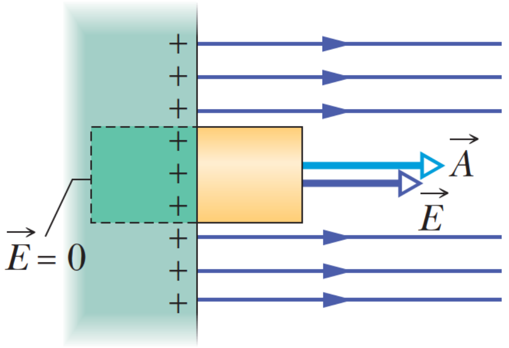
- **Οφείλετε να γνωρίζεται βασικές σχέσεις γεωμετριάς όπως π.χ.**
  - Περιφέρεια κύκλου = $2\pi R$
  - Επιφάνεια κύκλου = πR^2
  - Επιφάνεια σφαίρας = $4\pi R^2$
  - Όγκος σφαίρας = $(4/3)\ \pi R^3$
  - Επιφάνεια κυλίνδρου = $2\pi RL$
  - Όγκος κυλίνδρου = $\pi R^2 L$
  - Μήκος τόξου γωνίας Δφ = $R\ \Delta\phi$ (το Δφ σε rad)
- **Οι τύποι αυτοί δέν θα δωθούν στα τυπολόγια των εξετάσεων γιατί πρέπει να τους θυμάστε !!!**
- **FYI: 40% λαθών που κάνουν στά διαγωνίσματα είναι επειδή δεν γνωρίζουν βασική γεωμετρία και τους τύπους αυτούς → ΜΑΘΕΤΕ ΒΑΣΙΚΟΥΣ ΤΥΠΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ !!!!!!**

Νόμος Gauss – Κεφάλαιο 23

Ηλεκτρικό πεδίο πολύ κοντά στην επιφάνεια αγωγού



(a)



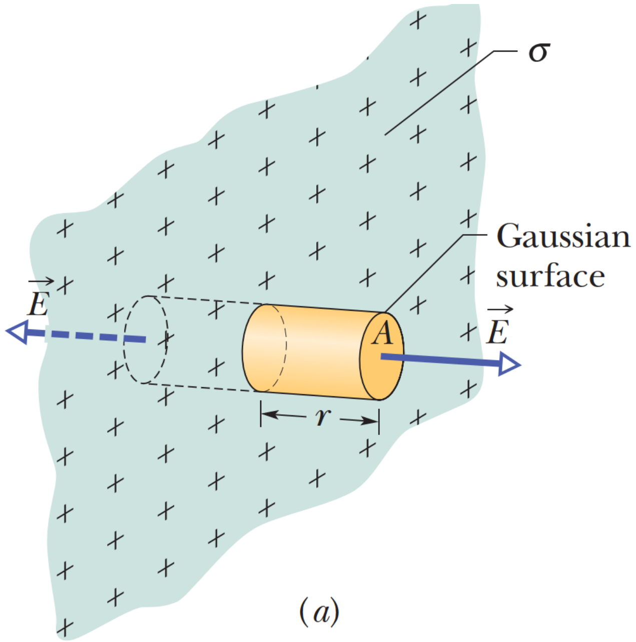
- Επιλέγουμε κυλινδρική επιφάνεια Gauss επειδή το πεδίο είναι σταθερό και κάθετο στην πάνω πλευρά της καί συνεπώς η ροή εκεί είναι EA.
- Επιλέγουμε την κάτω πλευρά του κυλίνδρου να είναι μέσα στον αγωγό όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν.
- Η ροή στην κυλινδρική επιφάνεια είναι μηδέν γιατί η κάθετος στην επιφάνεια σχηματίζει γωνία 90^o με το πεδίο άρα και έδώ η ροή είναι επίσης μηδέν.
- Έτσι ο νόμος του Gauss δίνει

$$\varepsilon_0 EA = \sigma A$$

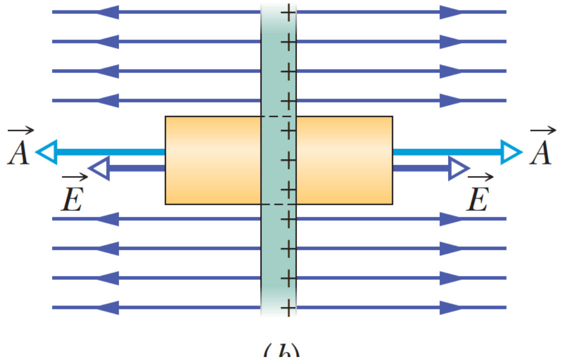
$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Νόμος Gauss – Κεφάλαιο 23

