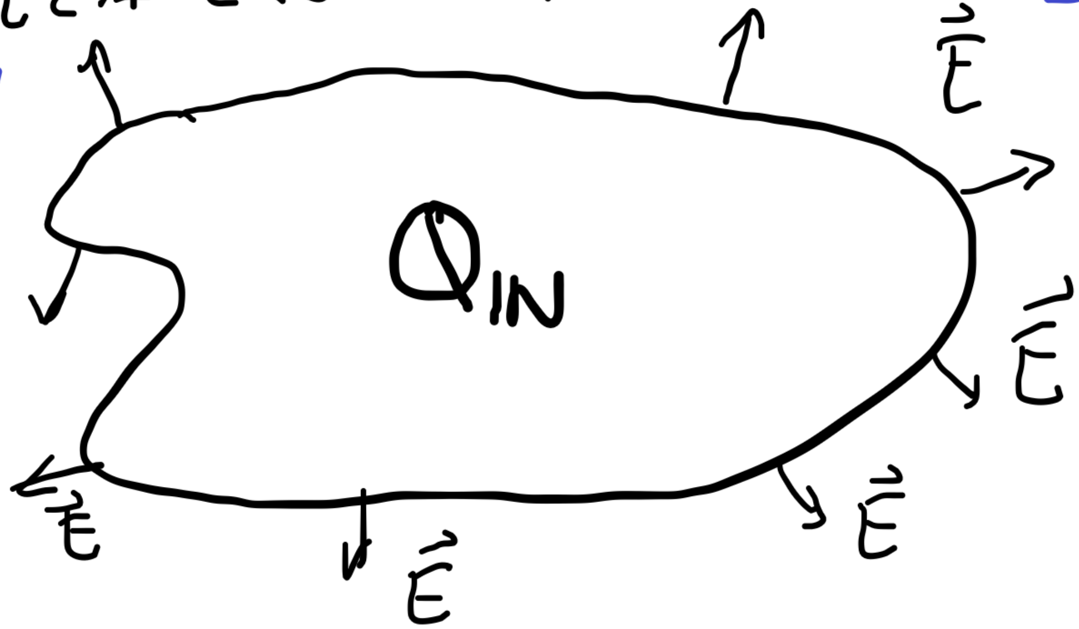
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 23: Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS

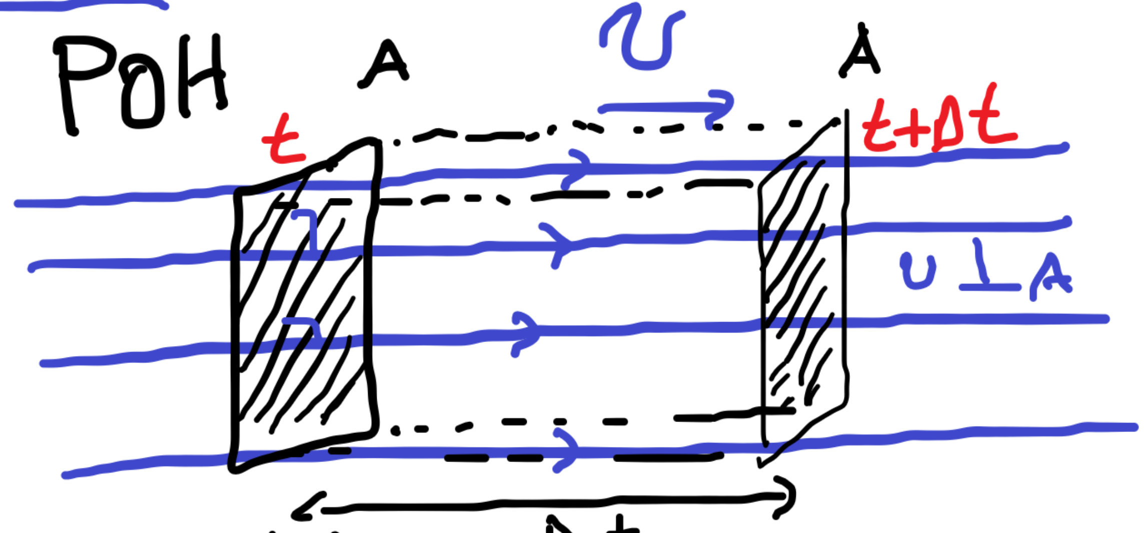
16.3.21 (1)

KARL FRIEDRICH GAUß

Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUS ΣΧΕΤΙΖΕΙ ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΠΑΝΩ ΣΕ ΜΙΑ ΚΛΕΙΣΤΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΕ ΤΟ ΦΟΡΤΙΟ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΕΤΑΙ ΜΕΣΑ ΣΤΟΝ ΟΓΚΟ Ο ΟΠΟΙΟΣ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ



ΡΟΗ

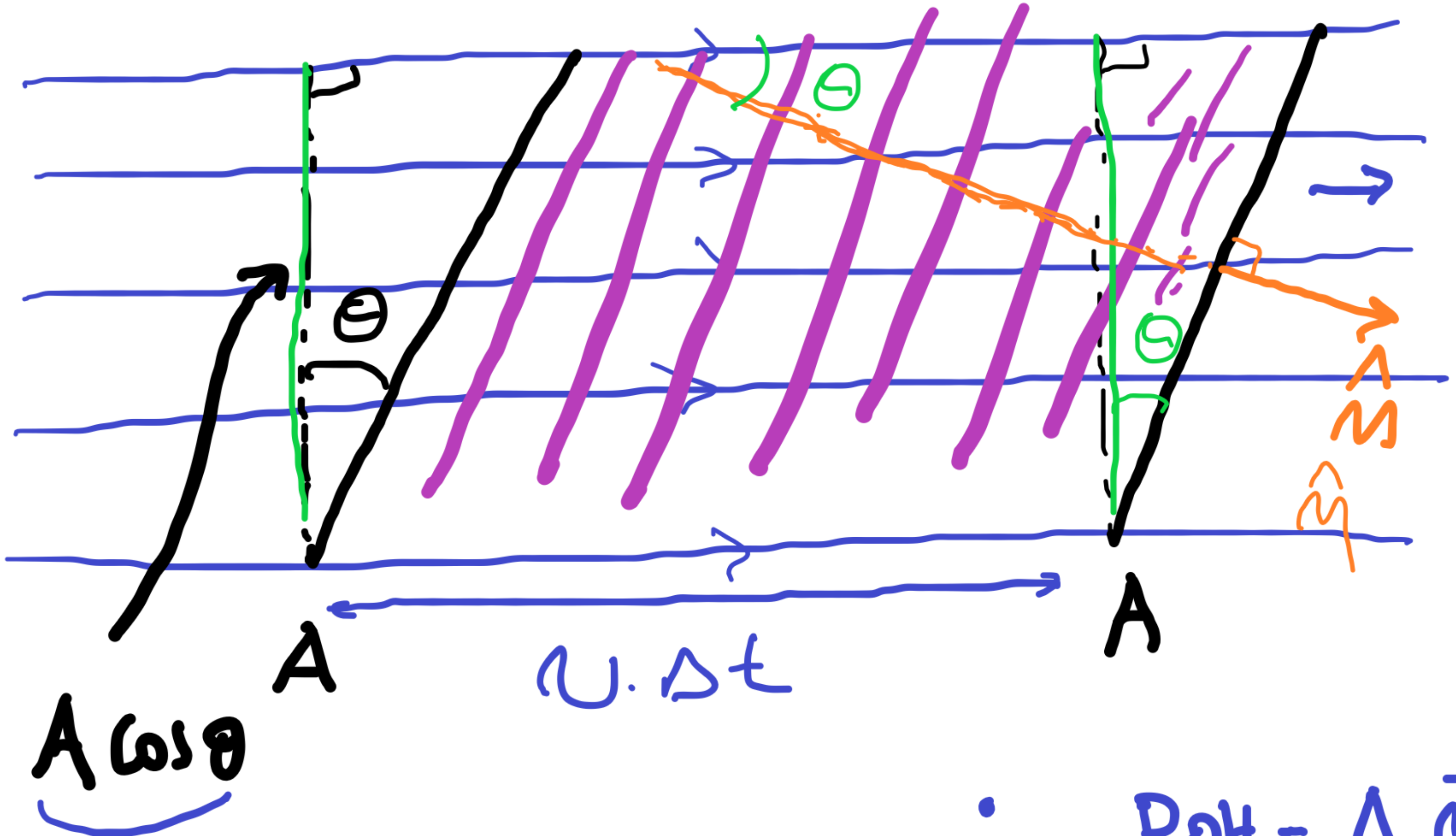


$\Delta V = \upsilon \cdot \Delta t \cdot A$

$$ΡΟΗ = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\upsilon \cdot \Delta t \cdot A}{\Delta t} = \underline{\underline{\upsilon \cdot A}}$$

16.3.21 (2)

Η ΡΟΗ ΣΕ ΚΑΘΕΤΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΜΕ ΤΗΝ ΤΑΧΥΤΗΤΑ



ΡΟΗ = ;

$\Delta V = A\cdot\cos\theta\cdot\upsilon\cdot\Delta t$

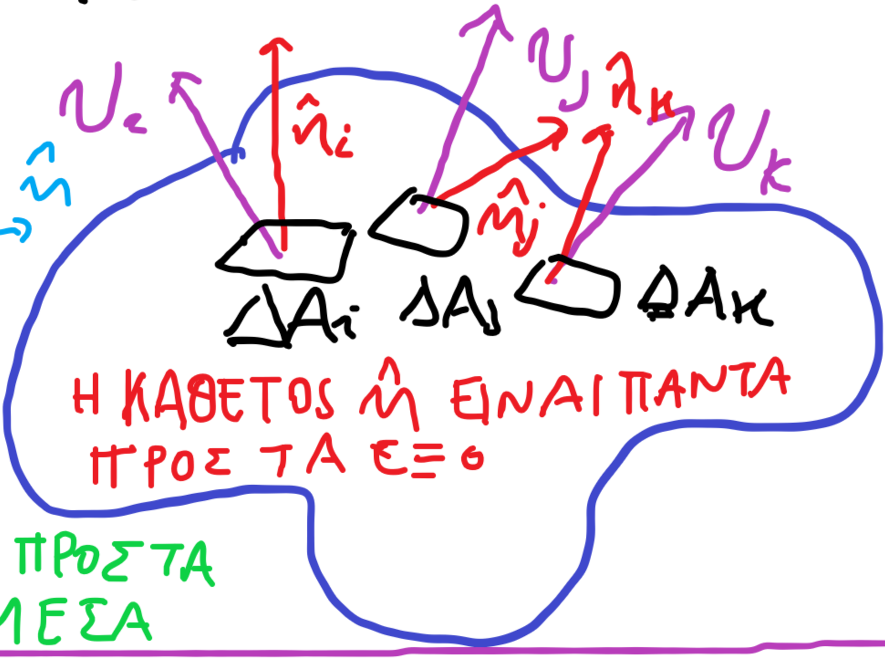
$\text{ΡΟΗ} = \dfrac{A\cos\theta\cdot\upsilon\cdot\Delta t}{\Delta t}$

$\text{ΡΟΗ} = A\cos\theta\cdot\upsilon$

θ = γωνία μεταξύ του $\vec{\upsilon}$ και του $\hat{n}$

$$\therefore \left.\begin{aligned} \text{ΡΟΗ} &= A\,\vec{\upsilon}\cdot\hat{n} \\ \vec{A} &= |A|\cdot\hat{n} \end{aligned}\right\} \boxed{\text{ΡΟΗ} = \vec{\upsilon}\cdot\vec{A}}$$

ΓΕΝΙΚΕΥΟΝΤΑΣ ΤΗ ΡΟΗ ΓΙΑ ΑΥΘΑΙΡΕΤΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ 19.3.21



$$ΡΟΗ_A = \sum_i \vec{U}_i \cdot \hat{n}_i \, \Delta A_i \Rightarrow$$

$\Delta A_i \to 0$ $\quad$ ▱ = ΕΠΙΠΕΔΟ

ΔA_i

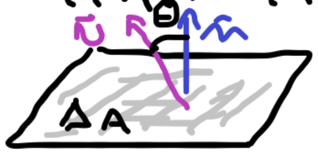
$$ΡΟΗ = \underbrace{\lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i \vec{U}_i \cdot \hat{n}_i \, \Delta A_i}_{\text{Επιφανειακό ολοκλήρωμα}}$$

$$\oint_A \vec{U} \cdot \underbrace{\hat{n}\, da}_{d\vec{a}} = \oint \vec{U} \cdot d\vec{A}$$

$\underline{d\vec{a}} = \hat{n}\, \overline{da}$

$$\boxed{ΡΟΗ = \Phi = \oint \vec{U} \cdot d\vec{A}}$$

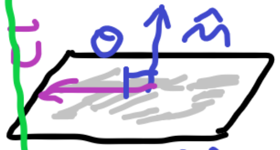
ΘΕΤΙΚΗ - ΑΡΝΗΤΙΚΗ - ΜΗΔΕΝΙΚΗ

1) 

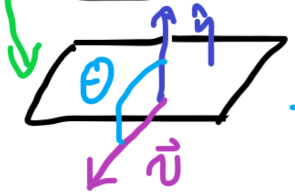
$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \to \cos\theta \ge 0$

$\Delta\Phi = \vec{u} \cdot \hat{n} \cdot \Delta A = |\vec{u}| \Delta A \cos\theta \ge 0$

$\Delta\Phi > 0 \Rightarrow$ ΡΟΗ ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΞΩ

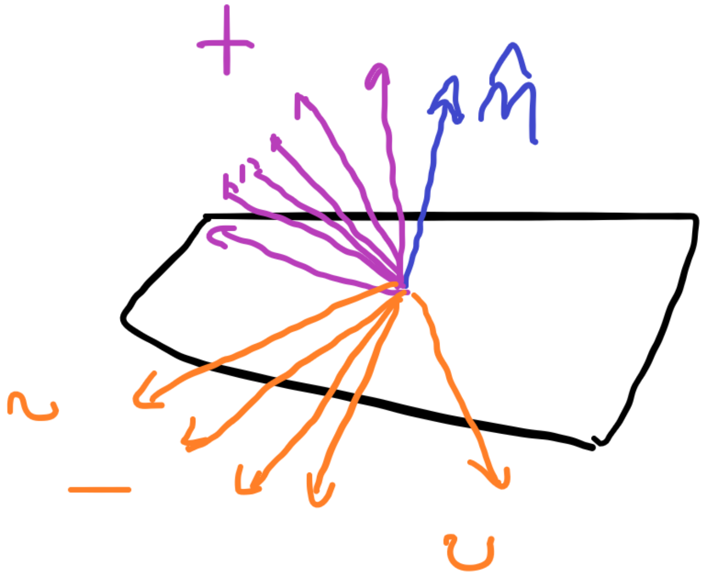
2) 