Ηλεκτρικό πεδίο πολύ κοντά σε μή αγώγιμη επιφάνεια η οποία φέρει στρώμα φορτίου με επιφανειακή πυκνότητα σ



(a)



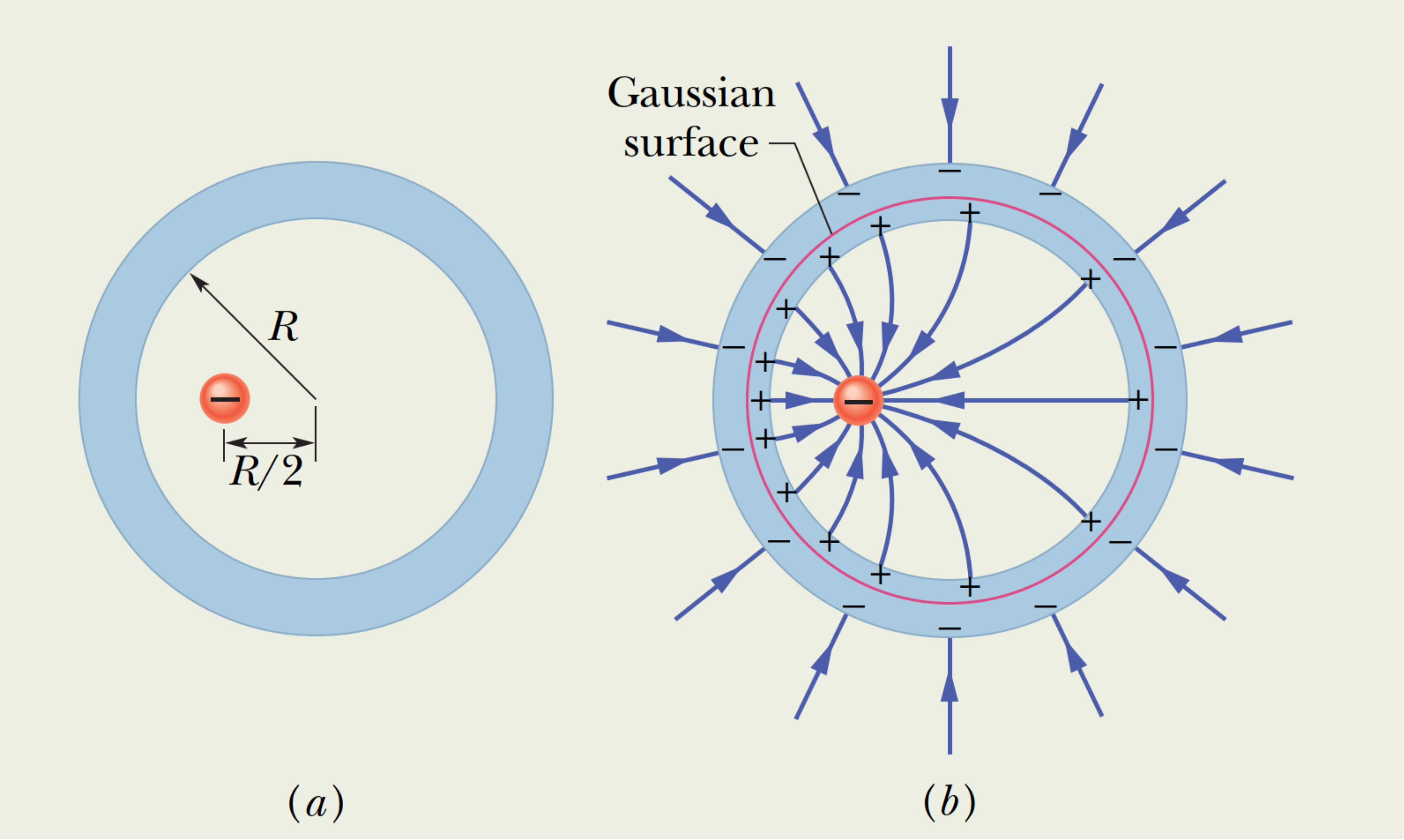
- Εδώ έχουμε ένα και μόνο στρώμα φορτιού το οποίο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο και προς τις δύο κατευθύνσεις.
- Έτσι έχουμε θετική ηλεκτρική ροή και πρός τα δεξιά και προς τα αριστερά.
- Πάλι η ροή δια μέσου της κυλινδρικής επιφάνειας είναι μηδεν.
- Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss έχουμε ότι

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{\text{enc}},$$

$$\varepsilon_0(EA + EA) = \sigma A,$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