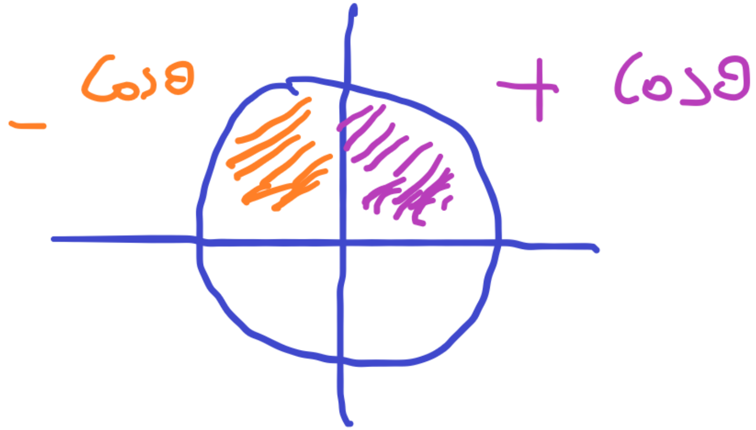
$\theta = \pi/2 \to \cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \Delta\Phi = 0$

3) 

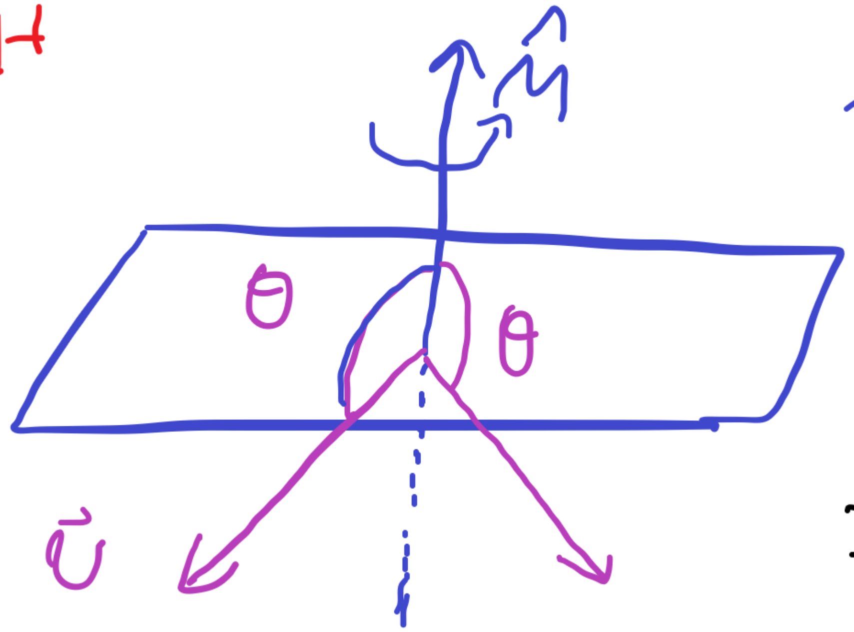
$\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi \to \cos\theta < 0$

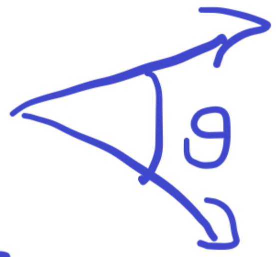
$\Delta\phi = |\vec{u}| \cdot \Delta A \cdot \cos\theta < 0$

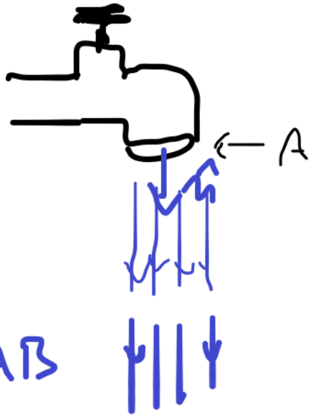




ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΤΗ ΦΟΡΑ ΤΟΥ $\hat{n}$ ΕΧΕΙΣ ΟΡΙΣΗ ΤΗΣ ΘΕΤΙΚΗ ΡΟΗ



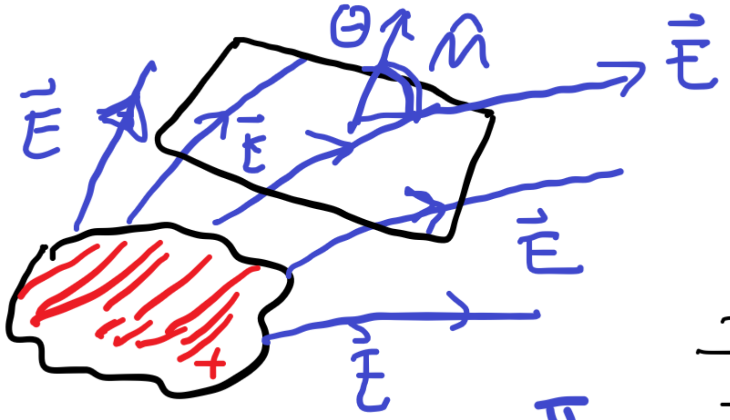




$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta_{AB}$$

ΜΕ ΤΟΝ ΙΔΙΟ ΤΡΟΠΟ ΠΟΥ ΟΡΙΣΑΜΕ ΤΗΝ ΡΟΗ ΡΕΥΣΤΟΥ 14.3.21 (3)

ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΤΗΝ ΡΟΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ, ΜΟΝΟ ΠΟΥ ΑΝΤΙ ΓΙΑ $\vec{u} \to \vec{E}$

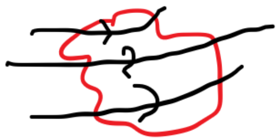


$$\Phi = \oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} \qquad d\vec{A} = dA\cdot\hat{n}$$

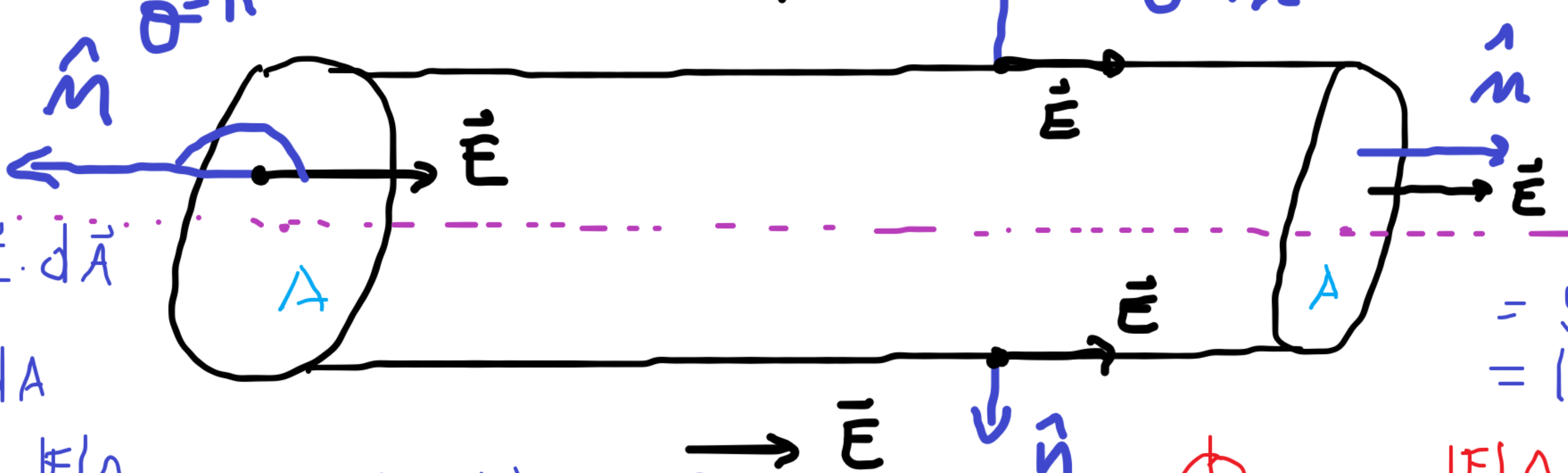
COULOMB $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\hat{R}$

$E \sim Q$

GAUSS "ΚΑΝΕΙ ΤΟ ΙΔΙΟ"



$\Phi_{\text{ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ}} = ?$



$\Phi_{\text{ΔΕΞΙΑ}} = \oint \vec{E}\, d\vec{A}$
$= \oint |\vec{E}|\cdot\hat{i}\cdot(\hat{i})\, dA = |\vec{E}|\oint dA$
$= |\vec{E}|\cdot A$

$\Phi_{\text{ΑΡΙΣΤΕΡΑ}} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$
$= \oint |\vec{E}|\,\hat{i}\cdot(-\hat{i})\, dA$
$= |\vec{E}|(-1)\oint dA = -|\vec{E}|A$

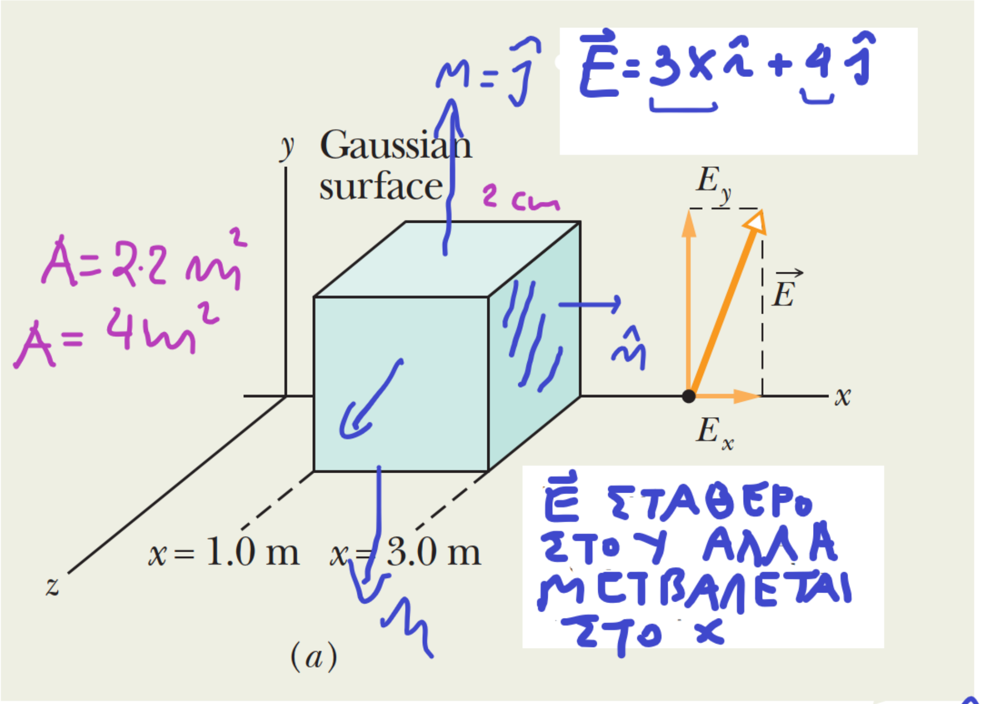
$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint |\vec{E}|\,\underline{\hat{i}\cdot(\hat{j})}\, dA = 0$

$\Phi_{\text{TOTAL}} = -|\vec{E}|A + |\vec{E}|\cdot A = 0$

ΛΟΓΙΚΟ (ΟΤΙ ΜΠΑΙΝΕΙ ΒΓΑΙΝΕΙ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΗΣ

19.3.21 ④



$$\Phi_{ΔΕΞΙΑ} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint (3x\hat{i}+\underbrace{4\hat{j}) \cdot (\hat{i})}_{0} dA \rightarrow$$

$$= \oint 3x\, dA = \oint 3\cdot 3\cdot dA = 9\oint dA = 9\frac{N}{C}\, 4m^2$$

$$= 36\ \frac{N}{C} m^2$$

$$\Phi_{ΑΡΙΣΤΕΡΑ} = \oint (3x\hat{i}+4\hat{j})\overbrace{(-\hat{i})}^{\hat{n}} dA = -3\oint dA$$

$x = 1\ m$

$\hat{n} = -\hat{i}$

$$= -3\frac{N}{C}\, 4m^2 = -12\ \frac{N}{C} m^2$$

$$\Phi_{ΠΑΝΩ} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint (\underbrace{3x\cdot\hat{i}}_{0}+4\hat{j})\,\hat{j}\, dA = 4\frac{N}{C}\oint dA = 16\frac{N}{C}m^2$$

$$\Phi_{ΚΑΤΩ} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint (3x\hat{i}+4\hat{j})(-\hat{j})\, dA = -16\frac{N}{C}m^2$$

$$\Phi_{TOT} = (36-12)\frac{N}{C}m^2 = 24\frac{N}{C}m^2$$

ΜΠΡΟΣΤΑ $n=\hat{k}$ $\qquad \hat{k}\,(3x\hat{i}+4\hat{j})=0$

ΠΙΣΩ $n=-\hat{k}$

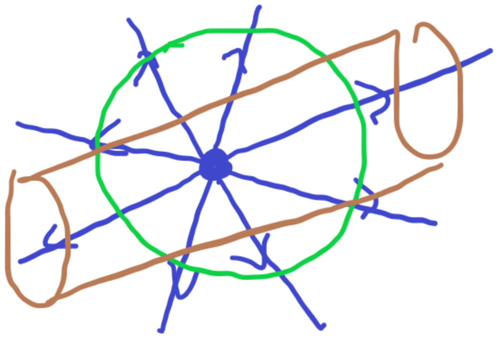
$$\Phi_{ΜΠΡΟΣΤΑ} = \Phi_{ΠΙΣΩ} = 0$$

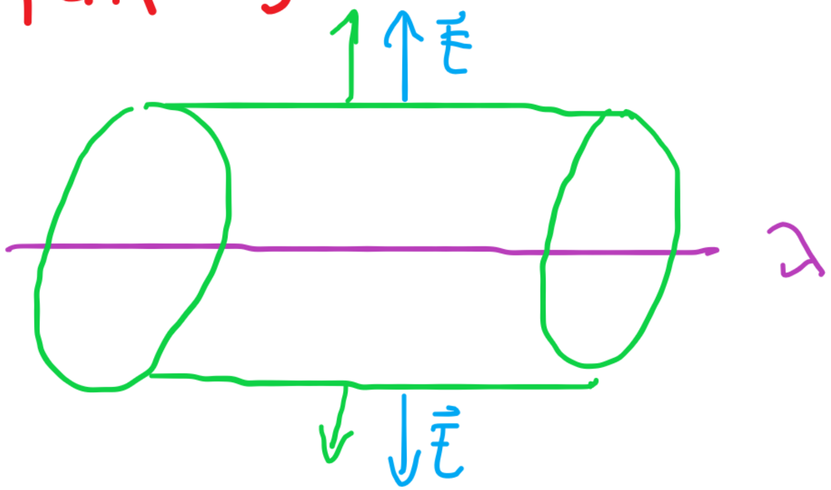
ΠΩΣ ΕΠΙΛΕΓΟΥΜΕ ΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΗΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΡΟΗΣ