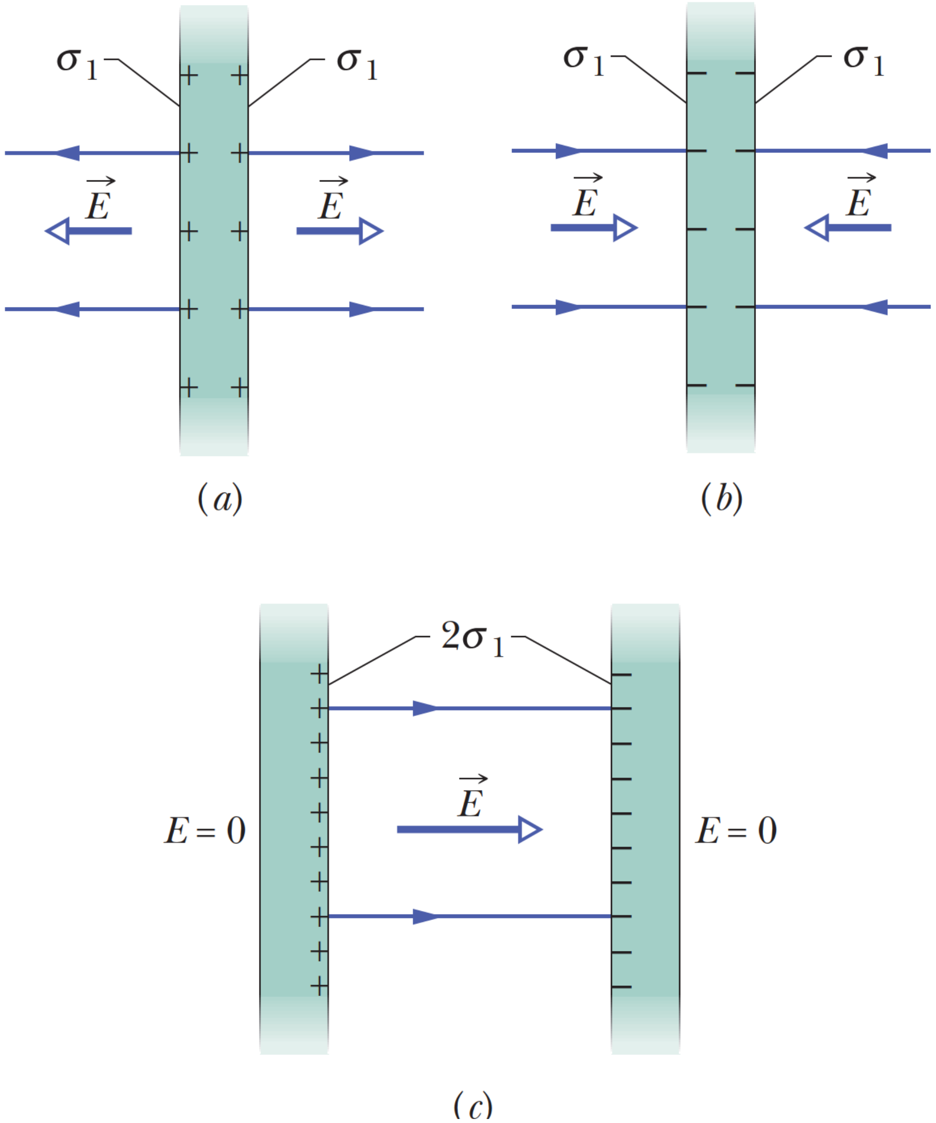
Νόμος Gauss – Κεφάλαιο 23



- Αρνητικό φορτίο –Q τοποθετείται μέσα σε αγώγιμο κέλυφος το οποίο είναι ηλεκτρικά ουδέτερο.

- Το αρνητικό φορτίο έλκει θετικό φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια του κελύφους.
- Το θετικό φορτίο είναι ίσο με +Q γιατί αν θεωρίσουμε επιφάνεια Gauss μέσα στον αγωγό (κόκκινο) τότε η ροή μέσα από αυτή την επιφάνεια ειναι μηδέν επειδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν μέσα στον αγωγό. Συνεπώς το συνολικό φορτίο μέσα στην επιφάνεια αυτή είνα μηδέν. Έτσι αφου το ένα φορτίο ειναι –Q το άλλο αναγκαστικά θα είναι +Q .
- Επειδή το κέλυφος είναι ουδέτερο και έχει +Q στην εσωτερική του επιφάνεια θα πρέπει να έχει –Q στην εξωτερική του επιφάνεια.