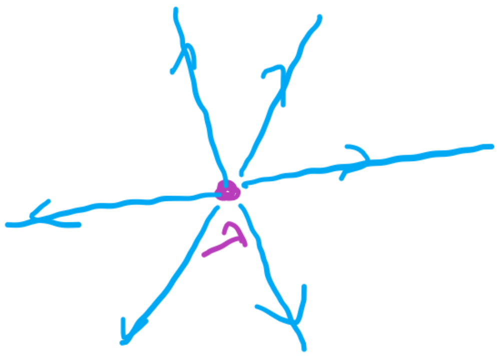
I) Η ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΚΑΘΕΤΗ ΣΤΙΣ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ($\vec{E}$ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΚΑΘΕΤΟ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ)

II) ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΜΗΝ ΑΛΛΑΖΕΙ ΠΑΝΩ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

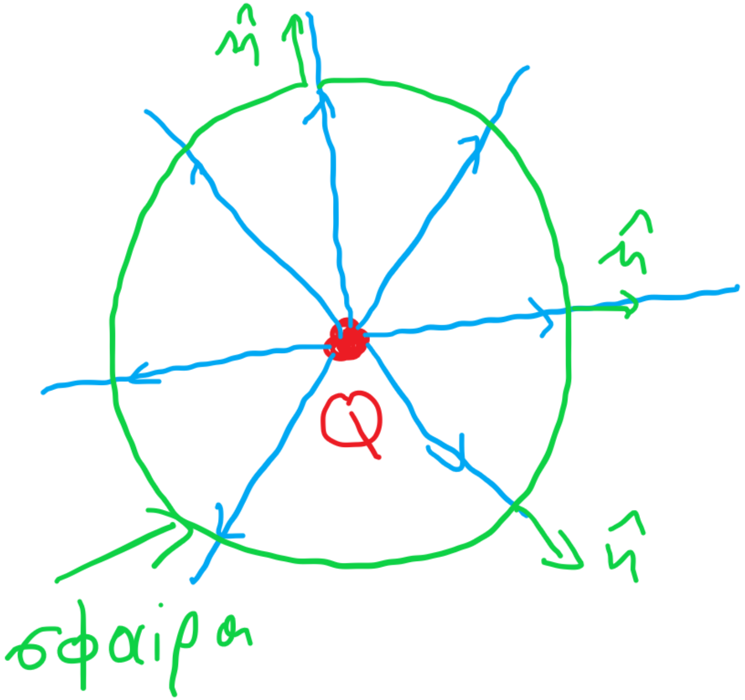
$$\Phi = \oint \vec{E}\, d\vec{A} = \oint \vec{E}\cdot\hat{n}\, dA \overset{(1)}{=} \oint |E|\, dA \overset{(2)}{=} |E| \oint dA = \underline{|E|\cdot A}$$







ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΡΟΗ ΣΗΜΕΙΑΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ $Q>0$ 19.3.21 6



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}_0$$

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint \overbrace{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\hat{r}_0\right)}^{\vec{E}} \cdot \underbrace{\hat{r}_0}_{\hat{n}}\, dA = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\underbrace{\oint dA}_{\text{επιφ. σφαίρας}} \Rightarrow$$

$$\Phi = \frac{Q}{\cancel{4\pi\varepsilon_0 R^2}}\cancel{4\pi R^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

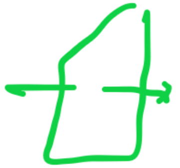
Η ΡΟΗ ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΑΚΟ ΦΟΡΤΙΟ ΔΙΑΜΕΣΟΥ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΛΟΓΗ ΤΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

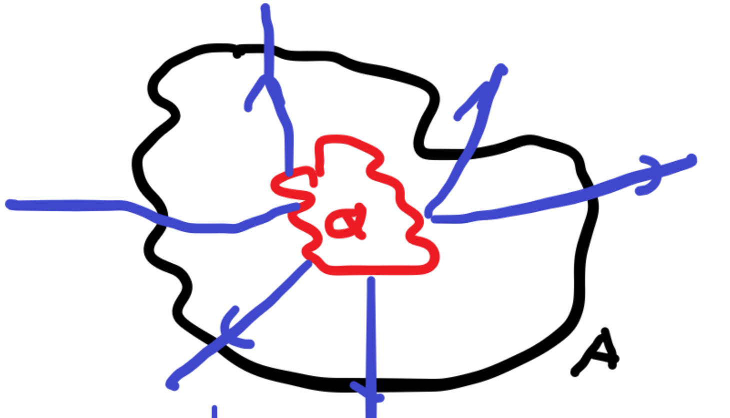
ΓΕΝΙΚΕΥΟΥΜΕ ΚΑΙ ΠΕΡΝΟΥΜΕ ΤΟ ΝΟΜΟ ΤΟΥ GAUSS 19.3.21

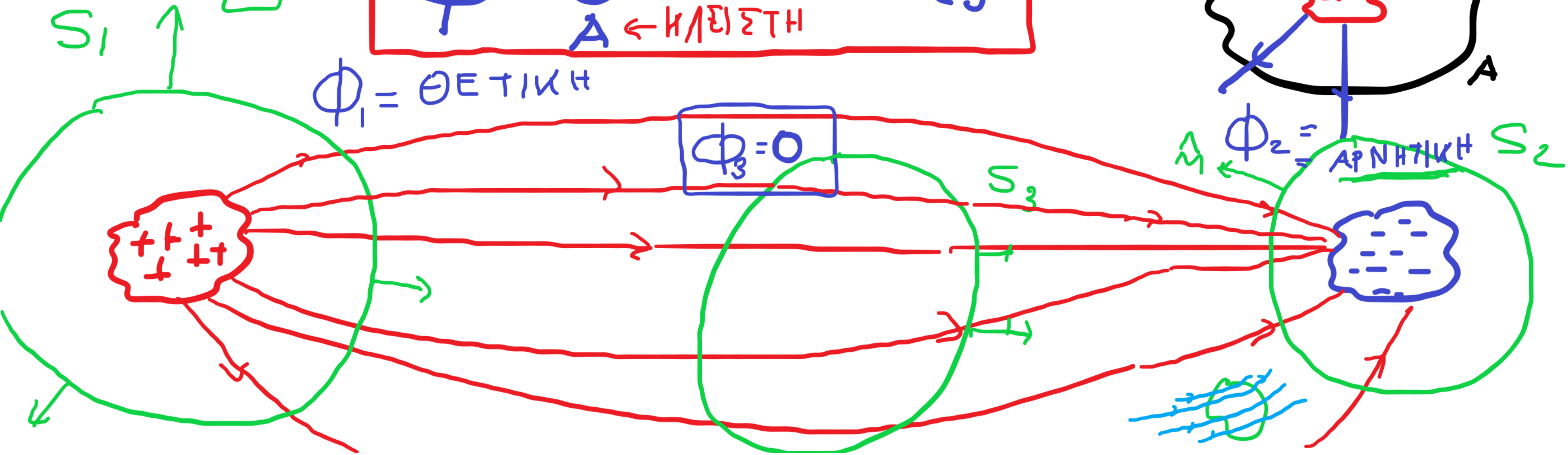
Η ΡΟΗ ΓΙΑ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΗ ΜΕ Q_{IN}/ε_0 ·
ΟΠΟΥ Q_{IN} ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΦΟΡΤΙΟ ΠΟΥ ΠΕΡΙΚΛΕΙΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

$$\boxed{\Phi = \oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{IN}}{\varepsilon_0}}$$