Νόμος Gauss – Κεφάλαιο 23



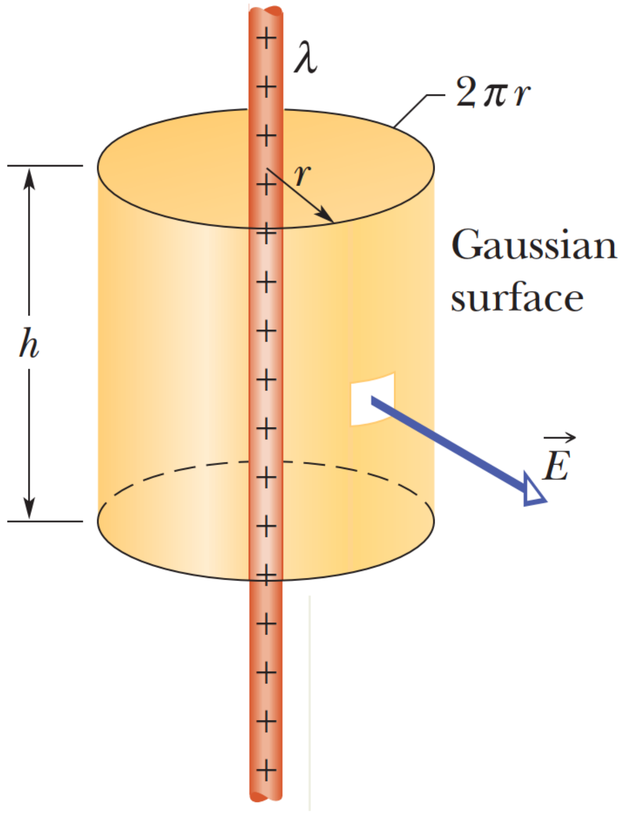
- Δύο επίπεδοι αγωγοί με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ_1 σε κάθε επιφάνεια τους.
- Ο πρώτος έχει θετικά φορτία και ο δεύτερος αρνητικά.
- Οι αγωγοί βρίσκονται μακριά ο ένας από τον άλλον.
- Το ηλεκτρικό πεδίο σε κοντά κάποια από τις επιφανειες τους το έχουμε υπολογίσει και έχει μέτρο ίσο με $E= \sigma_1 /\varepsilon_0$

- Ας υποθέσουμε τώρα ότι φέρνουμε τους αγωγούς κοντά.
- Τα φορτία έλονται και συγκεντρώνονται στις εσωτερικές επιφάνειες με αποτέλεσμα να διπλασιαστεί η πυκνότητα φορτίου.
- Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss γιά φορτισμένο αγωγό, όπως κάναμε και πρίν, έχουμε ότι

$$E = \frac{2\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Νόμος Gauss – Κεφάλαιο 23

Ηλεκτρικό πεδίο απο άπειρο κυλινδρικό αγωγό



- Επιλέγουμε κυλινδρική επιφάνεια Gauss διότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι ακτινικό. Έτσι εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss έχουμε

$$\Phi = EA\cos\theta = E(2\pi rh)\cos 0 = E(2\pi rh)$$

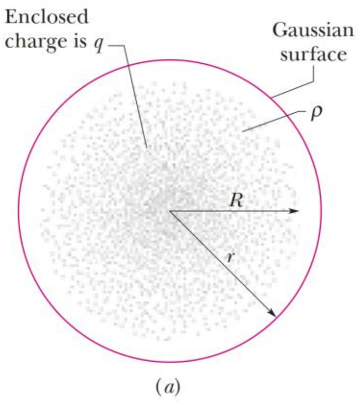
$$\varepsilon_0\Phi = q_{\text{enc}}$$

$$\varepsilon_0 E(2\pi rh) = \lambda h$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

Νόμος Gauss – Κεφάλαιο 23

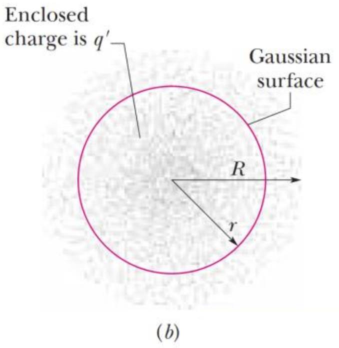
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα με ολικό φορτίο q. **«Ομοιόμορφα φορτισμένη» σημαίνει ότι η χωρική πυκνότητα φορτίου (ρ=dq/dV) παρεμένει σταθερή μέσα στην σφαίρα** η οποία έχει όγκο V και ακτίνα R. **Ζητείται να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss.**



<u>Γιά r>R:</u>

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \oint E\,dA = q_{enc} \rightarrow \varepsilon_0 E \oint dA = q \rightarrow$$

$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = q \rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}$$



<u>Γιά r<R:</u> Επειδή η επιφάνεια Gauss (κόκκινο) έχει ακτίνα r<R πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το φορτίο το οποίο περικλείται από την επιφάνεια Gauss

$$\frac{q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \rightarrow q' = q\frac{r^3}{R^3} \rightarrow \varepsilon_0 E(4\pi r^2) = q' = q\frac{r^3}{R^3} \rightarrow$$

$$\boxed{E = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)r}$$