A ← ΚΛΕΙΣΤΗ

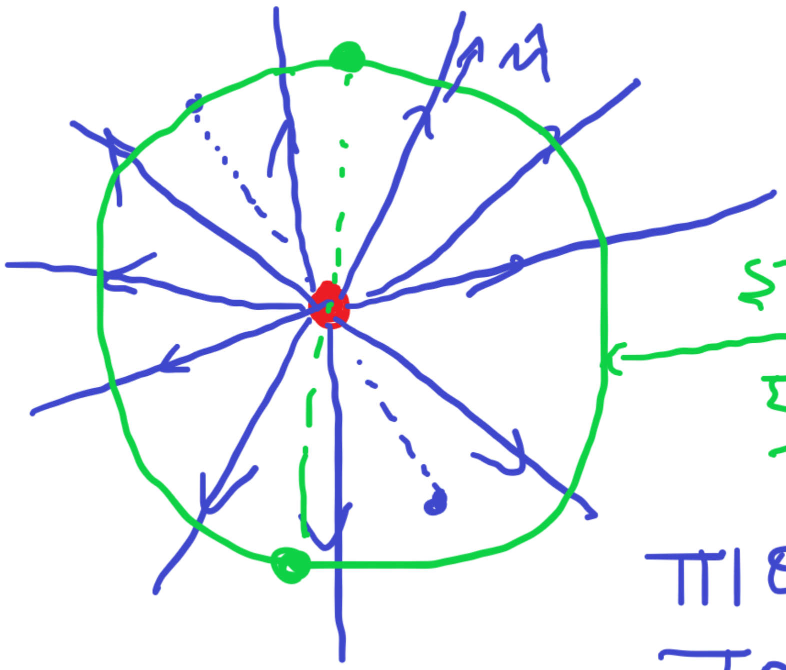






ΕΠΙΣΤΡΕΦΟΥΜΕ ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΑΚΟ ΦΟΡΤΙΟ: ΥΠΟΘΕΣΤΕ ΟΤΙ ΔΙΔΕΤΑΙ ΤΟ ΦΟΡΤΙΟ Q. E=? 19.3.21

8



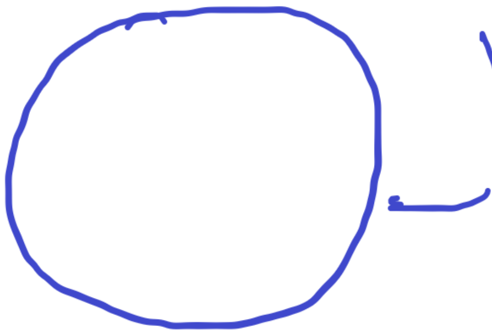
GAUSS → $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| \underbrace{\oint dA}_{4\pi R^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΑΝΩ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΗΣ ΣΦΑΙΣ

$$|\vec{E}|\, 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{|\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}}$$

ΠΙΘΑΝΟΝ ΤΩΡΑ ΝΑ ΚΑΤΑΛΑΒΑΙΝΕΤΕ ΓΙΑΤΙ Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ COULOMB ΕΧΕΙ $1/R^2$

ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΥΝΑΝΤΟΥΝΤΑ



$V \sim R^3$

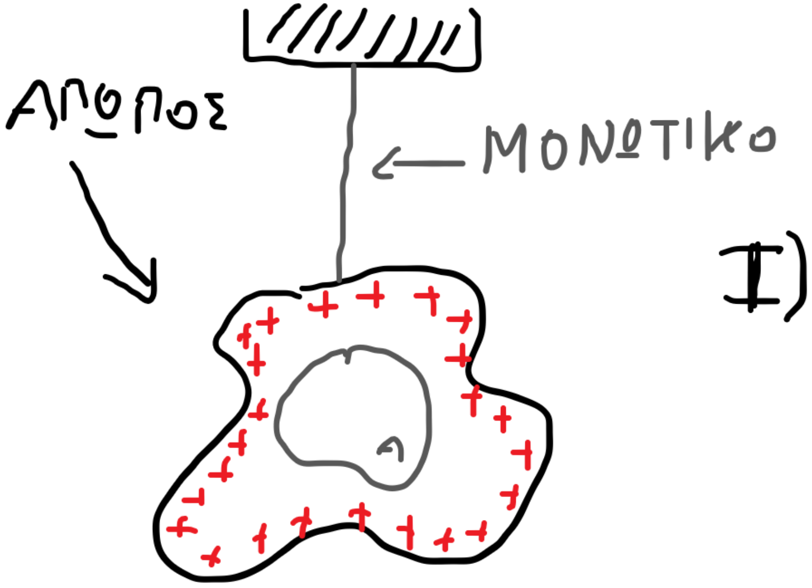
$S \sim R^2$

$$S\cdot|E| = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$|E| = \frac{Q}{S\,\varepsilon_0}$$

∴ ΤΟ ΓΕΓΟΝΟΣ ΟΤΙ Ο ΧΩΡΟΣ ΕΙΝΑΙ 3D ⇒ COULOMB ΕΧΕΙ $1/R$

ΦΟΡΤΙΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΑΓΩΓΟΥ 19.3.21

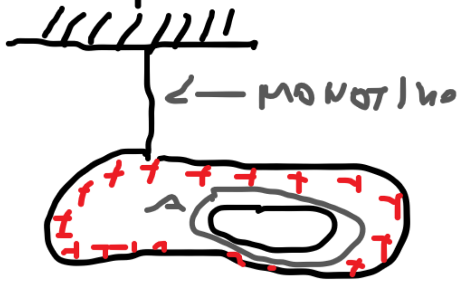


I) ΤΑ ΦΟΡΤΙΑ ΑΠΩΘΟΥΝΤΑΙ ΚΑΙ ΠΗΓΑΙΝΟΥΝ ΟΣΟ ΠΙΟ ΜΑΚΡΙΑ ΜΠΟΡΟΥΝ ⇒ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ!!

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{E}=0$ ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΑΓΩΓΟΥ ΕΙΝΑΙ ΠΑΝΤΑ ΜΗΔΕΝ

II) ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΜΕΣΑ ΣΤΟΝ ΑΓΩΓΟ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ ΓΙΑΤΙ ΑΝ ΔΕΝ ΗΤΑΝ ΜΗΔΕΝ ΘΑ ΕΞΑΣΚΟΥΣΕ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΑ ΦΟΡΤΙΑ ΤΑ ΟΠΟΙΑ ΘΑ ΚΙΝΟΥΝΤΑΝ → ΡΕΥΜΑ → ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ ΚΑΤΙ ΤΕΤΟΙΟ ΟΜΩΣ ΔΕΝ ΣΥΜΒΑΙΝΕΙ ΑΡΑ $\vec{E}=0$ ΜΕΣΑ ΣΤΟΝ ΑΓΩΓΟ ⇒

$\oint_A \vec{E}\, d\vec{A}=0 \Rightarrow \underline{\underline{Q_{in}=0}}$

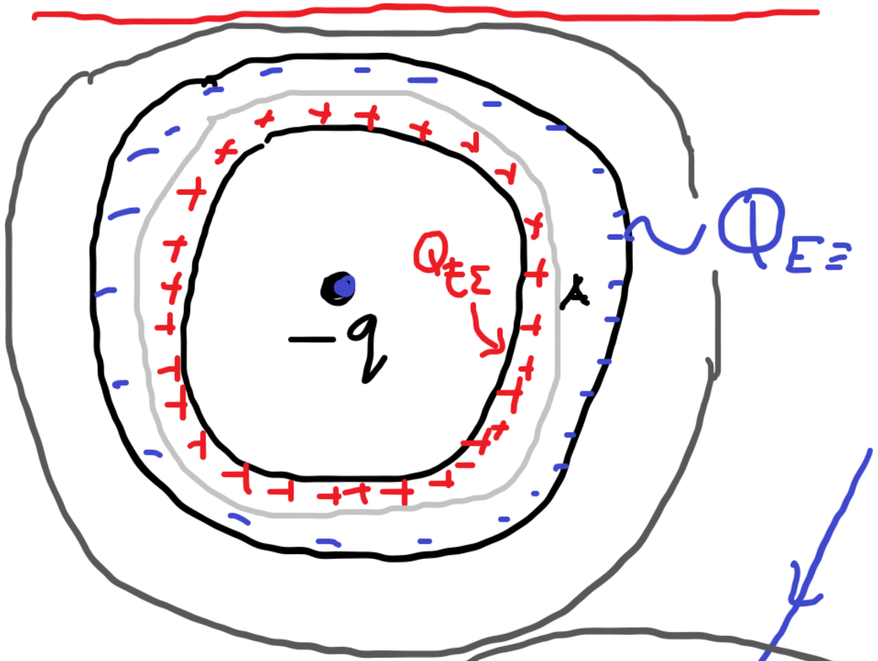


$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=0 \Rightarrow Q_{in}=0$

∴ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΦΟΡΤΙΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΗΣ ΚΥΛΟΤΗΤΑΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22-5: ΑΓΩΓΙΜΟ ΚΕΛΥΦΟΣ

$-q = -5\mu C$ $\quad Q_{E\Sigma} = ?$ $\quad Q_{E\Xi} = ?$

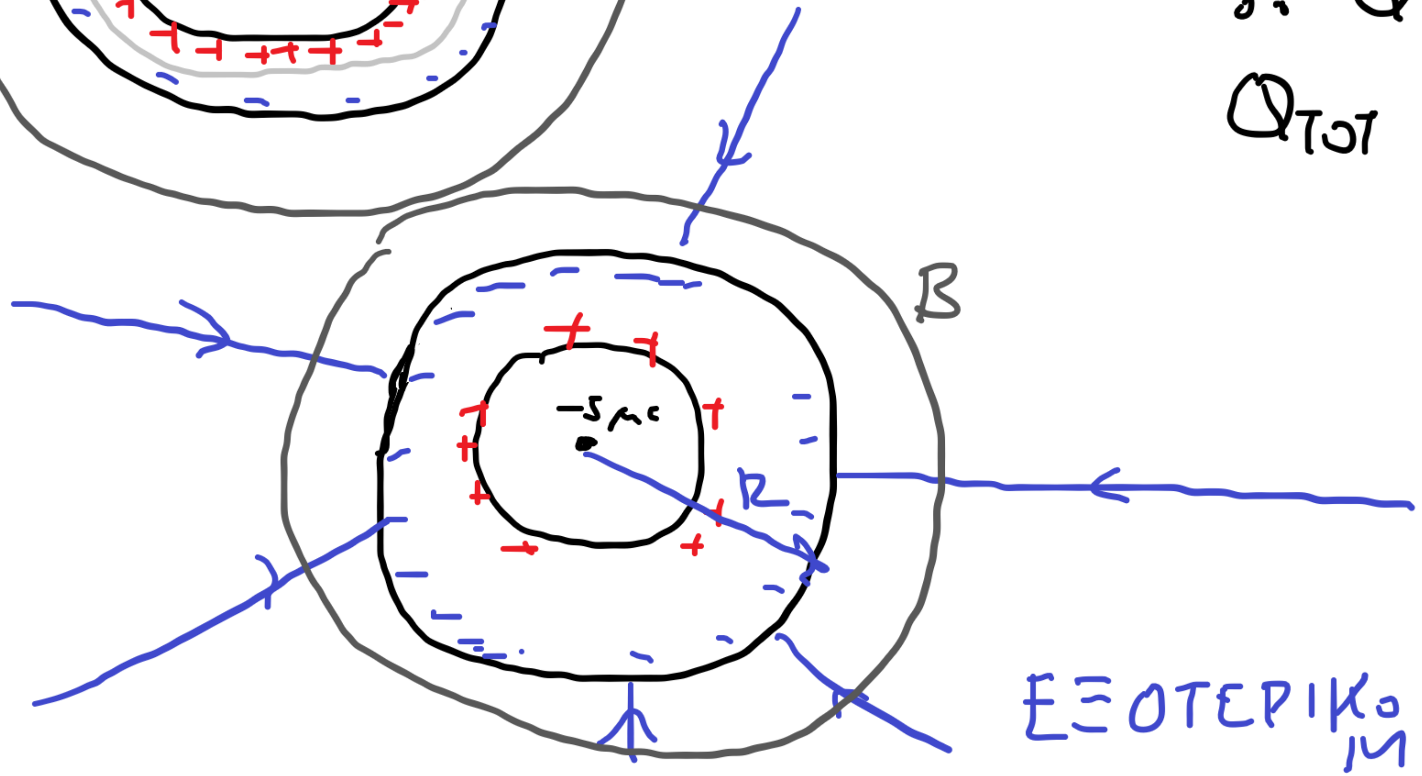


$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0 = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{-q + Q_{E\Sigma}}{\varepsilon} = 0$$

$$\therefore Q_{E\Sigma} = +5\mu C$$

$$Q_{TOT} = 0 \Rightarrow 5\mu C + Q_{E\Xi} = 0$$

$$Q_{E\Xi} = -5\mu C$$



$$\oint_B \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{-q \cancel{+q} \cancel{-q}}{\varepsilon_0}$$

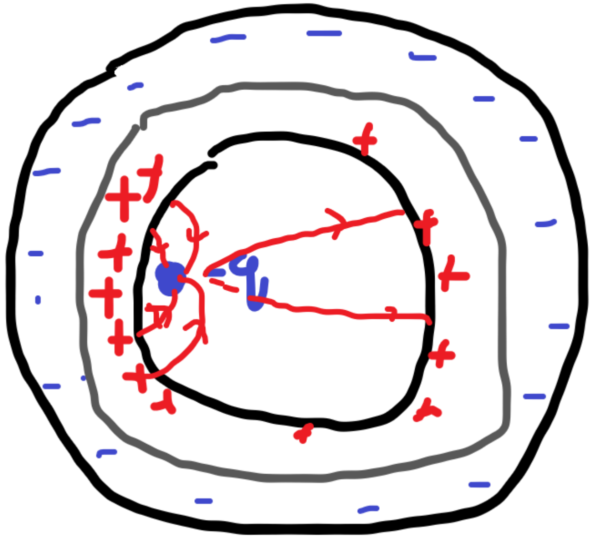
$r > R$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΕΙΝΑΙ ΣΑΝ ΝΑ ΗΤΑΝ
ΜΟΝΟ ΑΠΟ ΤΟ ΦΟΡΤΙΟ ΣΤ ΚΕΝΤΡΟ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ .. ΚΕΛΥΦΟΣ

$$\underbrace{\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}}= \frac{Q_{IN}}{\varepsilon_0}$$

19.3.21



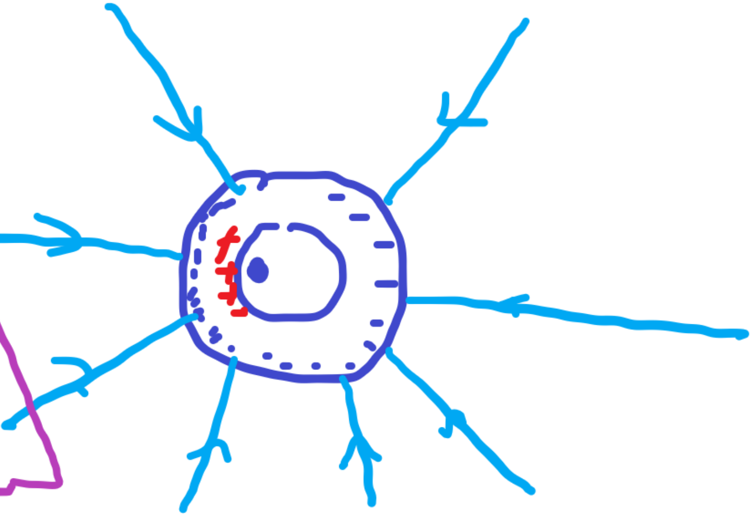
- ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΤΗΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

- ΤΑ ΦΟΡΤΙΑ ΣΤΗΝ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΔΕΝ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΕΠΙΡΕΑΣΟΥΝ ΤΑ ΦΟΡΤΙΑ ΣΤΗΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΔΙΟΤΙ ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ ΜΕΣΑ ΣΤΟΝ ΑΓΩΓΟ

$Q_{ΕΣ} = +5\,\mu C$

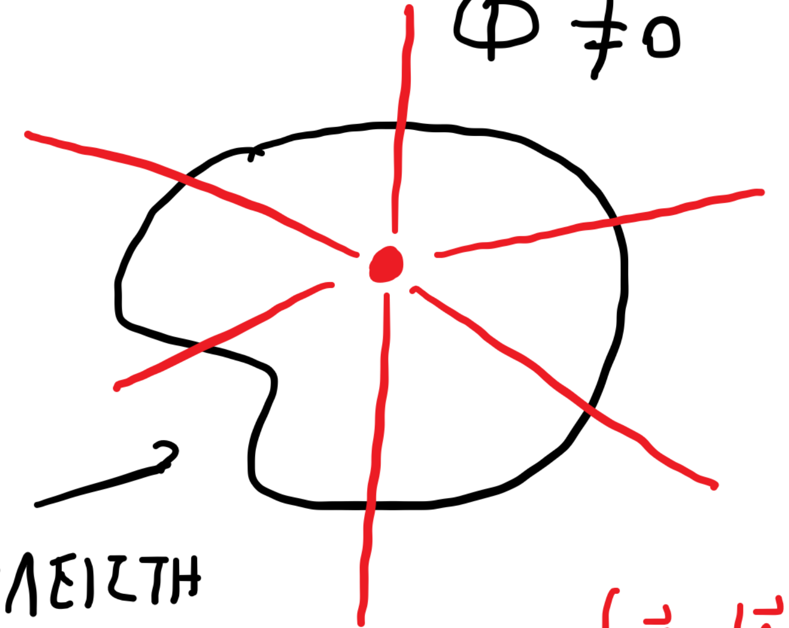
$Q_{ΕΞ} = -5\,\mu C$

ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΕΙΝΑΙ ΣΑΝ ΝΑ ΗΤΑΝ ΤΟ $-q$ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ



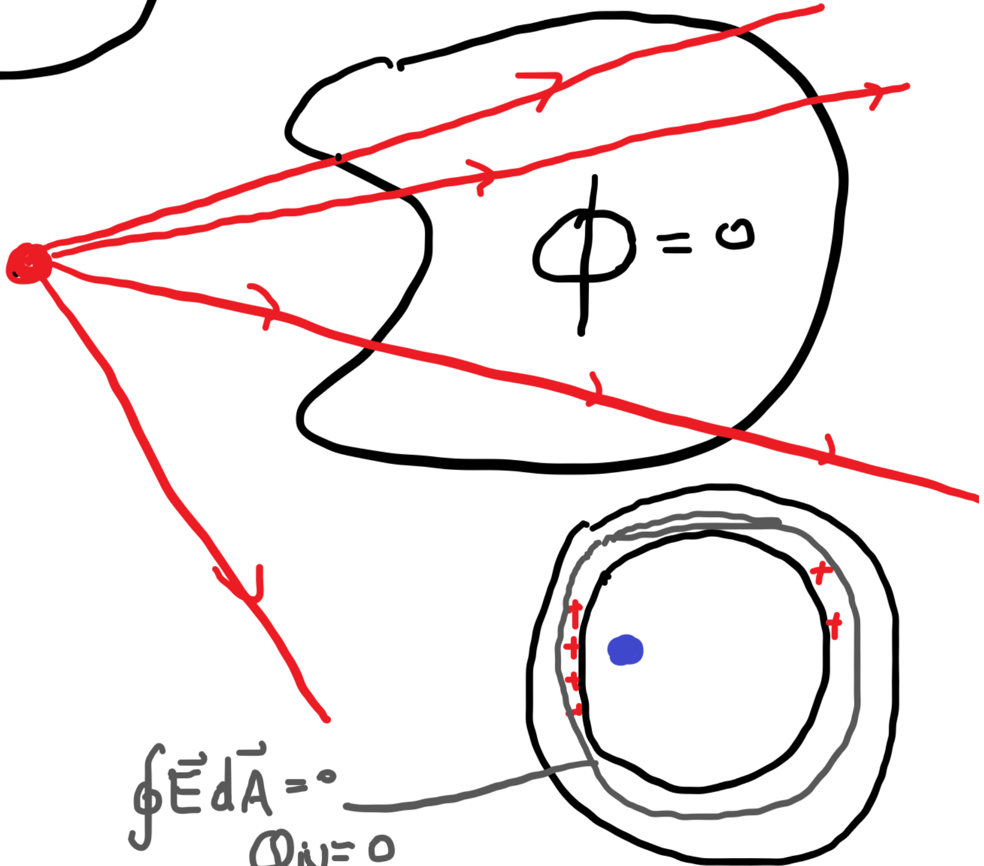
19.3.21 12

$\Phi \neq 0$



ΚΛΕΙΣΤΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon}$$



$$\oint \vec{E}\, d\vec{A} = 0$$

$Q_{in} = 0$